物質情報学 2（物理数学）　担当 谷村　平成 24 年度前期

ノート 4：非斉次定数係数線形微分方程式

Inhomogeneous linear differential equations with constant coefficients

1　線形代数方程式

m 行 n 列の行列 A と，n 次元縦ベクトル $\boldsymbol{x}$, m 次元縦ベクトル $\boldsymbol{b}$ が与えられて，

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{1}$$

という式にあてはまる $\boldsymbol{x}$ をすべて求めよ，という問題を考える．$\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ のとき，これは非斉次型 (inhomogeneous) の方程式と呼ばれる．

上の方程式に比して，n 次元縦ベクトル $\boldsymbol{y}$ に対する方程式

$$A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

を斉次型 (inhomogeneous) の方程式と呼ぶ．斉次方程式の著しい性質として「解の重ね合わせ」がある．つまり，ベクトル $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2$ がともに $A\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{0}$ を満たすならば，任意の数 a_1, a_2 に対して $a_1\boldsymbol{y}_1 + a_2\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{y}$ とおいたものも $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ を満たす．従って，一般に，斉次方程式の解は無数にある．

また，非斉次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ にあてはまる $\boldsymbol{x}$ と，斉次方程式 $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ にあてはまる $\boldsymbol{y}$ があれば，$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ とおいたものも $A\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b}$ を満たす．

従って，斉次方程式 $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ にあてはまる $\boldsymbol{y}$ を

$$\boldsymbol{y} = a_1\boldsymbol{y}_1 + \cdots + a_k\boldsymbol{y}_k \tag{3}$$

という形でありったけたくさん求めておいて（このような解を斉次方程式の一般解という），非斉次方程式 $A\boldsymbol{w} = \boldsymbol{b}$ にあてはまる $\boldsymbol{w}$ を一つでもいいから求めておけば（このような解を非斉次方程式の特解という），非斉次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{w} + a_1\boldsymbol{y}_1 + \cdots + a_k\boldsymbol{y}_k \tag{4}$$

という形で求められる．

例題：

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \qquad \text{同じことだが，} \qquad x + 3y - 4z = 2 \tag{5}$$

の一般解を求めよう．まず斉次方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \tag{6}$$

を考えると，これの一般解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

である（答えの書き方はただ一通りではない）．非斉次方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \tag{8}$$

の特解は，あてずっぽうでもよければ一つくらいは見つかる．例えば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

はたしかに方程式 (8) にあてはまる．以上より，非斉次方程式 (8) の一般解は，非斉次方程式の特解と斉次方程式の一般解を足した

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

で与えられる．

演習 4-1. 上の例題の幾何学的意味を考えよ．

2 非斉次微分方程式

未知関数 (unknown function) $u(t)$ と既知関数 (known function) $f(t)$ に対し，$c_1, \cdots, c_n$ を係数とする n 階の線形微分方程式

$$D^n u + c_1 D^{n-1} u + c_2 D^{n-2} u + \cdots + c_{n-1} D u + c_n u = f \tag{11}$$

を考える．$f(t)$ が恒等的に 0 ではないとき非斉次 (inhomogeneous) 方程式という．

$$（非斉次の一般解） = （非斉次の特解）+（斉次の一般解）$$

という形で非斉次方程式の一般解は求められる．前回で斉次方程式の一般解の求め方はわかったので，今回は非斉次の特解の求め方をマスターしよう．

演習 4-2. 以下の微分方程式の一般解と初期値問題の解を求めよ．まずは非斉次方程式の特解を「当て推量（あてずっぽう）」で見つける試行関数の方法でやってみる．そのあと,（この後に習う）畳み込み積分の公式を用いて解いてみよ．

(1) $(D^2 + 8\,D + 12)u = e^{3t}$

(2) $(D^2 + 8\,D + 12)u = e^{-6t}$

(3) $(D^2 + 8\,D + 20)u = \cos 3t$

(4) $(D^2 + 16)u = \sin 4t$

3 非斉次微分方程式をいじってみる

一般的な解法を説明する前に，感触を得るために簡単な非斉次方程式をいくつか解いて見よう．

例 1. $Du = 1$

解：$u(t) = t + a$ （a は任意の定数であり，$Du = 0$ の一般解.）

例 2. $D^2u = 1$

解：$u(t) = \frac{1}{2}t^2 + a_1 + a_2 t$ （a_1, a_2 は任意の定数であり，$u_h(t) = a_1 + a_2 t$ は $D^2u = 0$ の一般解.）

例 3. $Du = f(t)$

解：両辺を積分すると，

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \frac{du}{ds}\,ds &= \int_0^t f(s)ds \\
u(t) - u(0) &= \int_0^t f(s)ds \\
u(t) &= \int_0^t f(s)ds + u(0)
\end{aligned}
$$

（非斉次方程式の一般解）＝（非斉次方程式 $Du = f$ の特解）＋（斉次方程式 $Du = 0$ の一般解）という形になっている．任意定数 $u(0)$ は初期条件で決まる．

例 4. $(D - \alpha)u = f(t)$（α は定数）

解：関数 $f(t), g(t)$ の積の微分に対して $D(fg) = (Df)g + f(Dg)$ が成り立つ (Leibniz rule). また，指数関数の微分は $De^{\alpha t} = \alpha\, e^{\alpha t}$ である．$u(t) = e^{\alpha t}\, v(t)$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
Du &= D(e^{\alpha t}\, v) = D(e^{\alpha t})\, v + e^{\alpha t} Dv = \alpha\, e^{\alpha t}\, v + e^{\alpha t} Dv = \alpha\, u + e^{\alpha t} Dv \\
(D - \alpha)u &= e^{\alpha t} Dv
\end{aligned}
$$

となるので，問題の方程式は

$$
\begin{aligned}
e^{\alpha t} Dv &= f(t) \\
Dv &= e^{-\alpha t}\, f(t)
\end{aligned}
$$

となる．これは例 3 の問題と同型であり，解は

$$
v(t) = \int_0^t e^{-\alpha s}\, f(s)ds + v(0)
$$

となる．$u(t) = e^{\alpha t}\, v(t)$ とおいたので，$u(0) = v(0)$ であり，

$$
u(t) = e^{\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha s}\, f(s)ds + v(0)\, e^{\alpha t} = \int_0^t e^{\alpha(t-s)}\, f(s)ds + u(0)\, e^{\alpha t}
$$

が解．第 2 項 $u(0)\, e^{\alpha t}$ は斉次方程式 $(D - \alpha)u = 0$ の一般解（じつは初期値問題の解）になっており，この式は（非斉次の一般解）＝（非斉次の特解）＋（斉次の一般解）という形になっている．

例 5. $(D-\alpha)^2 u = f(t)$（α は定数）

解：Leibniz rule を繰り返し適用することにより,

$$
\begin{aligned}
(D-\alpha)e^{\alpha t}v &= e^{\alpha t}Dv \\
(D-\alpha)(D-\alpha)e^{\alpha t}v &= (D-\alpha)(e^{\alpha t}Dv) = e^{\alpha t}D^2 v
\end{aligned}
$$

となるので，$u(t) = e^{\alpha t}\, v(t)$ とおくと問題の方程式は

$$
\begin{aligned}
e^{\alpha t}D^2 v &= f(t) \\
D^2 v &= e^{-\alpha t}\, f(t)
\end{aligned}
$$

となる．解は

$$
v(t) = \int_0^t ds \int_0^s ds' e^{-\alpha s'}\, f(s') + a_1 + a_2 t
$$

となる．$u(t) = e^{\alpha t}\, v(t)$ とおいたので，解は

$$
u(t) = e^{\alpha t} \int_0^t ds \int_0^s ds' e^{-\alpha s'}\, f(s') + (a_1 + a_2 t)e^{\alpha t}.
$$

二重積分の項は非斉次方程式の特解であり，後述の方法を用いれば，この二重積分は一重積分に書き直すことができる．また，斉次方程式の一般解は $a_1 e^{\alpha t} + a_2 t\, e^{\alpha t}$ となっており，これは前回の重根を持つ斉次方程式の一般解を再現している．

4 畳み込み積分

例 4 に現れた積分は，非斉次方程式を解いたときに繰り返し現れる積分なので，名前が付けられており，その性質も詳しく調べられている：

定義：畳み込み積分，結合積 (convolution)：$t \geq 0$ に対して定義されている関数 $f(t), g(t)$ の畳み込み積を

$$
(g * f)(t) := \int_0^t ds\, g(t-s) f(s) \tag{12}
$$

で定義する．積分の範囲が $0 \leq s \leq t$ であることに注意せよ．

演習 4-3. 以下の関係式を証明せよ.

(1) $(f * g)(0) = 0$

(2) $(f * g)(t) = (g * f)(t)$

(3) $(h * (g * f))(t) = ((h * g) * f)(t)$

(4) $\dfrac{d}{dt}(g * f)(t) = g(0)\, f(t) + (g' * f)(t)$

(5) $g * (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 (g * f_1) + \lambda_2 (g * f_2)$ (λ_1, λ_2 は任意の定数)

指数関数に多項式を掛けた関数もしばしば現れるので，それに対する記号を決めておく：

記法：複素数 (complex number) α と自然数 (natural number) n に対して

$$
\phi_{\alpha,n}(t) := \frac{1}{(n-1)!}\, t^{n-1}\, e^{\alpha t} \tag{13}
$$

とおく．とくに，

$$\phi_{\alpha,1}(t) = e^{\alpha t}, \qquad \phi_{\alpha,2}(t) = t\,e^{\alpha t}, \qquad \phi_{\alpha,3}(t) = \frac{1}{2}t^2\,e^{\alpha t}, \qquad \phi_{\alpha,4}(t) = \frac{1}{6}t^3\,e^{\alpha t}, \tag{14}$$

$$\phi_{0,1}(t) = 1, \qquad \phi_{0,2}(t) = t, \qquad \phi_{0,3}(t) = \frac{1}{2}t^2, \qquad \phi_{0,4}(t) = \frac{1}{6}t^3. \tag{15}$$

これらの記号を使うと例題 4 の結果は次のようにまとめられる：

定理：$(D-\alpha)u = f(t)$（α は定数）の初期値問題の解は

$$u(t) = (\phi_{\alpha,1} * f)(t) + u(0)\,\phi_{\alpha,1}(t) \tag{16}$$

そうすると，2 階の微分方程式 $(D^2 + c_1 D + c_2)u = f$ なども $(D-\beta)(D-\alpha)u = f$ という形に因数分解できれば，公式 (16) を繰り返し適用することにより，

$$\begin{aligned}
(D-\beta)(D-\alpha)u &= f \\
(D-\alpha)u &= \phi_{\beta,1} * f + ((D-\alpha)u)(0)\,\phi_{\beta,1} \\
u &= \phi_{\alpha,1} * \{\phi_{\beta,1} * f + (\dot{u}(0) - \alpha u(0))\phi_{\beta,1}\} + u(0)\phi_{\alpha,1} \\
&= \phi_{\alpha,1} * (\phi_{\beta,1} * f) + (\dot{u}(0) - \alpha u(0))\phi_{\alpha,1} * \phi_{\beta,1} + u(0)\phi_{\alpha,1} \\
&= (\phi_{\alpha,1} * \phi_{\beta,1}) * f + (\dot{u}(0) - \alpha u(0))\phi_{\alpha,1} * \phi_{\beta,1} + u(0)\phi_{\alpha,1} \qquad (17)
\end{aligned}$$

といった具合に形式的に解くことができる．後は $\phi_{\alpha,1} * \phi_{\beta,1}$ などがどんな関数になるか知っていればよい．

演習 4-4. 以下の関係式を証明せよ．

$$\begin{aligned}
&(\text{公式 } 1) \quad \phi_{\alpha,1} * \phi_{\alpha,n} = \phi_{\alpha,n+1} \\
&(\text{公式 } 2) \quad \phi_{\alpha,1} * \phi_{\beta,1} = \frac{\phi_{\alpha,1} - \phi_{\beta,1}}{\alpha - \beta} \qquad (\alpha \neq \beta)
\end{aligned}$$

上で証明した公式を繰り返し使えば，多重の畳み込み積も，積分を計算せずに，形式的に計算できる．例えば，$\alpha \neq \beta$ のとき

$$\begin{aligned}
\phi_{\alpha,1} * \phi_{\beta,2} &= \phi_{\alpha,1} * \phi_{\beta,1} * \phi_{\beta,1} \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}(\phi_{\alpha,1} - \phi_{\beta,1}) * \phi_{\beta,1} \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\phi_{\alpha,1} * \phi_{\beta,1} - \frac{1}{\alpha-\beta}\phi_{\beta,1} * \phi_{\beta,1}
\end{aligned}$$

から，

$$(\text{公式 } 3) \quad \phi_{\alpha,1} * \phi_{\beta,2} = \frac{\phi_{\alpha,1} - \phi_{\beta,1}}{(\alpha-\beta)^2} - \frac{\phi_{\beta,2}}{\alpha-\beta}$$

という公式を得る．

演習 4-5. 以下の関係式を証明せよ．

$$\begin{aligned}
&(\text{公式 } 4) \quad \phi_{\alpha,1} * \phi_{\beta,3} = \text{（自分で求めよ）} \\
&(\text{公式 } 5) \quad \phi_{\alpha,2} * \phi_{\beta,2} = \text{（自分で求めよ）} \\
&(\text{公式 } 6) \quad (D-\alpha)\phi_{\alpha,1} = \frac{d}{dt}\phi_{\alpha,1} - \alpha\,\phi_{\alpha,1} = 0 \\
&(\text{公式 } 7) \quad (D-\alpha)\phi_{\alpha,n} = \phi_{\alpha,n-1} \qquad (n = 2, 3, 4, \cdots)
\end{aligned}$$

注意：三角関数 (trigonometric functions) は

$$\cos\,\omega t = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) = \frac{1}{2}(\phi_{i\omega,1} + \phi_{-i\omega,1}), \tag{18}$$

$$\sin\,\omega t = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) = \frac{1}{2i}(\phi_{i\omega,1} - \phi_{-i\omega,1}) \tag{19}$$

と表される．

注意：畳み込み積分の計算は面倒で間違えやすい．積分計算は避けて，なるべく (公式 1), (公式 2) を活用し，すべて代数演算だけで済ませた方が間違えにくい．

以上をまとめると，2 階微分方程式の初期値問題の解 (17) は，$\alpha \neq \beta$ の場合，

$$u = (\phi_{\alpha,1} * \phi_{\beta,1}) * f + u(0)\,\frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha\phi_{\beta,1} - \beta\phi_{\alpha,1}) + \dot{u}(0)\,\frac{1}{\alpha-\beta}(\phi_{\alpha,1} - \phi_{\beta,1}) \tag{20}$$

$\alpha = \beta$ の場合，

$$u = (\phi_{\alpha,1} * \phi_{\alpha,1}) * f + u(0)(\phi_{\alpha,1} - \alpha\,\phi_{\alpha,2}) + \dot{u}(0)\,\phi_{\alpha,2} \tag{21}$$

となる．つまり，

$$
\begin{aligned}
&（与えられた初期条件 u(0), \dot{u}(0) を満たす非斉次方程式の解）\\
&=（初期条件 u(0) = \dot{u}(0) = 0 を満たす非斉次方程式の特解）\\
&\quad +（与えられた初期条件 u(0), \dot{u}(0) を満たす斉次方程式の解）
\end{aligned}
$$

となっている．初期条件に合わせる必要がなく，たんに一般解を求めたいだけなら，

$$
\begin{aligned}
(D-\beta)(D-\alpha)u &= f \\
u &= (\phi_{\alpha,1} * \phi_{\beta,1}) * f + c_1\phi_{\alpha,1} + c_2\phi_{\beta,1} \quad (\alpha \neq \beta \text{の場合}) \qquad (22)\\
u &= (\phi_{\alpha,1} * \phi_{\alpha,1}) * f + c_1\phi_{\alpha,1} + c_2\phi_{\alpha,2} \quad (\alpha = \beta \text{の場合}) \qquad (23)
\end{aligned}
$$

を公式として用いてよい．

畳み込み積を用いたこの解法は面倒だが，機械的に計算すれば必ず答えが出る方法である．これ以外も非斉次方程式を解く方法は，**試行関数法**（答えの形を推定して，未定係数の入った関数を解の候補を作り，微分方程式に代入し，その関数が本当に解になるように係数を決める．答えを出すにはこの方法が一番早い），**定数変化法**（形式的には最も一般的な方法，定数係数ではなく関数係数の方程式に対しても使える），**ラプラス変換**（かえって計算が面倒になる方法であり，あまりお勧めできない）など，いろいろある．一つの方法だけに頼らずに，問題に応じて適切なやり方を見い出せるようになってほしい．

演習 4-6. 以下の微分方程式の初期値問題を解け．ただし，最終的な答えは実数のみを使って書き表せ．また，最終的な答えを書くときは $\phi_{\alpha,n}$ という記号は使わず，e^{2t}, $\cos 3t$ といった形で解をできるだけ具体的に書け.

(1) $(D-3)u = e^{2t}$

(2) $(D-4)u = e^{4t} + 6\,e^{t}$

(3) $(D-3)u = t + 5\,t^2$

(4) $(D^2 + 10\,D + 24)u = e^{-3t}$

(5) $(D^2 + 10\,D + 25)u = e^{-3t}$

(6) $(D^2 + 10\,D + 29)u = e^{-3t}$

(7) $(D^2 + 9)u = \cos\,2t + \sin\,3t$

(8) $(D^2 + 9)u = t\,\sin\,3t$

(9) $(D^3 - 7D^2 + 14D - 8)u = e^{3t} + e^{4t}$