物理学基礎 II（電磁気学），担当 谷村省吾，講義ノート 1

電場

クーロンの法則

真空中に 2 つの点電荷があるとする．それぞれの電荷量は Q_1, Q_2 とし，それぞれの位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ とする．このとき $\boldsymbol{r}_1$ を始点とし，$\boldsymbol{r}_2$ を終点とするベクトルを $\boldsymbol{r} = (x, y, z) = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ とおき，その長さを $r = ||\boldsymbol{r}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とおくと，電荷 Q_2 は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \frac{\boldsymbol{r}}{r} \\ &= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \, ||\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1||^2} \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{||\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1||} \end{aligned} \tag{1}$$

の力を受ける．すなわち，**点電荷は互いに斥力（反発力）または引力を及ぼし合う．電荷の符号が同じなら斥力，電荷の符号が逆なら引力を及ぼし合う．力の向きは 2 つの点電荷を結ぶ直線に沿っている．力の大きさは，それぞれの電荷量に比例し，電荷間の距離の 2 乗に反比例する．** これを**クーロンの法則** (Coulomb’s law) という．

ε_0 は真空の誘電率と呼ばれる定数で，

$$\varepsilon_0 = 8.854187817 \cdots \times 10^{-12}\,\mathrm{N^{-1}C^2m^{-2}} \tag{2}$$

である．また，

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.987552 \cdots \times 10^9\,\mathrm{NC^{-2}m^2} \tag{3}$$

はクーロン定数と呼ばれる．

問 1．プラスチック板をこすって静電気をためたら，静電気で紙片を吸い上げることができた．紙片に働く重力に逆らって紙片を持ち上げたことから，プラスチックにたまっている電荷量を推定せよ．

問 2．クーロンの法則を対称性の観点から分析せよ．

場の導入

クーロンの法則は 2 つの電荷の間に働く力についての法則だが，考え方を次のように変える．位置 $\boldsymbol{r}_1$ に置かれた電荷 Q_1 が，その周りの空間に電場 $\boldsymbol{E}$ というものを作り，位置 $\boldsymbol{r}_2$ に置かれた電荷 Q_2 は

$$\boldsymbol{F} = Q_2 \boldsymbol{E} \tag{4}$$

の力を受ける，と考える．そのためには

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 \, ||\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1||^2} \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{||\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1||} \tag{5}$$

でなくてはならない．いましたことは，(1) という一つの式を，電場を仲立ちにして (4) と (5) という二段階の式に分けて書いただけである．考え方としては，(5) は電荷がどんな電場を作るか決める式であり，(4) は電場が電荷にどんな影響を及ぼすか決める式である．詳しく言うと，位置 $\boldsymbol{r}_1$ に置かれた電荷 Q_1 が $\boldsymbol{r}_2$ の場所に作る電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_2)$ が (5) で与えられる．$\boldsymbol{r}_2$ の所に電荷を置かなくてもそこには電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_2)$ ができていると考えるのがミソである．

経験事実と理論

電気は捉えにくい概念（考え，アイディア）である.「塩」とか「光」は，その正体は何かと考え出すと本気で納得するのは難しいが,「これが塩です」とか「これが光です」といったぐあいに具体的に指し示すことができる．それに対して「これが電気です」というふうに「電気」を直接提示することは難しい．ただ，我々は，静電気や電化製品などを通じて電気が関わる現象を見ることができ，これ

らの現象の背後にある「目に見えない仕組み」のことを我々は電気と呼んでいる，と言った方がよい．

電磁気学は，電気と磁気の関わる物理現象の法則性を調べる物理学の一分野である．その目的のために電磁気学は経験可能な現象の背後にある抽象的な理論概念を扱う．電磁気学が扱う理論概念の例としては「電荷」,「電流」,「電場」,「磁場」,「ポテンシャル」などがある．これらの概念は人間の気まぐれな考え事ではなく，ある規則で関係し合っており，しかも現実世界で起こる現象と照らし合わせることができる．

人類は少なくとも 2 千年前には，最も素朴な電気現象である静電気（摩擦電気）を発見し，本格的に電磁気の研究を始めてから 2 百年ほどの年月をかけて電磁気学という理論体系を築き上げた．電磁気学は，何の迷いもなく研究が順調に進んだ結果できたのではなく，思考錯誤の実験や，思い違いと修正を繰り返しながら，ときには素晴らしいアイディアに基づく実験や，天才的思いつきが加えられ，先人が発見した事柄を取捨選択して整理していくうちに立派な理論に育ったものである．

電磁気学は現代の物理学の基本理論として模範的地位を占めているし，応用面でもこれほど成功した物理理論はないと思えるほどの成功を収めている．携帯電話もテレビも衛星放送も GPS もパソコンも電子レンジも冷蔵庫も電車も蛍光灯も発電所も送電施設も，すべて電気の知識を応用して作られ動いて人類の役に立っている．

このような現実を鑑みると，すべての大学生はこの社会で生きて行くための基礎的素養として電磁気学を学ぶべきだと私は思う．とくに理系の学生であれば，数学を使ってきっちりと隙のない形で電磁気学を修得すべきだと思う．

そんなわけで，この講義では電磁気学を記述する上で必要な数学の道具を取り揃えた上で，電磁気学の法則を紛れのない数式の形で提示しようと思う．また，電磁気学の学習を通して，さまざまな概念の物理的意味をよく理解してほしいと思う．物理学においては，数式はただの記号列ではなく，現実世界の何かを記述し，現実世界で起こることを予測する文章である．数式の意味を見失うことなく，この世界の仕掛けを理解してほしい．

場と近接作用

電磁気学では，**空間中に場 (field) と呼ばれる物理量が散りばめられている**という考え方をする．物体は場を変化させることがあるし，逆に物体が場から力を受けることもある，遠く離れた物体同士が直接に力を及ぼすのではなく，まず一方の物体が場の変化を引き起こし，そうしてできた場が，別の物体に力を及ぼすという考え方をする．これを近接作用の理論という．それに対して，遠く離れた物体が，途中に何の媒介物もなしに，直接，力を及ぼし合うという考え方を遠隔作用の理論という．

例えば，重力（万有引力）とは，質量を持った物体同士が引き合う力だが，近接作用という考え方では，一方の物体が，その周りに重力場という空間のひずみのような状態を作り出し，もう一方の物体が重力場の中に入ると，重力場から力を受けると考える．

3 次元空間中の位置（座標）を $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ で表し，時刻を t で表すと，場は $f(\boldsymbol{r}, t)$ という関数で表される．これは，時刻 t に空間の点 $\boldsymbol{r}$ という位置に $f(\boldsymbol{r}, t)$ という値の物理量がある，ということを表している．ただし，場が時間的に変化しない場合や，時刻を止めて考える場合には，$f(\boldsymbol{r})$ と書く．

場にはスカラー場とベクトル場の 2 種類がある．スカラー場は一つの実数で値を表せる場であり，例えば $\phi(\boldsymbol{r}, t)$ と書かれる．気体の温度や圧力や密度などがスカラー場の例である．

ベクトル場は 3 次元ベクトルで値を表せる場であり，例えば $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ と書かれる．ここで $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ も 3 次元ベクトルである．例えば，気

体や液体の流れは，流速ベクトル場を定める．また，重力場は，空間の各点における重力加速度ベクトルで特徴づけられるので，ベクトル場 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r})$ である．

電荷

唐突だが，**電荷** (electric charge) というものがあることは認めてもらう．ものの重さ・質量があるように,「電荷量」という「電気の量」がある．ただし，質量にはプラスの質量だけがあって，マイナスの質量はないが，電荷にはプラスの量もマイナスの量もある．質量は kg（キログラム）という単位で測られる約束になっているが，電荷は C（クーロン）という単位で測られる．

電荷の「ありよう」はさまざまである．空間中にぽつりぽつりと点状に浮いている電荷もあるし，平面的なプラスチックのシートにくっついている電荷もある．人間の体にたまっている静電気もある．車のバッテリーのような液体の中に存在している電荷もある．ともかく，電荷は空間中のどこかに分布している電荷の分布の仕方には濃淡があり,「単位体積あたりの電荷量」という概念を定義することができる．これを**電荷密度** (charge density) といい，ρ という記号で表すことが多い．電荷密度の単位は $\mathrm{C \cdot m^{-3}}$ である．定義から言って，

$$\text{電荷密度} \times \text{体積} = \text{電荷} \tag{6}$$

という関係が成り立つ．

曲面の上に分布した電荷に対しては,「電荷面密度＝単位面積あたりの電荷量」という概念が定義できる．電荷面密度の単位は $\mathrm{C \cdot m^{-2}}$ である．当然のことながら，

$$\text{電荷面密度} \times \text{面積} = \text{電荷} \tag{7}$$

という関係が成り立つ．

曲線上に分布した電荷に対しては,「電荷線密度＝単位長さあたりの電荷量」という概念が定義できる．電荷線密度の単位は $\mathrm{C \cdot m^{-1}}$ である．

$$\text{電荷線密度} \times \text{長さ} = \text{電荷} \tag{8}$$

という関係が成り立つ．

電荷については次の法則性がある．一つは**加法性**という法則．電荷 Q_1 と電荷 Q_2 があれば全体の電荷は

$$Q = Q_1 + Q_2 \tag{9}$$

になる.「足し算できるのは当たり前ではないか？」と思われるかもしれない．しかし，例えば，カレーの辛さに「1辛(から)」と「2辛(から)」があったからと言って，

$$1\,\text{辛} + 2\,\text{辛} = 3\,\text{辛}\,? \tag{10}$$

という足し算は，数式として書くことはできても，意味はなさそうである．カレーのスパイスを足し算すのか，それともカレーのソースを混ぜるのかで結果は変わってしまう．また，温度について

$$10\,℃ + 20\,℃ = 30\,℃\,? \tag{11}$$

という足し算もナンセンスである．10 ℃の水と 20 ℃の水を混ぜたら 30 ℃の水ができるわけではない．つまりこの足し算は現実世界の出来事に対応していない．以上の観察から，人間が扱う量には，足し算に意味がある量と，形式的に足し算しても意味のない量があることが見て取れる．電荷の加法則は「電荷は足し算に意味のある量だ」ということを積極的に主張している．

電荷にはもう一つ法則性がある．それは**電荷保存則** (conservation of charge) である．限られた空間において，ある時刻に電荷が散らばっていてそれらの合計電荷を

$$Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n = Q \tag{12}$$

とする．しばらく時間が経って，いろいろな現象，例えば，電池でモーターを動かすとか，静電気がパチパチと音を立てて火花を散らすとか，原子核が分裂するとかが起きたとしても，電荷の総量を測るとさっきの Q に等しい，というのが電荷保存則である．

電荷保存則はエネルギー保存則に並ぶ物理の基本法則である．これまでにどんな実験をやっても電荷を増やすことも減らすこともできなかった，という経験事実を積み重ねた主張が電荷保存則である．今後も永久に電荷保存則は正しいという保証は，ない．しかし，現在の電磁気学の理論から電荷保存則は数学的に導ける．ということは，もしも電荷保存則が成り立たないような実験事実が一つでも見つかったら，今日の電磁気学の理論は破綻してしまう．他にもいくつかの理論的根拠があって，「もしも電荷保存則が間違っていたら今までやっていた物理学が総崩れになってしまう」と言えるくらい電荷保存則は根幹的な法則になっている．

電場

電場のある場所に電荷を置くと，電荷は力を受ける．時刻 t に 3 次元空間のある点 $\boldsymbol{r}$ に，速度ゼロの点電荷 q を置いたとき，点電荷は力

$$\boldsymbol{F} = q\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \tag{13}$$

を受ける．これは時刻 t，場所 $\boldsymbol{r}$ における電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ の定義式でもある．力の単位を N（ニュートン），電荷の単位を C（クーロン）とすれば，電場の単位は $\mathrm{N \cdot C^{-1}}$ である．点電荷 q は電場を測るために試しに置く電荷であり，そのような電荷を試験電荷と呼ぶ．電磁気学の重要な考え方は，試験電荷 q を置かなくてもそこには電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ がある，とみなすことある．

上の文章で，点電荷に「速度ゼロの」という修飾語を付けたのは，点電荷がゼロでない速度で動いていたとしたら，受ける力が変わるからである．電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ がある場所を点電荷 q が速度 $\boldsymbol{v}$ で通過するときは，点電荷は

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{14}$$

という力を受ける．これを**ローレンツ力** (Lorentz force) という．しかし，静電場の理論の範囲では，電荷が動かず，電場は時間変化しないケースだけを扱うので，電場を記述するのに時刻を指定する必要はなく，電場は $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ と書かれる．また，静電場だけを考えるときは，さしあたって磁場 $\boldsymbol{B}$ はゼロとする．

重ね合わせの原理

電場は電荷に力を及ぼすというのが電気力の法則 (13) だが，逆に，電荷はその周囲に電場を作る．電荷の配置しだいでさまざまな電場ができる．例えば，地面も大気も雲も電荷を帯びており，地球の周囲には複雑な電場ができている．しかしどのような複雑な電荷配置・複雑な電場でも共通して成り立つ単純な法則として，**重ね合わせの原理** (principle of superpostion) がある．

ある電荷配置（Q_1 と呼ぼう．それは点電荷でなくてもよい．雲のような複雑な形の，電気を帯びた物体でもよい）が空間中の点 $\boldsymbol{r}$ に作る電場を $\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r})$ とする．また，電荷配置 Q_1 はなくなって，別の電荷配置 Q_2 があったときに点 $\boldsymbol{r}$ にできる電場を $\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r})$ とする．それでは，電荷配置 Q_1 と Q_2 が同時に存在したら，点 $\boldsymbol{r}$ にはどんな電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ ができるか？経験事実によれば，

$$\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{E} \tag{15}$$

が成り立つ．これを重ね合わせの原理という．

さらに，電荷配置 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ が多数多様にあった場合も，それぞれの電荷が作る電場を $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_n$ とすると，すべての電荷があるときにできる電場は

$$\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 \cdots + \boldsymbol{E}_n = \boldsymbol{E} \tag{16}$$

に等しい．

電場のクーロンの法則

電場 $\boldsymbol{E}$ がある場所に電荷 q を置けば，この電荷は $\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}$ の力を受けるというのが電場の定義であった．このこととクーロンの法則 (1) から，動かない点電荷 Q_1 が位置 $\boldsymbol{r}_1$ にあった場合，位置 $\boldsymbol{r}$ にできる電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0\,||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1||^2}\,\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1}{||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1||} \tag{17}$$

に等しい．

クーロンの法則と重ね合わせの原理を組み合わせると，点電荷 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$ がそれぞれ位置 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n$ にあったとき，位置 $\boldsymbol{r}$ にできる電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i||^2}\,\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i}{||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i||} \tag{18}$$

に等しいことがわかる．

また，電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ で電荷が分布しているとき位置 $\boldsymbol{r}$ にできる電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'||^2}\,\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'||}dv' \tag{19}$$

に等しい．

なお，**クーロンの法則においては電場の源となる電荷が動いていないことは本質的な前提であり，電荷 Q が動いている場合にできる電場は (17) のとおりではない．**

さまざまな電荷分布による電場

計算練習．平面電荷．直線電荷．球殻電荷．二重球殻電荷．球体一様電荷など．