物質情報学 2（物理数学） 担当 谷村 平成 24 年度前期

ノート 2：指数関数・三角関数・双曲線関数

exponential function, trigonometric function, hyperbolic function

1 集合と写像

ものの集まりを**集合** (set) という．集まって集合をなしている個々の要素を集合の**要素**とか**元** (element) という．x が集合 X の元であることを $x \in X$ と書く（「x in X」とか「x は X に含まれる」とか「x は X の元である」と読む）．自然数全体の集合を $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$, 整数全体の集合を $\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$, 有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$, 実数全体の集合を $\mathbb{R}$, 複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ と書く．

2 つの集合 X, Y があり，X の各元 $x \in X$ に対して Y の元 $f(x) \in Y$ を対応させるような規則があるとき，この対応規則を $x \mapsto f(x)$ あるいは，$f : X \to Y$ と書き，f を集合 X から Y への**写像** (mapping) あるいは**関数** (function) という．また，集合 X を写像 f の**定義域** (domain) という．

集合 $X, \tilde{X}$ について，$x \in X$ ならば $x \in \tilde{X}$ が成り立つことを X は $\tilde{X}$ の**部分集合** (subset) であるといい，$X \subset \tilde{X}$ と書く．

$X \subset \tilde{X}$ として，写像 $f : X \to Y$ と写像 $\tilde{f} : \tilde{X} \to Y$ があって，任意の $x \in X$ に対して $f(x) = \tilde{f}(x)$ が成り立つとき，$\tilde{f}$ は f の**拡張** (extension) であるといい，f は $\tilde{f}$ の**制限** (restriction) であるという．

演習 2-1. 「一対一写像（単射）」,「上への写像（全射）」,「逆写像」の定義をそれぞれ述べよ．写像 $f : X \to Y$ の逆写像が存在するための必要十分条件を述べよ．

2 指数関数

2.1 指数関数の定義域の拡大

正の実数 a，自然数（正の整数）n に対して a^n を

$$a^1 := a, \qquad a^{n+1} := a^n \cdot a \tag{1}$$

によって定義する（帰納的定義）．a^n は a を n 回掛け算したものになる．とくに,

$$a^0 := 1 \tag{2}$$

と約束する．また,

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n} \tag{3}$$

と約束する．

演習 2-2. $a^0 := 1$ と定義するのが合理的である理由を述べよ．

演習 2-3. $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ と定義するのが合理的である理由を述べよ．

概念の合理的拡張：2 通りの答えがある．

合理化 (i) 数 a を使って，数 x を a 倍して数 ax に移す写像

$$\phi_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax \tag{4}$$

が定められる．この写像を n 回繰り返した合成写像は

$$(\phi_a)^n = \phi_a \circ \cdots \circ \phi_a = \phi_{a^n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto a^n x \tag{5}$$

となる．また，ϕ_a の逆写像は

$$(\phi_a)^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{a} x \tag{6}$$

であり，a の逆数を掛け算する写像になる．また，写像 ϕ_a を一度も施さないのは，恒等写像

$$(\phi_a)^0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x \tag{7}$$

であり，1 倍写像である．

合理化 (ii) 正の整数 m, n に対して指数法則

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \tag{8}$$

が成り立つ（数学的帰納法で証明される）が，m, n が 0 や負の数であるような場合にもこの性質が成立することを要請すると，(2), (3) のような定義に導かれる．

演習 2-4. 階乗 $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ において $0! = 1$ と約束することが合理的であることを説明せよ．さらに，負の数 $(-n)$ の階乗 $(-n)!$ の合理的定義は可能か考えよ．

演習 2-5. 指数が分数のとき，つまり整数 m, 自然数 n が与えられたとき，

$$a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m} \tag{9}$$

と定義するのが合理的である理由を説明せよ．ただし，正の数 b に対し，$c = \sqrt[n]{b}$ は $c^n = b$ となるような正の数を意味し，c は b の n 乗根と呼ばれる．

2.2 指数関数の定義

x が自然数あるいは整数あるいは有理数のときに a^x が定義できることはわかったが、任意の実数 x に対して

$$a^x \tag{10}$$

をいかに定義すべきか？ 例えば $a^{\sqrt{2}}$ や a^{π}（π は円周率）をどう定義すべきか？ 指数関数 e^x の 5 通りの定義を挙げておく．

(i) 有理数の指数関数からの極限で定義する． 任意の実数 x に対して x に収束する有理数列 $q_1, q_2, \cdots$ を作ることができる（どうやって？）．この数列を用いて

$$a^x := \lim_{i \to \infty} a^{q_i} \tag{11}$$

と定義する．

(ii) 微分方程式の解として指数関数を定義する． まず a^x という関数が定義できたと仮定して，形式的に実数 x, y に対しても $a^{x+y} = a^x a^y$ が成り立つものと仮定する．そして a^x の微分がどうなるか調べてみる．やってみると，

$$\frac{d}{dx} a^x = c\, a^x \tag{12}$$

となることがわかる．ここで c は x には無関係な定数（a には関係している）．そこで，はじめから $F(x) = \exp x = e^x$ という関数を

$$\frac{dF}{dx} = F(x), \qquad F(0) = 1 \tag{13}$$

を満たすものと要請する．この微分方程式の解は一意的に存在することが証明できるので，解として e^x が定まる．

(iii) 関数方程式で定義する． 実数の関数 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に以下の 4 つの条件を要請する．

$$F(x+y) = F(x) \cdot F(y), \tag{14}$$

$$F(0) = 1, \tag{15}$$

$$F(x) \text{ は連続関数}, \tag{16}$$

$$F'(0) = 1 \tag{17}$$

これらを満たす関数が一意的に存在し，$F(x) = e^x$ と書く．

(iv) 累乗の極限で定義する．

$$e^x := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \tag{18}$$

(v) 無限級数で定義する．

$$e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3!}\, x^3 + \cdots \tag{19}$$

考えてみよう：

1. 各定義の意味を考えてみる．
2. 各定義がちゃんと定義になっているか考えてみる（極限は存在するのか？一意的か？解は一意的に存在するのか？無限級数はちゃんと収束するのか？）
3. 一つの定義から他の定義を導けるか？
4. どの定義が計算に使えそうか？手計算に向いているか？コンピュータでプログラムしやすいか？
5. どの定義が指数関数の性質を証明するのに便利か？
6. 関数の定義域の拡張可能性を考えてみる（e^x の x に代入できるのは実数だけか？複素数も代入できるか？）

7. 指数関数の他の定義の仕方はあるか？

8. 対数関数の定義を何通りか与えてみよ．各定義の意味や使い勝手や拡張可能性を吟味せよ．また，一つの定義から他の定義を導いてみよ．

9. (ii)-(v) で e^x は定義できたが，任意の正の実数 a に対して a^x はどう定義すればよいのか？

10. a が負の実数や複素数だったら a^x は定義できるか？

無限級数表示の指数関数

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, z^n \tag{20}$$

は $z = x + iy$ が複素数の場合でも収束する．無限級数による定義を採用すると，任意の複素数 z, w に対しても指数法則

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w \tag{21}$$

が成立することが証明できる．また，任意の複素数 α と実数 t に対して

$$\frac{d}{dt} e^{\alpha t} = \alpha \cdot e^{\alpha t} \tag{22}$$

が成り立つことも証明できる．

演習 2-6. 複素数の四則演算・絶対値・偏角の定義を述べよ．複素数の四則演算と複素平面の関係を述べよ．

$e := e^1 = \exp 1$ は「自然対数の底」あるいはネイピア数 (Naipier's constant) と呼ばれる．e の値：

$$e = 2.718281828459045235360287471352 \cdots$$

e の性質：(i) 超越数（有理数係数の代数方程式の解にならない）(ii) 連分数表示が美しい：

$$x = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{10 + \ddots}}}}}}}}}}}}}}$$

2.3 微分方程式と指数関数

最も典型的な微分方程式：

$$\frac{d}{dt}f(t) = \alpha\, f(t) \tag{23}$$

解は

$$f(t) = c\, e^{\alpha t} = f(0)\, e^{\alpha t} \tag{24}$$

3 三角関数

3.1 三角関数の定義

結果的には同じ関数を定めるが，見かけや意味の異なる定義が何通りかある．

(i) 微分方程式の解として定める． 2 つの関数 $x(t)$, $y(t)$ で連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y, \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases} \tag{25}$$

$$x(0) = 1, \qquad y(0) = 0 \tag{26}$$

(ii) 指数関数を使って定める．

$$\cos t := \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) \tag{27}$$

$$\sin t := \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) \tag{28}$$

書き換えると，

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \tag{29}$$

(iii) 無限級数を使って定める．

$$\cos\, t := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, t^{2k} = 1 - \frac{1}{2}\, t^2 + \frac{1}{4!}\, t^4 - \frac{1}{6!}\, t^6 + \cdots \tag{30}$$

$$\sin\, t := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, t^{2k+1} = t - \frac{1}{3!}\, t^3 + \frac{1}{5!}\, t^5 - \frac{1}{7!}\, t^7 + \cdots \tag{31}$$

演習 2-7.

1. 三角関数の定義は何通りかあるが，一つの定義から他の定義を導けるか？

2. $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ を証明せよ．

3. $\cos t$, $\sin t$ の幾何学的意味を説明せよ（なぜこれらが三角関数あるいは円関数と呼ばれるか説明せよ）．

4. 指数関数の指数法則から三角関数の加法定理を導け.

5. 実数 ρ, θ に対して

$$e^{\rho+i\theta} = e^{\rho}(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{32}$$

が成立するが，これの図形的意味を考えよ.

6. z が複素数で $z = e^w$ であることを $\log z = w$ と書くが，z の一つの値に対して $z = e^w$ となるような w は無数にある（無限にたくさんある）ことを示せ.

3.2　微分方程式と三角関数

典型的な微分方程式：実数 ω に対し，

$$\frac{d^2}{dt^2} f(t) = -\omega^2 f(t) \tag{33}$$

解は

$$f(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t = f(0)\ \cos\omega t + \frac{1}{\omega} f'(0)\ \sin\omega t \tag{34}$$

4　双曲線関数

4.1　双曲線関数の定義

cosh（hyperbolic cosine と読む．コッシュと読む人もいる），
sinh（hyperbolic sine と読む．シンチと読む人もいる），
tanh（hyperbolic tangent と読む．タンチと読む人もいる）

$$\cosh t := \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \tag{35}$$

$$\sinh t := \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \tag{36}$$

$$\tanh t := \frac{\sinh t}{\cosh t} \tag{37}$$

演習 2-8.

1. $\cosh t$, $\sinh t$, $\tanh t$ のグラフを描け.

2. $x(t) = \cosh t$, $y(t) = \sinh t$ が満たす 1 階の微分方程式を導け．また，(x, y) 平面にその相流を描け.

3. 任意の t に対して $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ が成り立つことを証明せよ.

4. $\cosh t$, $\sinh t$ を無限級数で表せ.

5. 実数 α, β に対して，$\cosh(\alpha+\beta)$, $\sinh(\alpha+\beta)$ を $\cosh\alpha$, $\cosh\beta$, $\sinh\alpha$, $\sinh\beta$ で表せ（双曲線関数の加法定理）.

6. これらの関数が双曲線関数と呼ばれる理由を述べよ.

4.2 複素数・グラスマン数・クリフォード数

・複素数 (complex number)：単位虚数 $i = \sqrt{-1}$ すなわち

$$i^2 = -1 \tag{38}$$

となるシンボル i を導入して，実数 x, y に対して $z = x + iy$ を複素数と呼び，加減乗除の四則演算を定める．

・グラスマン (Grassmann) 数：単位グラスマン数 ε として

$$\varepsilon^2 = 0 \tag{39}$$

となるシンボル ε を導入して（ε は 0 ではないと約束する），実数 x, y に対して $z = x + \varepsilon y$ をグラスマン数と呼び，和差積を定める．グラスマン数の和や積：

$$(a + \varepsilon b) + (c + \varepsilon d) = (a + c) + \varepsilon(b + d) \tag{40}$$

$$(a + \varepsilon b) \times (c + \varepsilon d) = ac + \varepsilon(ad + bc) \tag{41}$$

・クリフォード (Clifford) 数：単位クリフォード数 ν として

$$\nu^2 = 1 \tag{42}$$

となるシンボル ν を導入して（ν は ± 1 ではないと約束する），実数 x, y に対して $z = x + \nu y$ をクリフォード数と呼ぶ．クリフォード数の和や積：

$$(a + \nu b) + (c + \nu d) = (a + c) + \nu(b + d) \tag{43}$$

$$(a + \nu b) \times (c + \nu d) = ac + bd + \nu(ad + bc) \tag{44}$$

演習 2-9. 上に導入したグラスマン数・複素数・クリフォード数を用いると，三角関数と双曲線関数の類似性が見やすくなる．以下の問題を解いてみよ．

1. 次の行列について $E^2 = 0$, $J^2 = -I$, $N^2 = I$ が成り立つことを示せ．

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{45}$$

2. 指数関数は無限級数による定義 (19) を採用する．ε は単位グラスマン数，ν は単位クリフォード数とする．実数 t に対して以下の式が成り立つことを示せ．

$$e^{\varepsilon t} = 1 + \varepsilon t \tag{46}$$

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \tag{47}$$

$$e^{\nu t} = \cosh t + \nu \sinh t \tag{48}$$

3. 任意の実数 s, t に対して以下の関係式が成り立つことを示せ.

$$e^{\varepsilon(s+t)} = e^{\varepsilon s} \cdot e^{\varepsilon t} \tag{49}$$

$$e^{\nu(s+t)} = e^{\nu s} \cdot e^{\nu t} \tag{50}$$

4. t を正の実数とし，xy 座標平面において，直線 $x = 1$ の上に点 A$= (1, 0)$ と点 P$= (1,\, t)$ をとる. 原点 O$= (0, 0)$ とするとき，線分 OA, AP, OP で囲まれる図形の面積を求めよ.

5. t を正の実数とし，xy 座標平面において，円周 $x^2 + y^2 = 1$ の上に点 A$= (1, 0)$ と点 P$= (\cos\, t, \sin\, t)$ をとる. 原点 O$= (0, 0)$ とするとき，線分 OA と円の弧 AP と線分 OP で囲まれる図形の面積を求めよ.

6. t を正の実数とし，xy 座標平面において，双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の上に点 A$= (1, 0)$ と点 P$= (\cosh\, t, \sinh\, t)$ をとる. 原点 O$= (0, 0)$ とするとき，線分 OA と双曲線の一部分の弧 AP と線分 OP で囲まれる図形の面積を求めよ.