物質情報学 2（物理数学）　担当 谷村　平成 24 年度前期

ノート 3：斉次定数係数線形微分方程式

Linear differential equations with constant coefficients

1　微分方程式の言葉づかい

実数の関数 $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ t\mapsto u(t)$ の**導関数** (derivatives) を

$$\frac{du}{dt}=\dot{u}(t)=Du, \qquad \frac{d^2u}{dt^2}=\ddot{u}(t)=D^2u, \qquad \frac{d^nu}{dt^n}=u^{(n)}(t)=D^nu \tag{1}$$

などと書く.

***n* 階の微分方程式**とは，ある関数 $\Phi(t,v_0,v_1,\cdots,v_n)$ が与えられたとき，

$$\Phi\Big(t,u(t),\dot{u}(t),\cdots,u^{(n)}(t)\Big)=0 \tag{2}$$

を満たすような関数 $u(t)$ を求めよという問題のことをいう.

例：ロジスティック方程式

$$\frac{dN}{dt}-\gamma_0\left(1-\frac{N}{N_\infty}\right)N=0 \tag{3}$$

は，関数

$$\Phi(v_0,v_1)=v_1-\gamma_0\left(1-\frac{v_0}{N_\infty}\right)v_0 \tag{4}$$

に $v_0=N(t),\ v_1=\dot{N}(t)$ を代入して $\Phi(N(t),\dot{N}(t))=0$ としたものに他ならない.

一般に一つの微分方程式の解は一つとは限らない．一つ一つの解を**特解** (special solution) という．与えられた微分方程式の解をすべて書き尽くすことを**一般解** (general solution) **を求める**という.

また，$t=0$ における初期条件 (initial condition) $u(0)=u_0,\ \dot{u}(0)=u_1,\ \ddot{u}(0)=u_2$ などを課すと，初期条件と微分方程式の両方を満たすような解 $u(t)$ が限定される．そのような解を求めることを**初期値問題** (initial value problem) **を解く**という．ただし，条件の数が多すぎると，すべての条件と微分方程式を満たすような関数が存在しなくなってしまうことがある.

2　線形代数方程式

方程式

$$(2,1)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=3 \qquad \text{同じことだが,} \qquad 2x+y=3 \tag{5}$$

の一般解は

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} \tag{6}$$

である．ここで a は任意の実数.

演習 3-1. 次の代数方程式の一般解を求めよ．

$$\text{(i)} \qquad (3,2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \qquad \text{同じことだが,} \qquad 3x+2y=4 \tag{7}$$

$$\text{(ii)} \qquad (3,1,2)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 6 \qquad \text{同じことだが,} \qquad 3x+y+2z=6 \tag{8}$$

$$\text{(iii)} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{同じことだが,} \qquad \begin{cases} 3x+y+2z=4 \\ x+z=1 \end{cases} \tag{9}$$

演習 3-2. 「ベクトル空間（線形空間）」,「線形結合」,「線形独立（一次独立）」,「線形従属（一次従属）」,「基底」,「次元」の定義を述べよ．

3 線形微分方程式

例題：ばねダンパ系，LCR 回路（インダクタンス，キャパシタンス，レジスタンス）

線形微分方程式 (linear differential equation) はすべての微分方程式の基礎であり，その中でも**定数係数** (constant coefficient) の線形微分方程式は必ず解けるようにしておくべきものである．

既知関数 $f(t)$ が与えられているものとし，$c_1, \cdots, c_n$ を係数とする **n 階の線形微分方程式** (n-th order linear differential equation)

$$D^n u + c_1 D^{n-1} u + c_2 D^{n-2} u + \cdots + c_{n-1} Du + c_n u = f \tag{10}$$

を解く．$f(t) \equiv 0$（恒等的にゼロ, identically zero）のとき (10) は**斉次**（せいじ）(homogeneous) **方程式**であるという．$f(t) \not\equiv 0$ のとき**非斉次** (inhomogeneous) **方程式**という．

n 階の線形微分方程式は n 個の初期条件 $u(0)=u_0$, $\dot{u}(0)=u_1, \cdots$, $u^{(n-1)}(0)=u_{n-1}$ を課すと解が一意的に決まることが知られている．

定理 1：斉次方程式 (10) の解空間は n 次元 (n dimensions) である．つまり $f(t) \equiv 0$ の場合，(10) の解は線形独立なものが $\psi_1(t), \cdots, \psi_n(t)$ と n 個あり，一般解はそれらの線形結合 (linear combination)

$$u_{\text{homo}}(t) = a_1\psi_1(t) + a_2\psi_2(t) + \cdots + a_n\psi_n(t) \tag{11}$$

で作られる．ここで $a_1, \cdots, a_n$ は任意の定数.

定理 2：$f(t) \not\equiv 0$ のときの非斉次方程式 (10) の解 $u_{\text{inh}}(t)$ が一つあれば，非斉次方程式 (10) の他の解は,

$$u(t) = u_{\text{inh}}(t) + u_{\text{homo}}(t) = u_{\text{inh}}(t) + a_1\psi_1(t) + a_2\psi_2(t) + \cdots + a_n\psi_n(t) \tag{12}$$

で得られる．標語的に言えば**（非斉次の一般解）＝（非斉次の特解）＋（斉次の一般解）**．

以上の定理により，方程式 (10) の一般解を求めたければ，斉次方程式の独立な解を n 個 $\{\psi_1(t), \cdots, \psi_n(t)\}$ と，非斉次方程式の非自明な解 $u_{\text{inh}}(t)$ を 1 個求めればよいことがわかる．また，初期値問題を解きたければ，初期条件に合うように定数 $a_1, \cdots, a_n$ を調整すればよい．

4 定数係数斉次線形微分方程式を解く手順

定数係数の斉次線形微分方程式に対しては，ほぼ万能な解法がある．

1. $u(t) = e^{\lambda t}$ を斉次微分方程式 (10) に代入する．λ は未定の定数であり，複素数かもしれない．

2. 指数関数の微分の性質

$$Du = \frac{d}{dt}\, e^{\lambda t} = \lambda\, e^{\lambda t} = \lambda\, u, \qquad D^2 u = \lambda^2\, u, \qquad D^n u = \lambda^n\, u \tag{13}$$

を使うと方程式 (10) は

$$(\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n)\, u = 0 \tag{14}$$

となる（いま $f \equiv 0$ の問題を扱っている）．$u(t) \equiv 0$ は (10) の解ではあるが，それは当たり前の解 (**自明解** trivial solution) であり，恒等的に 0 ではない解を求めたいと思っているので，$u \neq 0$ とすると，

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n = 0 \tag{15}$$

を得る．この式の左辺は λ についての多項式になっているが，これを微分方程式 (10) の**特性多項式** (characteristic polynomial) という．

3. 因数分解や解の公式を使って代数方程式 (15) を解き，根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ を得る．これらの根が実数か複素数か，また重根があるかないかによって，場合分けが必要になる．

   (a) 根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ がすべて互いに異なる実数根の場合：

$$\psi_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \qquad \psi_2(t) = e^{\lambda_2 t}, \quad \cdots, \quad \psi_n(t) = e^{\lambda_n t} \tag{16}$$

   は線形独立であり，

$$u_{\text{homo}}(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + a_n e^{\lambda_n t} \tag{17}$$

   が斉次方程式 (10) の一般解になる．

   (b) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ がすべて実数だが，$\lambda_1 = \lambda_2$ が重根になっている場合：ψ_1, ψ_2 は同じものであり，(16) は線形独立ではなくなってしまうので，これらでは一般解を作ることができない．この場合は $\psi_2(t) = t\, e^{\lambda_1 t}$ とおいたものも (10) の解であることが確かめられて，

$$u_{\text{homo}}(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2\, t\, e^{\lambda_1 t} + a_3 e^{\lambda_3 t} + \cdots + a_n e^{\lambda_n t} \tag{18}$$

   が斉次方程式 (10) の一般解になる．

   (c) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ がすべて実数だが，$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ が重根になっている場合：この場合は $\psi_2(t) = t\, e^{\lambda_1 t}$, $\psi_3(t) = t^2\, e^{\lambda_1 t}$ とおいたものも (10) の解であることが確かめられて，

$$u_{\text{homo}}(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2\, t\, e^{\lambda_1 t} + a_3\, t^2\, e^{\lambda_1 t} + a_4 e^{\lambda_4 t} + \cdots + a_n e^{\lambda_n t} \tag{19}$$

   が斉次方程式 (10) の一般解である．この調子で，重根の多重度が増えていくと，それにつれて高い次数の t の多項式を $e^{\lambda t}$ に掛け算したものが新たな独立解になる．

(d) $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ が複素共役根で，他の $\lambda_3, \cdots, \lambda_n$ がすべて互いに異なる実数根になっている場合：一般解は (17) だと言ってよいのだが，このままだと，元の問題は実数だけで書けているのに，解は複素数のように見えて見栄えが悪いので，

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t} &= e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}\, e^{i\beta t} = e^{\alpha t}\,(\cos\beta t + i\sin\beta t) \\ e^{\lambda_2 t} &= e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}\, e^{-i\beta t} = e^{\alpha t}\,(\cos\beta t - i\sin\beta t) \end{aligned} \tag{20}$$

であることを利用して，

$$\begin{aligned} a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} &= a_1\, e^{\alpha t}\,(\cos\beta t + i\sin\beta t) + a_2\, e^{\alpha t}\,(\cos\beta t - i\sin\beta t) \\ &= (a_1 + a_2)\, e^{\alpha t}\cos\beta t + i(a_1 - a_2)\, e^{\alpha t}\sin\beta t \end{aligned} \tag{21}$$

となるので，$a_1 + a_2 = b_1$, $i(a_1 - a_2) = b_2$ を改めて実数に取り直せば，斉次方程式の一般解 (17) は

$$u_{\text{homo}}(t) = b_1\, e^{\alpha t}\cos\beta t + b_2\, e^{\alpha t}\sin\beta t + a_3 e^{\lambda_3 t} + \cdots + a_n e^{\lambda_n t} \tag{22}$$

となる．

(e) 他にも複素共役根があれば，$\lambda = \alpha + i\beta$ という実部を指数関数，虚部を三角関数で表した項が連なっていく．重根があれば t を掛け算した項が連なっていく．ともかく n 階の線形微分方程式の解は，n 個の線形独立な関数の線形結合になるはず.

例題 1：次の微分方程式の初期値問題を解く：

$$\ddot{u} + 8\dot{u} + 15u = 0 \tag{23}$$

$u(t) = e^{\lambda t}$ を代入して特性多項式を作ると

$$\lambda^2 + 8\lambda + 15 = 0. \tag{24}$$

これは $(\lambda+3)(\lambda+5) = 0$ と因数分解できるから，根は $\lambda = -3, -5$．これらは相異なる実数根．(23) の一般解は

$$u(t) = a_1\, e^{-3t} + a_2\, e^{-5t} \tag{25}$$

である．ここで a_1, a_2 は任意の定数．初期条件

$$\left\{ \begin{aligned} & u(0) = a_1 + a_2 = u_0 \\ & \dot{u}(0) = -3a_1 - 5a_2 = u_1 \end{aligned} \right. \tag{26}$$

を満たすように係数 a_1, a_2 を決めると

$$a_1 = \frac{5}{2}u_0 + \frac{1}{2}u_1, \qquad a_2 = -\frac{3}{2}u_0 - \frac{1}{2}u_1 \tag{27}$$

となる．これらを (25) に代入すれば，(23) の初期値問題の解

$$u(t) = \Big(\frac{5}{2}u_0 + \frac{1}{2}u_1\Big)e^{-3t} + \Big(-\frac{3}{2}u_0 - \frac{1}{2}u_1\Big)e^{-5t} = \frac{1}{2}u_0(5e^{-3t} - 3e^{-5t}) + \frac{1}{2}u_1(e^{-3t} - e^{-5t}) \tag{28}$$

を得る．■

例題 2：次の微分方程式の初期値問題を解く：

$$\ddot{u} + 8\dot{u} + 16u = 0 \tag{29}$$

$u(t) = e^{\lambda t}$ を代入して特性多項式を作ると

$$\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0. \tag{30}$$

これは $(\lambda + 4)^2 = 0$ と因数分解できるから，根は $\lambda = -4$．これは重根になっている．すると (29) の一般解は

$$u(t) = a_1\, e^{-4t} + a_2\, t\, e^{-4t} \tag{31}$$

である．ここで a_1, a_2 は任意の定数．初期条件

$$\begin{cases} u(0) = a_1 = u_0 \\ \\ \dot{u}(0) = -4a_1 + a_2 = u_1 \end{cases} \tag{32}$$

を満たすように係数 a_1, a_2 を決めると

$$a_1 = u_0, \qquad a_2 = 4u_0 + u_1 \tag{33}$$

となる．これらを (31) に代入すれば，(23) の初期値問題の解

$$u(t) = u_0 e^{-4t} + (4u_0 + u_1)\, t\, e^{-4t} = u_0(1 + 4t)e^{-4t} + u_1\, t\, e^{-4t} \tag{34}$$

を得る．■

例題 3：次の微分方程式の初期値問題を解く：

$$\ddot{u} + 8\dot{u} + 25u = 0 \tag{35}$$

$u(t) = e^{\lambda t}$ を代入して特性多項式を作ると

$$\lambda^2 + 8\lambda + 25 = 0. \tag{36}$$

これは $(\lambda + 4)^2 + 9 = 0$ と変形できるから，根は $\lambda = -4 \pm 3i$ という複素根になる．(35) の一般解は

$$u(t) = a_1\, e^{(-4+3i)t} + a_2\, e^{(-4-3i)t} \tag{37}$$

または

$$u(t) = b_1\, e^{-4t} \cos 3t + b_2\, e^{-4t} \sin 3t \tag{38}$$

である．ここで b_1, b_2 は任意の定数．初期条件

$$\begin{cases} u(0) = b_1 = u_0 \\ \\ \dot{u}(0) = -4b_1 + 3b_2 = u_1 \end{cases} \tag{39}$$

を満たすように係数 b_1, b_2 を決めると

$$b_1 = u_0, \qquad b_2 = \frac{4}{3}u_0 + \frac{1}{3}u_1 \tag{40}$$

となる．これらを (38) に代入すれば，(35) の初期値問題の解

$$u(t) = u_0\, e^{-4t} \cos 3t + \left(\frac{4}{3}u_0 + \frac{1}{3}u_1\right)e^{-4t} \sin 3t = u_0\, e^{-4t}\left(\cos 3t + \frac{4}{3}\sin 3t\right) + \frac{1}{3}u_1 e^{-4t} \sin 3t \tag{41}$$

を得る．■

演習 3-3. 以下の微分方程式の一般解を求めよ．また，初期条件 $u(0) = u_0$, $\dot{u}(0) = u_1$ を満たす解を求めよ（7 番の方程式に対しては初期条件は $u(0) = u_0$ だけでよい）．また，$u(t)$ のグラフの概形を描いて，方程式と解の挙動について物理的解釈を述べよ．

1. $\ddot{u} + 6\dot{u} + 8u = 0$

2. $\ddot{u} + 6\dot{u} + 9u = 0$

3. $\ddot{u} + 6\dot{u} + 13u = 0$

4. $\ddot{u} + 9u = 0$

5. $\ddot{u} + 6\dot{u} = 0$

6. $\ddot{u} = 0$

7. $\dot{u} + 7u = 0$

演習 3-4. 以下の微分方程式の一般解を求めよ．ただし，$u^{(4)} = \dfrac{d^4u}{dt^4}$

1. $\dddot{u} - 3\ddot{u} - 4\dot{u} + 12u = 0$

2. $u^{(4)} - 16u = 0$

3. $u^{(4)} + 2u^{(2)} + 8u^{(1)} + 5u = 0$

演習 3-5. 複素数係数の微分方程式も，実数係数の微分方程式とほぼ同様の方法で扱える．実数係数の微分方程式の解は実数値関数で書くことができるが，複素数係数の微分方程式の解は複素数値関数になるのが普通であることさえ知っておけばよい．以下の微分方程式の一般解を求めよ．

1. $\dot{u} - (3 + 2i)u = 0$

2. $\ddot{u} - (5 + 2i)\dot{u} + (4 + 2i)u = 0$

3. $\ddot{u} - (3 + i)\dot{u} + (14 + 5i)u = 0$