物理学基礎 II（電磁気学），担当 谷村省吾，講義ノート 5

# 電束とガウスの法則

## 電気力線と電束

ベクトル場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ に沿って無数の曲線を描くことができるが，このような曲線を**電気力線** (line of electric force, electrical flux line) と呼んだ．

電場の強さを，電場ベクトルの大きさで表現するのではなく，電気力線の密集度で表現することもできる．つまり，電場が強い場所では，単位面積を通過する電気力線の本数が多いと考える．この，電気力線の本数に相当する概念が，以下に説明する電束であり，電気力線の密集度に相当する概念が電束密度である．

面積 $S$ の平らな図形（三角形や長方形，平行四辺形，台形，円板など）の裏から表に突き抜ける単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を決めたとき，ベクトル $\boldsymbol{S} = S\boldsymbol{n}$ を**向き付けられた面**という．$\boldsymbol{S}$ は長さの 2 乗の次元を持つ．さらに，一様な電場 $\boldsymbol{E}$ があれば，

$$\Phi = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{S} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} S \tag{1}$$

を，面 $\boldsymbol{S}$ を貫く**電束** (electric flux) という．

電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ が場所 $\boldsymbol{r}$ ごとに変化する場合，

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \tag{2}$$

もまたベクトル場になるが，$\boldsymbol{D}$ を**電束密度** (electric flux density) という．

**問 1**. 電束の次元は，電荷の次元と一致することを示せ．だから電束の単位は C（クーロン），電束密度の単位は $\mathrm{C\,m^{-2}}$ としてよい．

**問 2**. 太陽は，あらゆる方向にほぼまんべんなく，時間的にもほぼ一定の割合でエネルギーを放出している．地球に届くエネルギーの流れの密度は，$1370\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$ である．ここで W（ワット）は仕事率の単位であり，$\mathrm{W = J \cdot s^{-1}}$ に等しい．太陽と地球の距離が約 1 億 5 千万 km であることから，太陽が単位時間あたりに放射するエネルギーをワットの単位で求めよ．大型の火力発電所の発電量は 100 万 kW（キロワット）程度であるが，エネルギー源としての太陽は火力発電所の何倍に相当するか．

**問 3**. 地球の北半球では北極に近づくほど寒くなる．それはなぜか．また，地球上では 1 年間で夏と冬という季節変化があるのはなぜか説明せよ．

## 面積分と体積積分

曲面，閉曲面，曲面の法線ベクトル，向き付け可能な曲面，向き付け不可能な曲面，面積要素，立体領域，体積要素，立体領域の境界面，面積分と体積積分の概念を説明する．

**ベクトル場の面積分** (surface integral)：向き付けられた曲面 $S$ を貫くベクトル場 $\boldsymbol{E}$ の面積分を

$$\begin{aligned} \int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}\, dS &= \int_S (E_x dydz + E_y dzdx + E_z dxdy) \\ &= \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_i) \cdot \boldsymbol{n}_i \, \Delta S_i \end{aligned} \tag{3}$$

と定める．ただし，向き付けられた曲面とは表裏の定まっている曲面のことであり，曲面上の各点で裏から表に向かう単位長さの法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を連続的に定めることができるものである．右辺において，曲面を $N$ 個の小さな要素に分割し，各要素の面積を $\Delta S_i$ とし，各面要素の法線ベクトルを $\boldsymbol{n}_i$ としている．

直観的には，面積分は，ベクトル場 $\boldsymbol{E}$ で流れている流体があったとして，曲面 $S$ の裏から表に向

かって通り抜ける流体の正味の総量を表している．$\boldsymbol{E}$ が曲面 $S$ の裏から表に貫いていれば通過量はプラス，表から裏に貫いていれば通過量はマイナスである．

**スカラー場の体積積分** (volume integral)：3 次元領域 $V$ におけるスカラー場 $\rho$ の体積積分を

$$\begin{aligned}\int_V \rho\, dv &= \int_V \rho\, dxdydz \\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\rho(\boldsymbol{r}_i)\Delta V_i \end{aligned} \tag{4}$$

と定める．

**問 4**．電荷密度が原点からの距離 $r$ だけの関数 $\rho(r)$ で表されるとき，半径 $a$ の球体内の電荷は

$$Q = 4\pi\int_0^a \rho(r)\, r^2\, dr \tag{5}$$

に等しいことを示せ．

# クーロンの法則の復習

クーロンの法則と重ね合わせの原理を合わせると，次のことが言えた．点電荷 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ がそれぞれ位置 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n$ にあったとき，位置 $\boldsymbol{r}$ にできる電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i||^2}\,\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i}{||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i||} \tag{6}$$

であった．また，領域 $V$ に電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r}')$ で電荷が分布しているとき位置 $\boldsymbol{r}$ にできる電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'||^2}\,\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'||}dv' \tag{7}$$

であった．

# ガウスの法則

電場 $\boldsymbol{E}$ と，向き付けられた曲面 $S$ に対して

$$\varPhi = \int_S \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}\, dS = \varepsilon_0\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\, dS \tag{8}$$

を曲面 $S$ を貫く**電束** (electric flux) という．

任意の 3 次元領域 $V$ に対して次の関係式が成り立つ：

$$\varepsilon_0\int_{\partial V}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\, dS = \int_V \rho\, dv \tag{9}$$

ここで $\partial V$ は $V$ の境界面に内側から外側に向けて向きを付けた閉曲面である．言葉にすると，(9) は，「領域 $V$ の表面を貫く正味の電束は，領域 $V$ の中に入っている電荷の総量に等しい」と読める．電束を「電気力線の本数」と解釈すると，「電気力線はプラスの電荷量の分だけ湧き出し，マイナスの電荷量の分だけ電荷に吸い込まれる．電荷のない場所では電気力線の本数は増えも減りもしない」と言える．

(9) は**ガウスの法則** (Gauss' law) と呼ばれ，クーロンの法則と重ね合わせの原理から証明できる．この証明の過程で**立体角** (solid angle) という概念が助けになる．

注意すべきポイントとして，**クーロンの法則 (6) や (7) は電場の源となる電荷が動いているときは成り立たないが，ガウスの法則 (9) は電荷が動いているときもそのまま成り立つ．**

クーロンの法則を言い換えた補助法則：向き付けられた曲面 $S$ を点電荷 $Q$ から見込む立体角を $\omega$ とすると，点電荷 $Q$ から発して $S$ を貫く電束は

$$\varPhi = \varepsilon_0\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\, dS = \frac{\omega}{4\pi}Q \tag{10}$$

に等しい．とくに曲面 $S$ が点電荷 $Q$ を 1 回包む閉曲面になっている場合は $S$ を貫く電束は

$$\varPhi = \frac{4\pi}{4\pi}Q = Q \tag{11}$$

に等しく，閉曲面 $S$ の中に点電荷 $Q$ がない場合は $S$ を貫く電束は

$$\varPhi = 0 \tag{12}$$

となる．

# 対称性

対称性 (symmetry) という概念を定義する．$A$ という対象（もの・図形など）に $R$ という操作・変換を施した結果を $A' = R(A)$ と書く．一般には $A$ と $A'$ は一致しないが，$A = A'$ である場合，$A$ は $R$ に関して**対称** (symmetric) であるとか，$R$ に関して**不変** (invariant) であると言う．図形に関する対称性としては，並進（平行移動）・回転・鏡映などがある．

**問 5**. 以下の図形の対称性を述べよ．

(1) 二等辺三角形，(2) 正三角形，(3) 平行四辺形，(4) 長方形，(5) 菱形，(6) 正方形，(7) 正六角形，(8) 正四面体，(9) 正六面体，(10) 円，(11) 球面，(12) 直線，(13) 平面

# 対称性と電場

クーロンの法則やガウスの法則は，電荷がどんな電場を作るか決めるが，電荷が対称性を持っていると，電場にも同種の対称性が現れる．そのことを利用すると，何も計算しなくても，電場のありようをある程度限定できる．

前にクーロンの法則を使って計算した問題を，ガウスの法則を使って計算してみよう．

無限直線電荷．平面電荷．球殻電荷．二重球殻電荷．球体一様電荷など．

**問 6**. 次の電荷分布の対称性を述べよ．それぞれの電場の向きを述べ，電場の大きさを式で表せ．

(1) 無限に広い平面上に一定の面密度 $\sigma$ の電荷．

(2) 半径 $a$ の球殻表面に一定の面密度 $\sigma$ の電荷があるとき，中心からの距離 $r$ の点における電場の大きさ $E(r)$ のグラフも描け．$r > a$ の場合と $r < a$ の場合を分けて考えるとよい．

(3) 半径 $a$ の球体内部に一定の密度 $\rho$ の電荷があるとき，中心からの距離 $r$ の点における電場の大きさ $E(r)$ のグラフも描け．