

Sutherlandモデルの 組み紐群構造と生成消滅演算子

2005年7月29日

A. Takamura

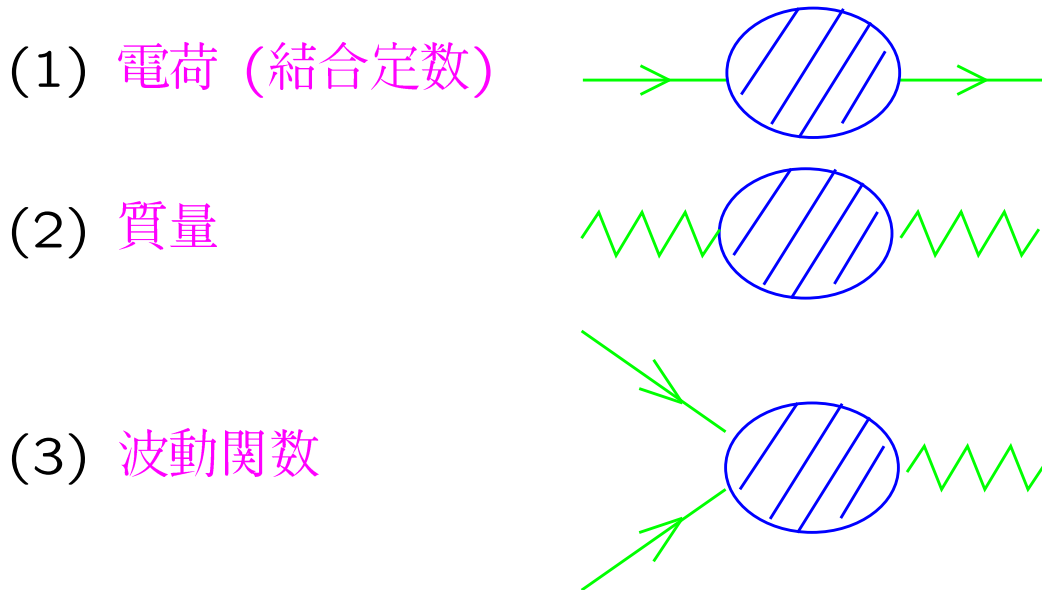
Talk of Plan

1. Motivation
2. 統計とは？
3. 分数統計とは？
4. 長距離相互作用をする量子力学系
5. Sutherland Model
6. Fock 空間の構成
7. Discussion

1. Motivation

◆ weakly coupled system

摂動論に基づいたくりこみ

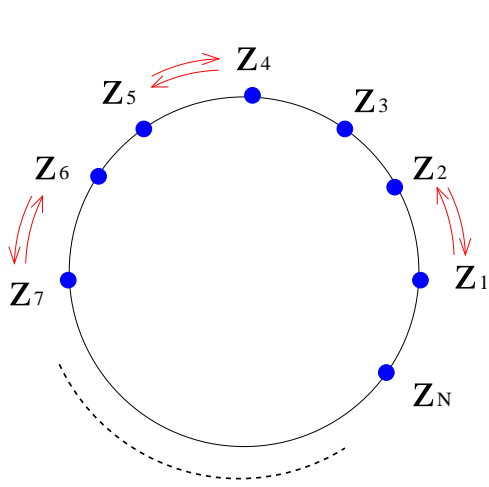


◆ strongly coupled system

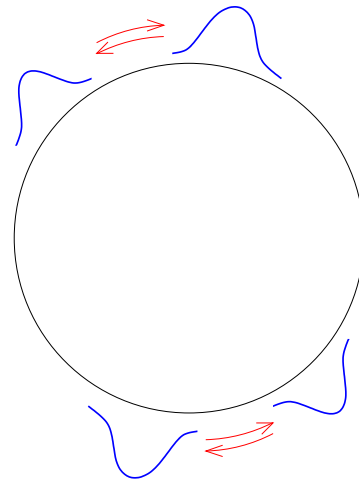
摂動を越えた新しい可能性

- (I) 高温超伝導
- (II) 量子ホール効果

◆ 1次元系



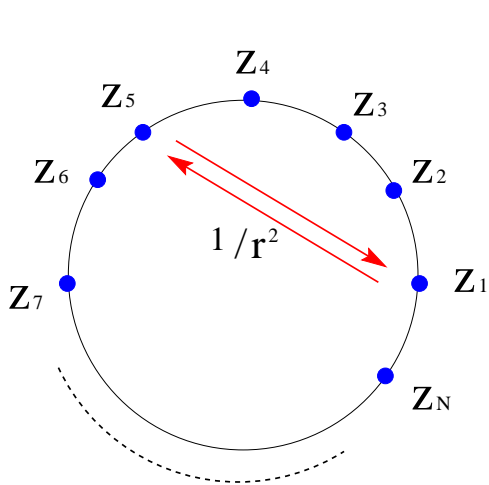
強相関系 (粒子)



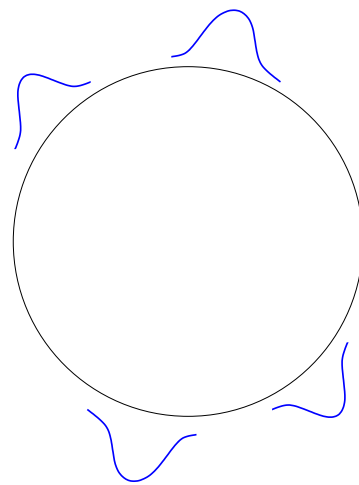
弱相関系 (ソリトン)

Remark “相互作用が擬粒子の性質を決める”

◆ $1/r^2$ 量子系 (Haldane 1991)



$1/r^2$ 相互作用系



分数統計粒子

Remark “ $H_I = 1/r^2$ の時、擬粒子は分数統計をもつ”

2、統計とは？

“多くの同種粒子の集団的性質を決定”

◆ 2種類の統計

Two statistics... { Fermi statistics
Bose statistics

フェルミ統計

ボーズ統計

(粒子交換)

(粒子交換)

$$\psi(x_1, x_2) = -\psi(x_2, x_1)$$

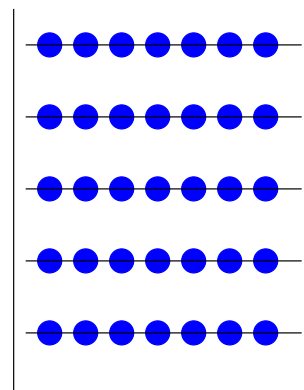
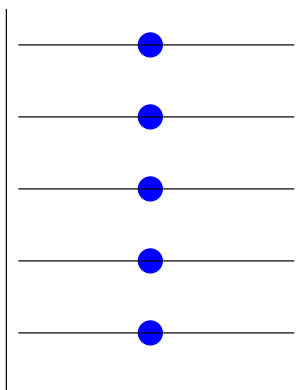
$$\psi(x_1, x_2) = +\psi(x_2, x_1)$$

マイナス

プラス

(準位占有)

(準位占有)

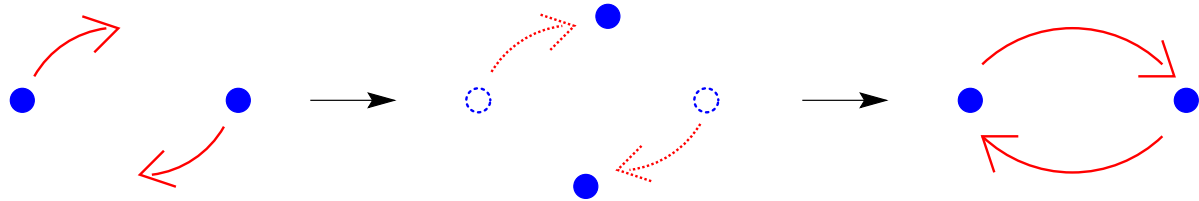


最大一つまで

いくつでも可

◆ 統計の定義

(1) 交換統計

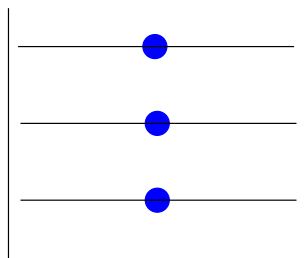


2つの波動関数の入れかえ

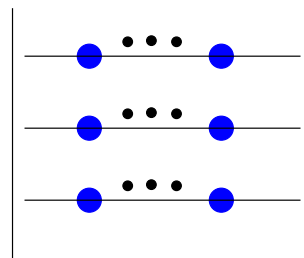
$$\psi(x_1, x_2) = \pm \psi(x_2, x_1)$$

“粒子を入れ替えた時の波動関数の符合の違い”

(2) 排他統計



1個まで



いくつでも可

“一つの準位に入ることのできる状態の個数”

◆ 統計の代数表現

粒子の生成・消滅演算子

フェルミオン

ボゾン

(交換関係)

(交換関係)

$$\{f_\alpha^\dagger, f_\beta^\dagger\} = 0$$

$$[b_\alpha^\dagger, b_\beta^\dagger] = 0$$

$$\{f_\alpha, f_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta}$$

$$[b_\alpha, b_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta}$$

$$\psi(x_1, x_2) = -\psi(x_2, x_1)$$

$$\psi(x_1, x_2) = +\psi(x_2, x_1)$$

(準位占有)

(準位占有)

$$N_\alpha = f_\alpha^\dagger f_\alpha$$

$$N_\alpha = b_\alpha^\dagger b_\alpha$$

$$[N_\alpha, f_\alpha^\dagger] = f_\alpha^\dagger$$

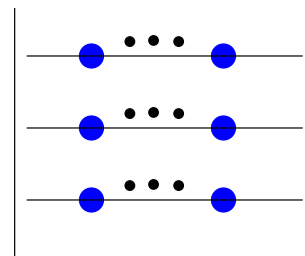
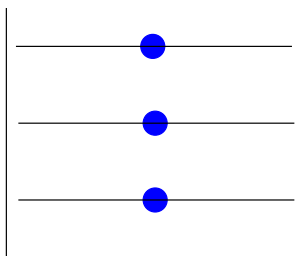
$$[N_\alpha, b_\alpha^\dagger] = b_\alpha^\dagger$$

$$N_\alpha^2 = N_\alpha$$

...

$$N_\alpha = 0, 1$$

$$N_\alpha = 0, 1, \dots, \infty$$

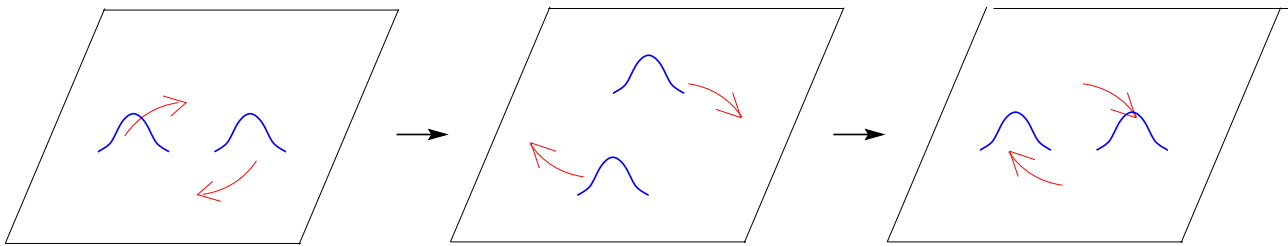


3、分数統計とは？

(1) 交換分数統計

“粒子交換の符合を一般化”

2つのソリトンの入れかえ

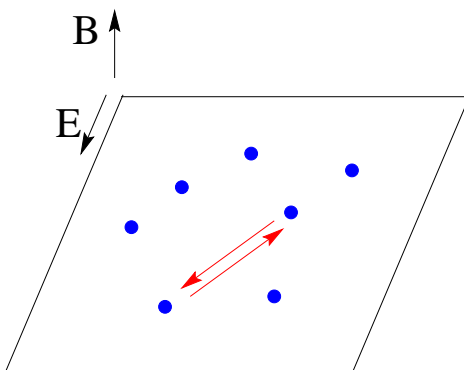


2つの波動関数の入れかえ (交換)

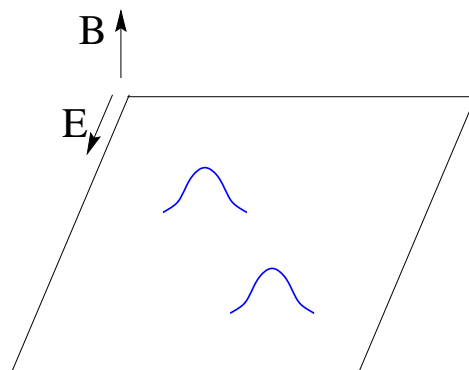
$$\psi(x_1, x_2) = e^{i\theta} \psi(x_2, x_1)$$

交換分数統計 (θ :分数)

◆ 例：分数量子ホール効果



磁場：大

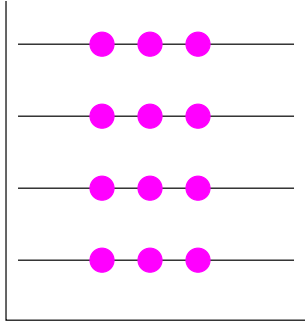


分数統計粒子

(2) 中間分数統計

“パウリの排他律の一般化”

◆ パラ統計 (Green 1954)



n個まで入れる

$$\begin{aligned} N_\alpha &= \alpha^\dagger \alpha \\ [N_\alpha, \alpha^\dagger] &= \alpha^\dagger \\ \prod_{k=0}^n (N_\alpha - k) &= 0 \\ N_\alpha &= 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

(i) パラ・フェルミ統計

$$\begin{aligned} [a_k, \{a_l^\dagger, a_m\}] &= 2\delta_{kl}a_m \\ [a_k, \{a_l^\dagger, a_m^\dagger\}] &= 2(\delta_{kl}a_m^\dagger + \delta_k m)a_l^\dagger \\ [a_k, \{a_l, a_m\}] &= 0 \end{aligned}$$

(ii) パラ・ボーズ統計

$$\begin{aligned} [a_k, [a_l^\dagger, a_m]] &= 2\delta_{kl}a_m \\ [a_k, [a_l^\dagger, a_m^\dagger]] &= 2(\delta_{kl}a_m^\dagger - \delta_k m)a_l^\dagger \\ [a_k, [a_l, a_m]] &= 0 \end{aligned}$$

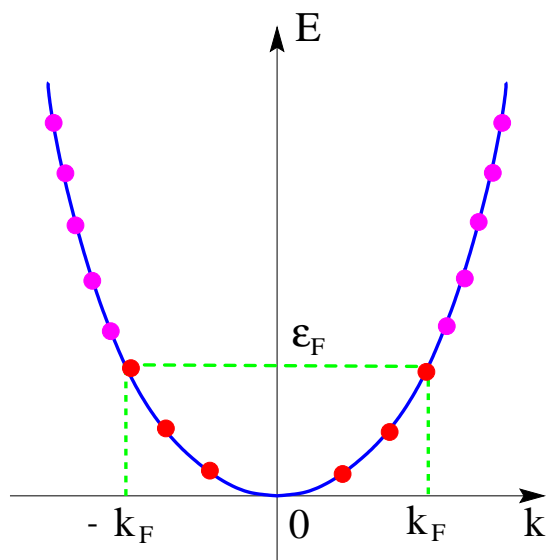
◆ 分数排他統計 (Haldane 1991)

$$\Delta D_\alpha = - \sum_{\beta} g_{\alpha\beta} \Delta N_\beta$$

- $\left\{ \begin{array}{l} \alpha, \beta : \text{particle species} \\ D_\alpha, N_\alpha : \text{Fock space, \# of particle} \end{array} \right.$
- $g_{\alpha\beta} : \text{statistical parameter}$

(i) ボゾン $g_{\alpha\beta} = 0$

(ii) フェルミオン ... $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$



粒子・ホール非対称性

↳

$1/r^2$ 系の擬粒子

4. 長距離相互作用をする量子力学系

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(r)$$

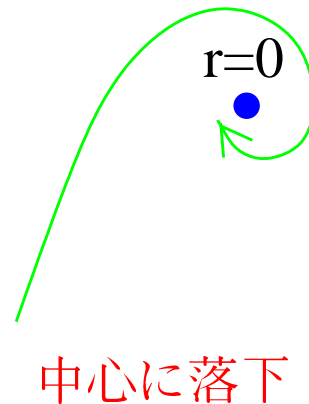
◆ 基底状態の安定性 (引力)

$$U(r) = \frac{g}{r^s} \quad (g < 0)$$

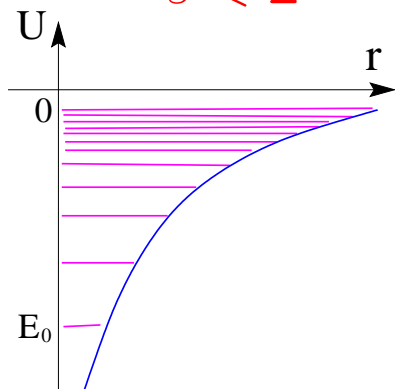
不確定性関係 $[x, p] = i\hbar$ より

$$\frac{\hbar^2}{2mr^2} + \frac{g}{r^s} = E_0(r)$$

基底エネルギー $E_0(r)$ の **下限** を探す

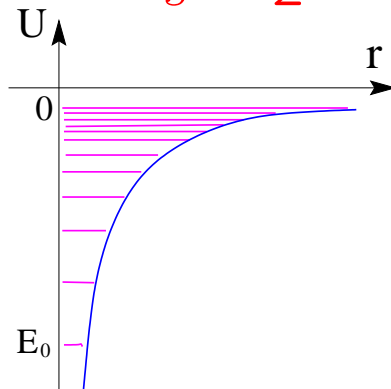


(1) 安定
 $s < 2$



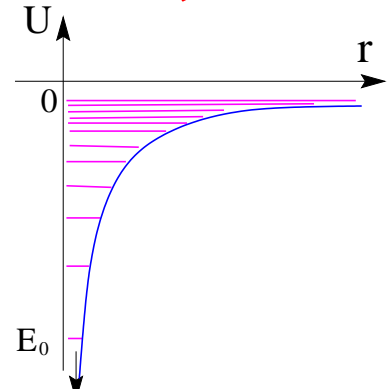
$1/r$

(2) 臨界的
 $s = 2$



$1/r^2$

(3) 不安定
 $s > 2$

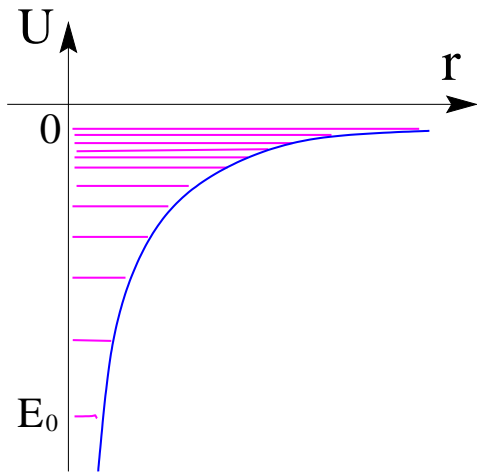


$1/r^3$

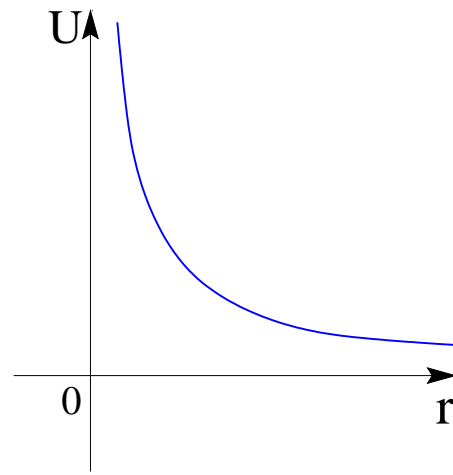
Remark “ $1/r^2$ ポテンシャルは臨界的”

◆ 距離の2乗に反比例する場合 ($s = 2$)

ポテンシャル: $U(r) = \frac{g}{r^2}$



引力 ($g < 0$)



斥力 ($g > 0$)

◆ 結合定数に対する制限

$$-\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{g}{r^2}\psi = E\psi$$

$E = 0$ の状態

原点付近の試行関数として $\psi = r^s$

$$s(s - 1) - g = 0$$

したがって、 $D \geq 0$ より

$$g \geq -1/4$$

Remark “引力が強すぎると基底状態は存在できない”

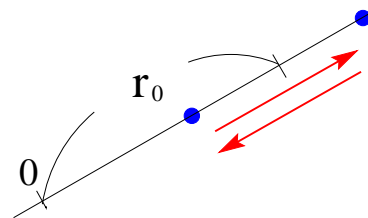
◆ 斥力ポテンシャルの安定化

(i) 調和ポテンシャルを導入 → Calogero model

(ii) 円周上に束縛 → Sutherland model

(i) Calogero model

$$H = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{g}{r^2} + \omega^2 r^2$$

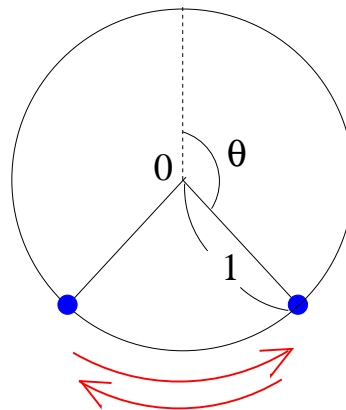


直線上を振動

Remark “振動数 ω としてスケールを導入”

(ii) Sutherland model

$$H = -\frac{d^2}{d\theta^2} + \frac{g}{\theta^2}$$

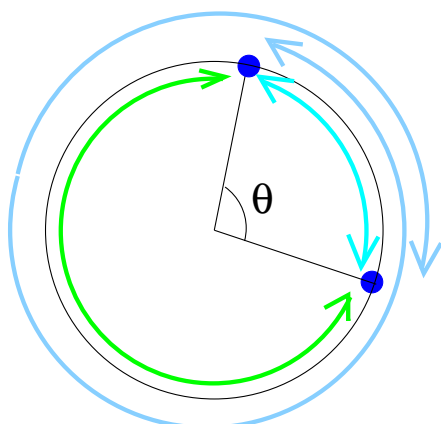


円周上を振動

Remark “スケールをもつ結合定数がない”

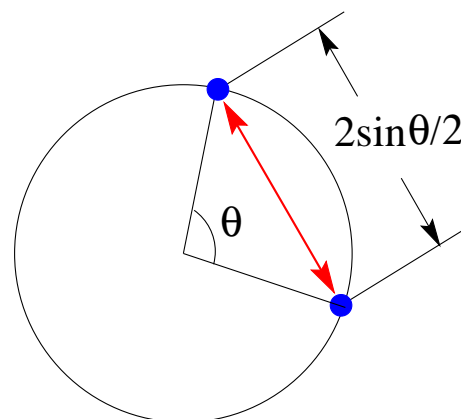
◆ Sutherland model の 2 体系

円周上の距離を足しあげる



円周上に沿って何周にも足しあげ

=

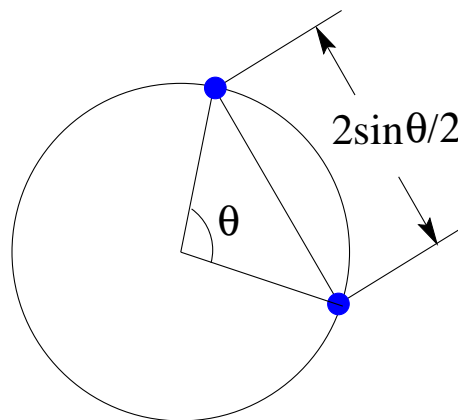


直線上の距離

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\theta + 2\pi n)^2} = \frac{1}{4 \sin^2(\theta/2)}$$

これより、2体の Hamiltonian は

$$H = -\frac{d^2}{d\theta^2} + \frac{\beta(\beta - 1)}{4 \sin^2(\theta/2)}$$



距離の 2 乗に反比例

Remark “円周上に束縛された 2 次元上のモデルへ”

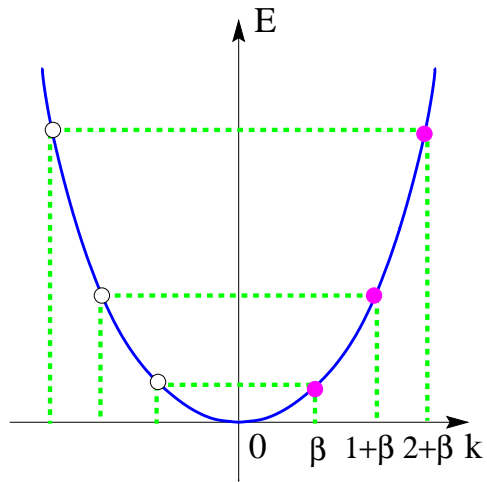
◆ エネルギーと固有関数

(エネルギー)

$$E = p^2$$

$$p = n + \beta$$

$$(n \geq 0)$$



Remark “エネルギーが自由粒子と同じ形”

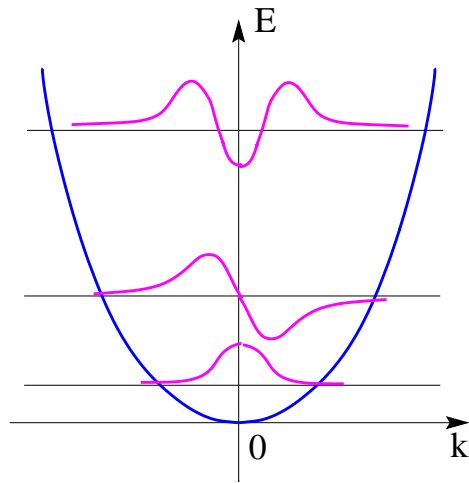
(基底状態)

$$\psi_0(z) = |z - z^{-1}|^\beta$$

(励起状態)

$$\psi_n(z) = \psi_0(z) \times G_n(z)$$

Gegenbauer 多項式



Remark

“Gegenbauer 多項式は Legendre 多項式の一般化”

◆ 擬運動量

交換演算子 K を導入： $K\theta = -\theta K$

$$H = -\frac{d^2}{d\theta^2} + \frac{\beta(\beta - K)}{4 \sin^2(\theta/2)}$$

これは平方完成できる

$$H = \frac{1}{4} \underbrace{\left(\frac{1}{i} \frac{d}{d\theta} + i\beta \cot(\theta/2)K + \beta K \right)}_D^2$$

$z = e^{i\theta}$ を導入して

$$D = z \frac{d}{dz} - \beta \frac{z + z^{-1}}{z - z^{-1}} K + \beta K$$

◆ 代数

$$\{D, K\} = 2\beta$$

$$[D, z] = z + 2\beta z^{-1} K$$

Remark

- (i) 相互作用を運動量にくりこむ
- (ii) 新しい代数 (affine Hecke algebra)

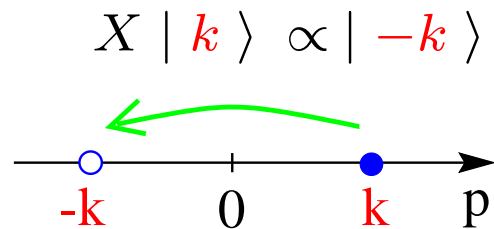
◆ 代数構造

擬運動量の固有状態：

$$D | k \rangle = k | k \rangle$$

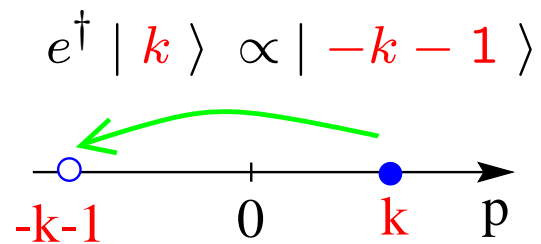
(1) 運動量交換演算子： $X = i[D, K]$

$$\begin{aligned} \{X, D\} &= 0 \\ X^2 &= D^2 - \beta^2 \end{aligned}$$



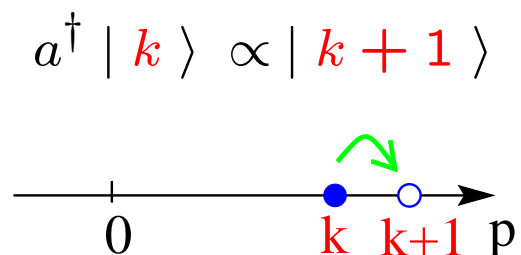
(2) 構成演算子： $e^\dagger = Kz$

$$\begin{aligned} \{D, e^\dagger\} &= e^\dagger \\ e^\dagger e &= e e^\dagger = 1 \\ e^\dagger &= e \end{aligned}$$



(3) 昇降演算子： $a^\dagger = X e^\dagger$

$$\begin{aligned} [D, a^\dagger] &= a^\dagger \\ a^\dagger a &= D^2 - \beta^2 \\ a a^\dagger &= (D + 1)^2 - \beta^2 \end{aligned}$$



◆ Fock 空間

昇降演算子を使って Fock 空間を構成

(基底状態)

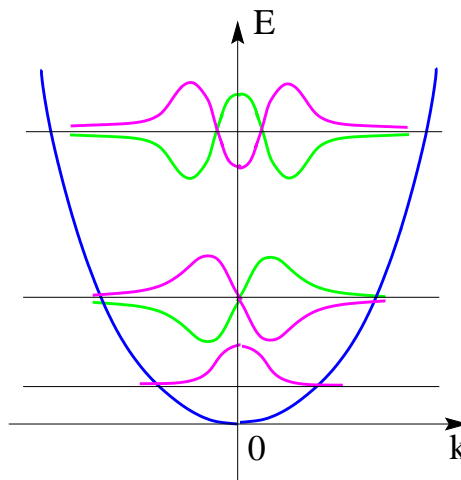
$$a | 0 \rangle = 0$$

$$K | 0 \rangle = \text{sign}(\beta) | 0 \rangle$$

(励起状態)

$$| n \rangle = (a^\dagger)^n | 0 \rangle$$

$$| -n \rangle = X | n \rangle$$

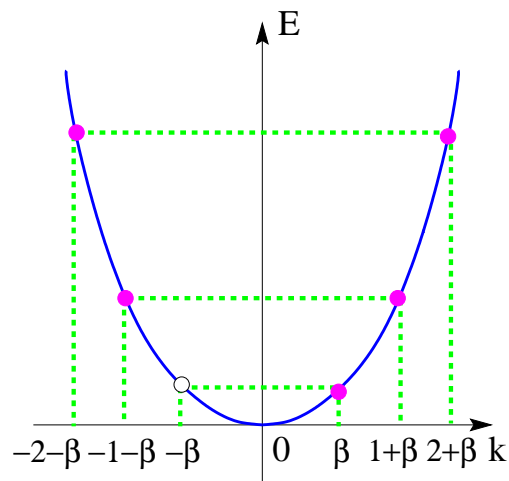


Remark “励起状態は2重縮退”

(エネルギー)

$$E = p^2$$

$$p = \begin{cases} n + \beta & (n \geq 0) \\ -(n + \beta) & (n \geq 1) \end{cases}$$

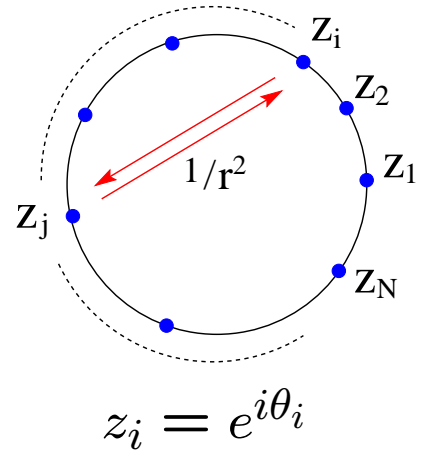


Remark “反対向き of 運動量が存在”

5. Sutherland Model

多体の Sutherland Model

- (1) 円周上に N 個の粒子が束縛
- (2) 粒子間に長距離な相互作用

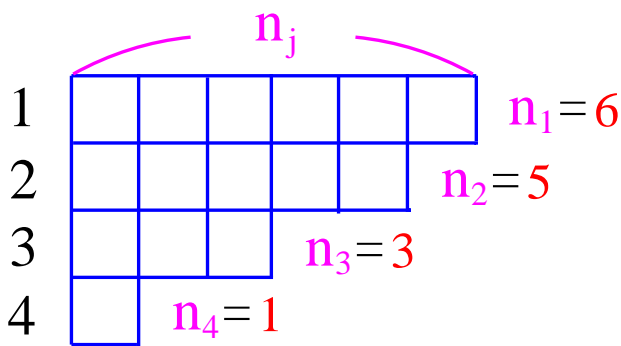


$$H = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial \theta_i^2} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{g}{\sin^2[(\theta_i - \theta_j)/2]}}_{1/r^2 \text{ type}}$$

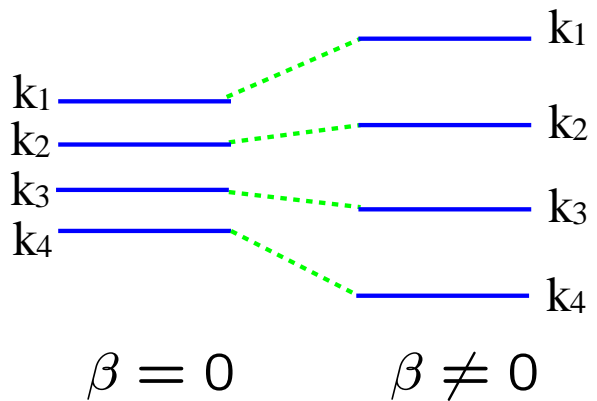
◆ エネルギーと固有関数

(エネルギー)

$$E = \sum_{i=1}^N k_i^2 \quad k_i = n_i + \frac{\beta}{2}(N + 1 - 2i)$$



Young 図

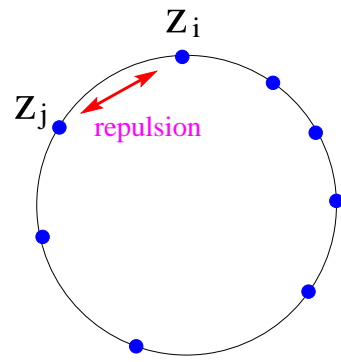


Remark “エネルギーは自由粒子と同じ”

(基底状態)

$$\psi_0 = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^\beta \prod (z_i)^J$$

$$\rightarrow 0 \quad (z_i \rightarrow z_j)$$



Laughlin 波動関数 :

$$\psi_{\text{Laughlin}} = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{1/2} \exp(-\sum |z_i|)$$

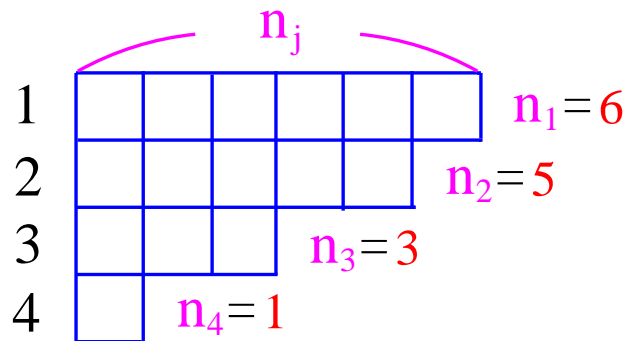
Remark

“分数量子 Hall 効果系の Laughlin 波動関数と類似”

(励起状態)

$$\psi = J(z_1, \dots, z_N) \psi_0$$

Jack 多項式



分数量子 Hall 効果系の coherent 状態

$$\psi_{\text{coherent}} = \prod_{i=1}^N \prod_{a=1}^M (z_i - Z_a) \psi_0(z_1, \dots, z_N)$$

Remark “分数量子 Hall 系の coherent 状態と類似”

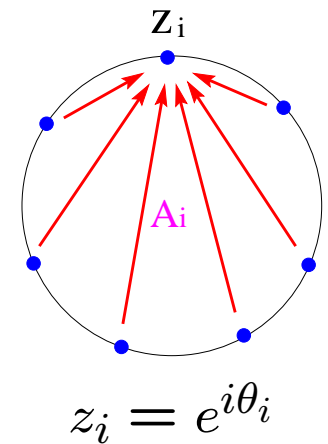
◆ 擬運動量とゲージ場

交換演算子 K_{ij} を導入： $K_{ij}\theta_i = -\theta_j K_{ij}$

$$H = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial \theta_i^2} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\beta(\beta - K_{ij})}{\sin^2[(\theta_i - \theta_j)/2]}}_{1/r^2 \text{ type}}$$

ゲージ場 A_i を使って平方完成できる

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \theta_i} + A_i \right)^2 = \sum_{i=1}^N D_i^2$$



ゲージ場：

$$A_i = i\beta \sum_j \cot[(\theta_i - \theta_j)/2] K_{ij} + \frac{\beta}{2} \sum_j \text{sign}(j - i) K_{ij}$$

ここで $A_i = \sum_j \phi_{ij}$ とすると

Yang-Baxter relation:

$$[\phi_{ij}, \phi_{jk}] + [\phi_{jk}, \phi_{ki}] + [\phi_{ki}, \phi_{ij}] = 0$$

を満足する。

Remark “ゲージ理論と類似 (Chern-Simon 理論)”

◆ 代数

(1) affine Hecke algebra

$$[D_i, D_j] = 0, \quad D_i K_{i,i+1} - K_{i,i+1} D_{i+1} = \beta$$

(2) double affine Hecke algebra

$$[D_i, z_j] = \begin{cases} z_i + \beta z_i \sum_{j(<i)} K_{ij} + \beta \sum_{j(>i)} K_{ij} z_i & (i = j) \\ -\beta \{z_j K_{ij} \theta(i - j) + K_{ij} z_j \theta(j - i)\} & (i \neq j) \end{cases}$$

Remark

- (i) 相互作用を運動量にくりこむ
- (ii) 新しい代数 (affine Hecke algebra)

Point (affine Hecke algebra)

$$D_i K_{i,i+1} - K_{i,i+1} D_{i+1} = \beta$$

- (i) 運動量分布に相互作用の効果
- (ii) パウリの排他統計の一般化

◆ 代数構造

擬運動量の固有状態:

$$D_i | k_1, \dots, k_i, \dots, k_N \rangle = k_i | k_1, \dots, k_i, \dots, k_N \rangle$$

◆ 組み紐・排他演算子

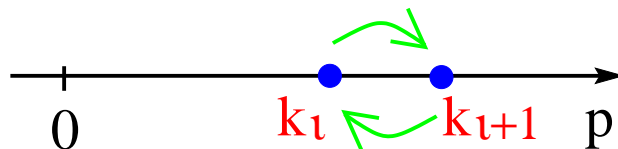
$$X_{i,i+1} = i[D_i, K_{i,i+1}]$$

(1) 運動量交換

$$X_{i,i+1} D_i = D_{i+1} X_{i,i+1}$$

$$[X_{i,i+1}, D_j] = 0 \quad (j \neq i, i+1)$$

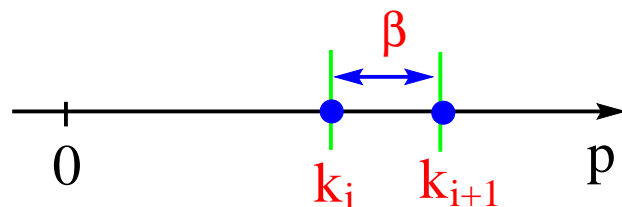
$$X_{i,i+1} | \dots, k_i, k_{i+1}, \dots \rangle \propto | \dots, k_{i+1}, k_i, \dots \rangle$$



(2) 排他統計

$$X_{i,i+1}^2 = (D_i - D_{i+1})^2 - \beta^2$$

$$|k_i - k_j| \geq \beta$$



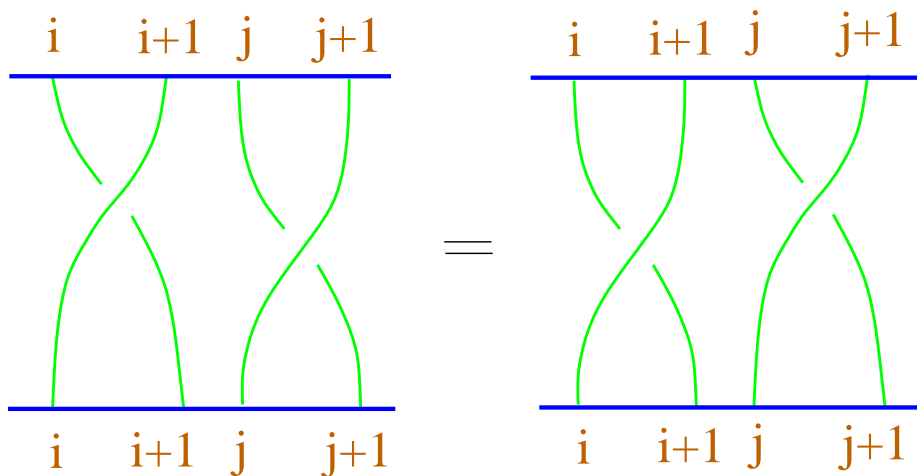
(i) $\beta = 0$ ボゾン

(ii) $\beta = 1$ フェルミオン

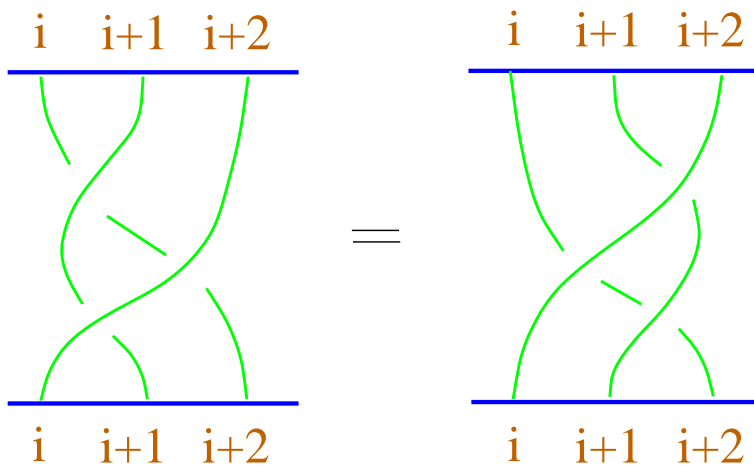
(3) 組み紐構造

$$X_{i,i+1}X_{j,j+1} = X_{j,j+1}X_{i,i+1} \quad (|i - j| \geq 2)$$

$$X_{i,i+1}X_{i+1,i+2}X_{i,i+1} = X_{i+1,i+2}X_{i,i+1}X_{i+1,i+2}$$



$$X_{i,i+1}X_{j,j+1} = X_{j,j+1}X_{i,i+1}$$



$$X_{i,i+1}X_{i+1,i+2}X_{i,i+1} = X_{i+1,i+2}X_{i,i+1}X_{i+1,i+2}$$

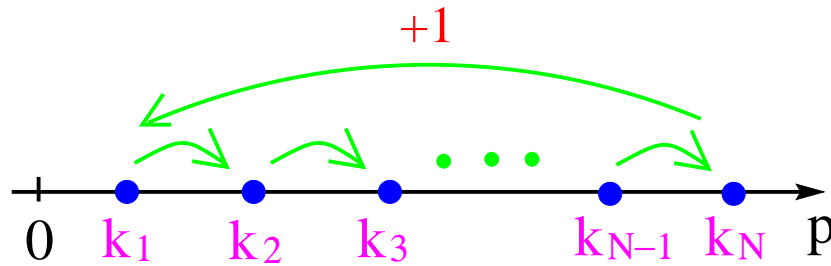
◆ 運動量增加演算子

$$e^\dagger = K_{N,N-1}K_{N-1,N-2}\cdots K_{21}z_1$$

$$D_j e^\dagger - e^\dagger D_{j+1} = 0, \quad (j \neq N)$$

$$D_N e^\dagger - e^\dagger D_1 = e^\dagger$$

$$e^\dagger |k_1, k_2, \dots, k_N\rangle = |k_2, \dots, k_N, k_1+1\rangle$$



◆ 構成演算子

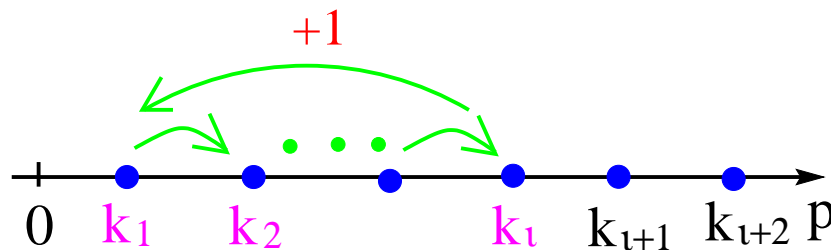
$$a_i^\dagger = X_{i,i+1}X_{i+1,i+2}\cdots X_{N-1,N}e^\dagger$$

$$D_j a_i^\dagger - a_i^\dagger D_{j+1} = 0 \quad (1 \leq j \leq i-1)$$

$$D_i a_i^\dagger - a_i^\dagger D_1 = a_i^\dagger$$

$$[D_j, a_i^\dagger] = 0 \quad (i+1 \leq j \leq N)$$

$$a_i^\dagger |k_1, \dots, k_i, k_{i+1}, \dots\rangle \propto |k_2, \dots, k_i, k_1+1, k_{i+1}, \dots\rangle$$



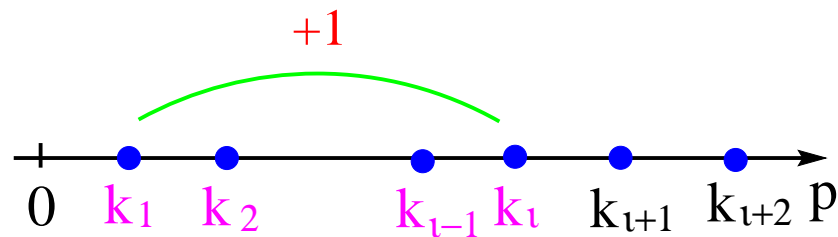
◆ 昇降演算子

$$b_i^\dagger = (a_i^\dagger)^i, \quad (i = 1, \dots, N)$$

(1) 運動量生成

$$[D_i, b_j^\dagger] = \theta(j - i)b_j^\dagger$$

$$b_i^\dagger |k_1, \dots, k_i, k_{i+1}, \dots\rangle \propto |k_1+1, \dots, k_i+1, k_{i+1}, \dots\rangle$$



(2) ボーズ型交換関係

$$[b_i^\dagger, b_j^\dagger] = 0$$

(3) 個数演算子

$$b_i^\dagger b_i = \prod_{l=1}^i \prod_{m=i+1}^N [(D_l - D_m)^2 - \beta^2] \quad (i \neq N)$$

$$b_i b_i^\dagger = \prod_{l=1}^i \prod_{m=i+1}^N [(D_l - D_m + 1)^2 - \beta^2] \quad (i \neq N)$$

$$b_N^\dagger b_N = b_N b_N^\dagger = 1$$

Remark $[b_i^\dagger, b_j] \neq \delta_{ij} \rightarrow$ “ボーズ統計ではない”

6. Fock空間の構成

(基底状態)

$$b_i | \alpha_1, \dots, \alpha_N \rangle = 0 \quad (i = 1, \dots, N - 1)$$

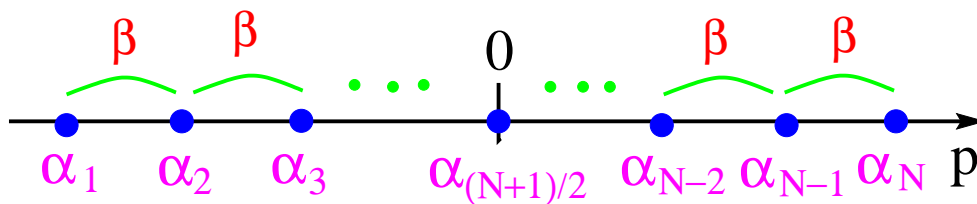
$$K_{ij} | \alpha_1, \dots, \alpha_N \rangle = + | \alpha_1, \dots, \alpha_N \rangle$$

さらに、 $D_i K_{i,i+1} - K_{i,i+1} D_{i+1} = \beta$ から

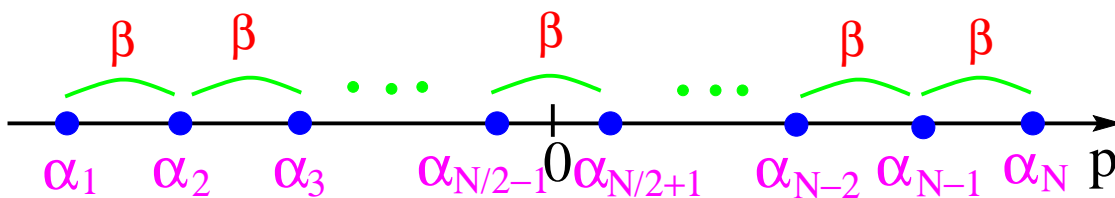
$$\alpha_i = \frac{N + 1 - 2i}{2} \beta$$

したがって基底状態は、

$$| 0 \rangle = | \alpha_1, \dots, \alpha_N \rangle = \left| \frac{N - 1}{2} \beta, \dots, -\frac{N + 1}{2} \beta \right\rangle$$



(1) 粒子数奇数の場合



(2) 粒子数偶数の場合

Remark “基底状態は完全対称で等間隔に並ぶ”

(励起状態)

(1) エネルギーの高い状態

$$|n_1, n_2, \dots, n_N \gg \equiv (b_1^\dagger)^{n_1 - n_2} (b_2^\dagger)^{n_2 - n_3} \dots (b_N^\dagger)^{n_N} |0\rangle$$

この状態は擬運動量演算子の固有状態である。

$$D_i |n_1, n_2, \dots, n_N \gg = k_i |n_1, n_2, \dots, n_N \gg$$

擬運動量 k_i は量子数 n_i との関係：

$$k_i = n_i + \frac{N + 1 - 2i}{2} \beta$$
$$n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_N$$

(2) 縮退

$$|\dots, k_{i+1}, k_i, \dots\rangle \propto X_{i,i+1} |\dots, k_i, k_{i+1}, \dots\rangle$$

$$|k_i - k_{i+1}| \geq \beta$$

(エネルギー)

$$E = \sum_{i=1}^N k_i^2 = \sum_{i=1}^N \left(n_i + \frac{N + 1 - 2i}{2} \beta \right)^2$$

Remark

“昇降演算子と交換演算子で Fock 空間を構成”

7. Discussion

◆ Integrable lattice models

格子モデルで、Yang-Baxter 方程式

$$\begin{aligned} & R^{01}(u-v)R^{12}(u-w)R^{20}(v-w) \\ &= R^{12}(v-w)R^{02}(u-w)R^{01}(u-v) \end{aligned}$$

を満たす可解格子モデルは次の 3 種類しか存在しない。

- (1) 有理関数型
- (2) 三角関数型
- (3) 楕円関数型

◆ Integrable many body system

多体系モデル

$$H = \sum p_i^2 + \sum_{i,j} V(x_i - x_j)$$

で Lax 形式に書き直せる可積分モデルは次の 3 種類。

- (1) 有理関数型 $V(x) = \frac{g}{x^2}$
- (2) 三角関数型 $V(x) = \frac{g}{\sin^2 x}$
- (3) 楕円関数型 $V(x) = \frac{g}{\operatorname{sn}^2 x}$

Unsolved Big Problem

“楕円型量子多体系は可積分であるが可解でない”

◆ 楕円型量子多体系のこれまでの研究

$$H = - \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + g \sum_{i,j} \wp(x_i - x_j)$$

Weierstrass の $\wp(x)$ 関数は、2重周期 $(1, \tau)$ を持つ。

- (1) **2体問題** ... 2体系は Lamé 方程式と呼ばれ、19世紀から考察されている。この系の著しい特徴として、 $g = l(l+1)$ 、 l を自然数とすると、スペクトルは、 l 個のエネルギーギャップを持つ。
- (2) **摂動展開** ... $\tau \rightarrow \sqrt{-1}\infty$ とすることにより、楕円型から三角型の Sutherland モデルが得られる。三角型は固有関関数や固有値がよくわかっているので、それからの摂動として楕円型を扱う。
- (3) **ベーテ仮設** ... この方法は、解の形を定数入りのある形に仮定し、定数に関する代数方程式を解く問題に帰着させる方法である。楕円型の場合は得られるベーテ方程式が複雑で解けないという問題がある。
- (4) **特殊な解** ... 結合定数が特別な場合には、解空間を2重周期関数からなる空間に制限することにより、厳密に固有値や固有関数が求まる場合がある。

◆ なぜ楕円型は可解でないのか？

Sutherland モデルは

$$H = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial \theta_i^2} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\beta(\beta - 1)}{\sin^2[(\theta_i - \theta_j)/2]}$$

ゲージ場 A_i を使うと

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \theta_i} + A_i \right)^\dagger \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \theta_i} + A_i \right) = \sum_{i=1}^N a_i^\dagger a_i$$

と書き直せる。ここでゲージ場は

$$A_i = i\beta \sum_j \cot[(\theta_i - \theta_j)/2]$$

である。

(1) 古典可積分性 ... 3体相互作用が消える

$$\begin{aligned} & \cot(x_i - x_j) \cot(x_j - x_k) \\ & + \cot(x_j - x_k) \cot(x_k - x_i) \\ & + \cot(x_k - x_i) \cot(x_i - x_j) = 1 \end{aligned}$$

(2) 量子可積分性 ... 量子補正が結合定数に繰り込める

$$\frac{d}{dx} \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Remark

“楕円型量子多体系は条件 (2) を満たさない”