クーロンの法則の応用：電場の計算

クーロン則と重ね合わせ原理

電場 $\boldsymbol{E}$ がある場所に電荷 q を置けば，この電荷は $\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}$ の力を受けるというのが電場の定義であった．

クーロン力の法則によれば，点電荷 Q_1 が位置 $\boldsymbol{r}_1$ にあった場合，位置 $\boldsymbol{r}$ にある電荷 q は

$$\boldsymbol{F}=\frac{qQ_1}{4\pi\varepsilon_0\,||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1||^2}\,\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1}{||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1||} \tag{1}$$

という力を受ける．このことから，位置 $\boldsymbol{r}_1$ にある点電荷 Q_1 は位置 $\boldsymbol{r}$ に電場

$$\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r})=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0\,||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1||^2}\,\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1}{||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1||} \tag{2}$$

を作ることがわかる．

また，重ね合わせの原理によれば，ある電荷分布 Q_1 が作る電場を $\boldsymbol{E}_1$, 別の電荷分布 Q_2 が作る電場を $\boldsymbol{E}_2$ とすると，電荷分布 Q_1 と Q_2 が同時に共存しているときにできる電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}) \tag{3}$$

に等しい．

クーロンの法則と重ね合わせの原理を組み合わせると，さまざまな固定された電荷分布に対して電場を求められる．

点電荷が作る電場

点電荷 Q_i $(i=1,2,\cdots,n)$ が位置 $\boldsymbol{r}_i$ にあるとき，位置 $\boldsymbol{r}$ には電場

$$\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i}{||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i||^2}\,\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i}{||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i||} \tag{4}$$

ができる．

点電荷 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$ がそれぞれ位置 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n$ にあったときに位置 $\boldsymbol{r}$ にできる電場は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r})\\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i||^2}\,\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i}{||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i||}\end{aligned} \tag{5}$$

に等しい．

問 1．3 次元空間の座標を (x,y,z) とする．点 $(0,0,a)$ に電荷 Q があり，点 $(0,0,-a)$ に電荷 $-Q$ があるときの電場 $\boldsymbol{E}=(E_x,E_y,E_z)$ を (x,y,z) の関数として求めよ．

問 2．話を簡単にするため，3 次元空間のうち $z=0$ で与えられる平面上の電場を求めることにする．平面の座標を (x,y) とする．点 $(a,0)$ と $(-a,0)$ に電荷 Q があり，点 $(0,a)$ と $(0,-a)$ に電荷 $-Q$ があるときの電場 $\boldsymbol{E}=(E_x,E_y)$ を (x,y) の関数として求めよ．また，電場の強さが 0 になる場所を求めよ．

線電荷が作る電場

1 次元的な曲線に沿って電荷が分布しているものを線電荷という．電荷の分布には濃淡がありえるので，曲線の単位長さあたりの電荷量 λ を考えるのが便利である．この λ は (電荷) $\times$ (長さ)$^{-1}$ の次元を持ち，その単位は $\mathrm{C\,m^{-1}}$ である．長さ $d\ell$ の微小な曲線の断片（線要素という）にある電荷は $dQ=\lambda d\ell$ である．曲線 C に沿って電荷線密度 $\lambda(\boldsymbol{r}')$ で電荷が分布しているとき，位置 $\boldsymbol{r}$ にできる電場は (5) の自然な拡張

として

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_C \frac{dQ(\boldsymbol{r}')}{||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'||^2}\,\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'||} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_C \frac{\lambda(\boldsymbol{r}')}{||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'||^2}\,\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'||}d\ell' \quad (6)\end{aligned}$$

に等しい．

例題：平面座標 (x,y) において，点 $(-a,0)$ と $(a,0)$ を両端とする線分上に一定の線密度 λ の電荷が分布しているとき，点 $(0,h)$ にできる電場を求めよ．

答：微小な線要素 dx に載っている電荷は $dQ=\lambda dx$ であり，奇関数に注意すると

$$\begin{aligned}E_x &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dQ}{(x^2+h^2)}\cdot\frac{-x}{\sqrt{x^2+h^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{-\lambda\,x\,dx}{(x^2+h^2)^{3/2}} \\ &= 0 \quad (7)\end{aligned}$$

$x=h\tan\theta$ と変数変換し，$a=h\tan\nu$ とおけば，

$$dx = \frac{dx}{d\theta}\,d\theta = \frac{h}{\cos^2\theta}\,d\theta \quad (8)$$

$$x^2+h^2 = h^2(\tan^2\theta+1) = \frac{h^2}{\cos^2\theta} \quad (9)$$

$$(x^2+h^2)^{-3/2} = \frac{\cos^3\theta}{h^3} \quad (10)$$

だから，

$$\begin{aligned}E_y &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dQ}{(x^2+h^2)}\frac{h}{\sqrt{x^2+h^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{\lambda\,h\,dx}{(x^2+h^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\nu}^{\nu}\frac{1}{h}\,\cos\theta\,d\theta \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 h}\cdot 2\sin\nu \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 h}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}} \quad \blacksquare \quad (11)\end{aligned}$$

問 3. 上の例題で，$a\to\infty$ とした場合の電場を求めよ．

問 4. 上の例題で，任意の点 (x,y) における電場 (E_x,E_y) を求めよ．

例題：空間座標を (x,y,z) として，$z=0$ の平面上に，原点 $(0,0,0)$ を中心とする半径 r の円周があるとする．この円周上に一定の線密度 λ で電荷が分布しているとき，点 $(0,0,h)$ にできる電場を求めよ．

答：対称性から $E_x=E_y=0$ は明らか．平面極座標 $x=r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$ を用いて，微小角 $d\phi$ に対する微小円弧上の電荷が $dQ=\lambda r\,d\phi$ であることに注意すると，

$$\begin{aligned}E_z &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dQ}{(r^2+h^2)}\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{\lambda\,h\,r\,d\phi}{(r^2+h^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,h\,r\,2\pi}{(r^2+h^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\lambda\,h\,r}{2\varepsilon_0(r^2+h^2)^{3/2}} \quad \blacksquare \quad (12)\end{aligned}$$

面電荷が作る電場

2次元的な曲面上に電荷が分布しているものを面電荷という．電荷の分布には濃淡がありえるので，曲面の単位面積あたりの電荷量 σ を考えるのが便利である．電荷面密度 σ は (電荷) $\times$ (長さ)$^{-2}$ の次元を持ち，その単位は $\mathrm{C\,m^{-2}}$ である．面積 dA の微小な曲面の断片（面要素という）にある電荷は $dQ=\sigma dA$ である．曲面 S 上に電荷面密度 $\sigma(\boldsymbol{r}')$ で電荷が分布しているとき，位置 $\boldsymbol{r}$ にできる電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\boldsymbol{r}')}{||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'||^2}\,\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'||}dA' \quad (13)$$

に等しい．

例題：空間座標を (x,y,z) として，$z=0$ の平面上に，原点 $(0,0,0)$ を中心とする半径 a の円板があるとする．この円板上に一定の面密度

σ で電荷が分布しているとき，点 $(0,0,h)$ にできる電場を求めよ．

答：対称性から $E_x = E_y = 0$ は明らか．円板を無限に細い環に分割すると，電荷は線密度 $d\lambda = \sigma\, dr$ に換算できるので，前の例題の結果 (12) を利用して，

$$
\begin{aligned}
E_z &= \int \frac{hr}{2\varepsilon_0 (r^2+h^2)^{3/2}}\, d\lambda \\
&= \int_0^a \frac{hr\,\sigma}{2\varepsilon_0 (r^2+h^2)^{3/2}}\, dr \\
&= \frac{\sigma h}{2\varepsilon_0} \int_0^a \frac{r}{(r^2+h^2)^{3/2}}\, dr \\
&= \frac{\sigma h}{2\varepsilon_0}\Big(-\frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}} + \frac{1}{h}\Big) \quad \blacksquare \qquad (14)
\end{aligned}
$$

問 5．上の例題で，円板の半径 $a \to \infty$ とした場合の電場 E_z を求めよ．

問 6．$0 < a < b$ として，$z = 0$ の平面上に原点 $(0,0,0)$ を中心として，半径 a の円周と半径 b の円周にはさまれた環状の図形の表面に一定の面密度 σ で電荷が分布しているとする．このとき点 $(0,0,h)$ における電場を求めよ．

例題：空間座標を (x,y,z) として，原点 $(0,0,0)$ を中心とする半径 r の球面上に一定の面密度 σ で電荷が分布しているとき，点 $(0,0,h)$ にできる電場を求めよ．ただし，$h > r$ とする．

答：対称性から $E_x = E_y = 0$ は明らか．球面極座標を導入し，角度 θ を刻むことによって球面を細い円環に分割し，面密度から線密度への換算

$$
d\lambda = \sigma r\, d\theta \qquad (15)
$$

と変数変換

$$
z = r\cos\theta \qquad (16)
$$

$$
dz = -r\sin\theta\, d\theta = -\sqrt{r^2-z^2}\, d\theta \qquad (17)
$$

を行い，前の円周電荷の結果 (12) を利用すると，

$$
\begin{aligned}
E_z &= \int \frac{(h-z)\sqrt{r^2-z^2}}{2\varepsilon_0\{(h-z)^2+r^2-z^2\}^{3/2}}\, d\lambda \\
&= \int_0^\pi \frac{\sigma r(h-z)\sqrt{r^2-z^2}}{2\varepsilon_0\{h^2-2hz+r^2\}^{3/2}}\, d\theta \\
&= -\frac{\sigma r}{2\varepsilon_0}\int_r^{-r} \frac{(h-z)}{(h^2+r^2-2hz)^{3/2}}\, dz \qquad (18)
\end{aligned}
$$

となる．さらに変数変換

$$
\begin{aligned}
t &= \{(h-z)^2+r^2-z^2\}^{1/2} \\
&= (h^2+r^2-2hz)^{1/2} \qquad (19)
\end{aligned}
$$

によって積分変数を z から t に換えると，

$$
\begin{aligned}
t^2 &= h^2+r^2-2hz \\
z &= \frac{h^2+r^2-t^2}{2h} \\
dz &= -\frac{1}{h}\, t\, dt \\
h-z &= h - \frac{h^2+r^2-t^2}{2h} = \frac{h^2-r^2+t^2}{2h}
\end{aligned}
$$

となるので，

$$
\begin{aligned}
E_z &= -\frac{\sigma r}{2\varepsilon_0}\int_r^{-r} \frac{(h-z)}{(h^2+r^2-2hz)^{3/2}}\, dz \\
&= \frac{\sigma r}{2\varepsilon_0}\int_{z=r}^{z=-r} \frac{h^2-r^2+t^2}{2h}\cdot\frac{1}{t^3}\cdot\frac{1}{h}\, t\, dt \\
&= \frac{\sigma r}{4\varepsilon_0 h^2}\int_{z=r}^{z=-r} \frac{h^2-r^2+t^2}{t^2}\, dt \\
&= \frac{\sigma r}{4\varepsilon_0 h^2}\int_{z=r}^{z=-r} \Big(\frac{h^2-r^2}{t^2}+1\Big) dt \qquad (20)
\end{aligned}
$$

を得る．$z = -r$ のとき $t = h+r$, $z = r$ のとき $t = |h-r|$ となり，$h > r$ を仮定すると $|h-r| = h-r$ となることに注意して定積分を求めると，

$$
\begin{aligned}
E_z &= \frac{\sigma r}{4\varepsilon_0 h^2}\Big[-\frac{h^2-r^2}{t}+t\Big]_{t=h-r}^{t=h+r} \\
&= \frac{\sigma r}{4\varepsilon_0 h^2}\cdot 4r \\
&= \frac{4\pi r^2\sigma}{4\pi\varepsilon_0 h^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 h^2} \qquad (21)
\end{aligned}
$$

となる．ここで球面の全電荷を$Q = 4\pi r^2\sigma$とおいた．この式は，球面電荷を，原点の点電荷Qで置き換えたときの電場に等しい ■

問 7.　空間座標を(x, y, z)として，原点$(0, 0, 0)$を中心とする半径rの球面上に一定の面密度σで電荷が分布しているとき，点$(0, 0, h)$にできる電場を求めよ．ただし，$h < r$とする．

空間電荷が作る電場

3次元空間に電荷が分布しているものを空間電荷という．電荷の分布には濃淡がありえるので，単位体積あたりの電荷量ρを考えるのが便利である．電荷体積面密度（たんに電荷密度ということが多い）ρは(電荷)×(長さ)$^{-3}$の次元を持ち，その単位は$\mathrm{C\,m^{-3}}$である．体積dvの微小な体積の断片（体積要素という）にある電荷は$dQ = \rho dv$である．空間領域V中に電荷密度$\rho(\boldsymbol{r}')$で電荷が分布しているとき，位置$\boldsymbol{r}$にできる電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'||^2}\,\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'||}dv' \tag{22}$$

に等しい．

問 8.　空間座標を(x, y, z)として，原点$(0, 0, 0)$を中心とする半径aの球体内部に一定の体積密度ρで電荷が分布しているとき，点$(0, 0, h)$にできる電場を求めよ．ただし，$h > a$の場合と$h < a$の場合を分けて答えよ．

問 9. 半径aの球体内部に一様な密度で電荷が分布しており，その全電荷量Qは正であり，球体は動かないように固定されているとする．球の中心から距離$h\,(h > a)$だけ離れた点に，負電荷$-q$と質量mを持つ点粒子をそっと置く．この粒子の運動方程式を解いて，粒子が球面に達するのに要する時間を求めよ．

問 10. 半径aの球体内部に一様な密度で電荷が分布しており，その全電荷量Qは正であり，球体は動かないように固定されているとする．球体の内部はスカスカで，他の粒子は球体内部を抵抗を受けずに動けるとする．球体内部で，質量mと負の電荷$-q$を持つ粒子を適当な初速度で動かせば，この粒子はどのような運動をするだろうか．粒子の軌道や，運動に要する時間を求められるだろうか．