物理学基礎 II（電磁気学），担当 谷村省吾，講義ノート 6

保存力の法則と電位

線積分

曲線，閉曲線，曲線の向きづけ，滑らかな曲線の接ベクトル，線要素，線積分の概念を説明する．

ベクトル場の線積分 (line integral)：向き付けられた曲線 C に沿ってのベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の線積分を

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_C (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^{N-1} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_i)\cdot(\boldsymbol{r}_{i+1}-\boldsymbol{r}_i) \qquad (1)\end{aligned}$$

と定める．ただし，右辺において，曲線 C を N 個の区間に分割し，C の始点を $\boldsymbol{r}_0$, C の通過点を順に $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3, \cdots$ とし，C の終点を $\boldsymbol{r}_N$ としている．

実際の線積分の計算方法：パラメータ s を使って曲線上の点を $\boldsymbol{r}(s)$ で表し，

$$\begin{aligned}&\int_{s_0}^{s_1} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(s))\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\,ds \\ &= \int_{s_0}^{s_1}\Big(A_x\frac{dx}{ds}+A_y\frac{dy}{ds}+A_z\frac{dz}{ds}\Big)ds \qquad (2)\end{aligned}$$

を計算すればよい．あるいは幾何学的直観によって，すぐに答えを出せる問題もある．

例題．x, y を座標とする平面において，点 (0,0) を始点，点 (1,0) を終点とする線分 C_1，点 (1,0) を始点，点 (1,1) を終点とする線分 C_2 についてベクトル場 $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y) = (0, x)$ の線積分 $\int_{C_i} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ $(i = 1, 2)$ の値を求めよ．

問 1. x, y を座標とする平面において，ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (x, y)$ と $\boldsymbol{B} = (-y, x)$ を図示せよ．

問 2. 上のベクトル場 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ について，以下の経路 C_1, C_2, C_3 に沿う線積分 $\int_{C_i} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ および $\int_{C_i} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{r}$ $(i = 1, 2, 3)$ の値を求めよ．
(1) r, h を正の実数として，3 点 $(0, 0), (r, 0), (r, h)$ を頂点とし，これらを順に巡る三角形 C_1.
(2) a, b を正の実数として，4 点 $(-a, -b), (a, -b), (a, b), (-a, b)$ を頂点とし，これらを順に巡る長方形 C_2.
(3) α を実数として，2 点 $(r, 0)$, $(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ を端点とする，中心 $(0, 0)$ で半径 r の円弧 C_3.

問 3. 3 次元ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ の長さを $r = ||\boldsymbol{r}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とすると

$$\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r} = r\,dr \qquad (3)$$

という関係が成り立つことを証明せよ．ただし，左辺は $\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r} = x\,dx + y\,dy + z\,dz$ である．

問 4. ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ が

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = f(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r} \qquad (4)$$

という関数形になっているとき，$\boldsymbol{A}$ は**中心力場** (central force field) だという．つまり，中心力場とは，動径ベクトル方向を向いており，大きさが原点からの距離だけに依存するベクトル場である．中心力場 $\boldsymbol{A}$ の，任意の閉曲線 C に沿っての線積分は

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = 0 \qquad (5)$$

となることを証明せよ．

問 5. e を定数として，ベクトル場 $\boldsymbol{E}$ が

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{e}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \qquad (6)$$

という関数形になっているとき，$\boldsymbol{r}_1$ を始点，$\boldsymbol{r}_2$ を終点とする任意の曲線 C について

$$\int_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{e}{||\boldsymbol{r}_2||} + \frac{e}{||\boldsymbol{r}_1||} \qquad (7)$$

が成り立つことを示せ．

クーロンの法則の復習

クーロンの法則と重ね合わせの原理を合わせると，次のことが言えた．点電荷 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ がそれぞれ位置 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n$ にあったとき，位置 $\boldsymbol{r}$ にできる電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i||^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i}{||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i||} \tag{8}$$

であった．また，電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ で電荷が分布しているとき位置 $\boldsymbol{r}$ にできる電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'||^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'||}dv' \tag{9}$$

であった．

保存力の法則

任意の静電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ において，空間中の任意の閉曲線 C に対して

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = 0 \tag{10}$$

が成り立つ．

ガウスの法則も保存力の法則 (10) もクーロンの法則と重ね合わせの原理から証明できる．保存力の法則 (10) はエネルギー保存則を意味する．（第1種の）永久機関が存在しないことを意味すると言ってもよい．**時間的に変動する電場に対しては保存力の法則 (10) は成り立たない**ので，注意してほしい．

問 6. 保存力の法則 (10) を証明せよ．

問 7. 速度 $\boldsymbol{v}$ で等速直線運動する点電荷 Q から位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の分だけ離れた点にできる電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{11}$$

となることが知られている．ただし，速度ベクトルの大きさ $v = ||\boldsymbol{v}||$ と光の速さ $c = 3.00\times10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ の比を $\beta = v/c$ とおいた．また，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{r}$ のなす角を θ とおいた．

(1) $\beta = 1/2$ のとき，$\theta = 0, \pi/4, \pi/2$ における電場の大きさをそれぞれ求めよ．

(2) この電場のベクトル場と電気力線の図を描け．

(3) 電荷の位置を原点とし，速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ の向きを z 軸として直交座標系 (x, y, z) を設ける．$0 < a < b$ として，4 点 $P_1 = (a, 0, 0)$, $P_2 = (b, 0, 0)$, $P_3 = (0, 0, b)$, $P_4 = (0, 0, a)$ を順に巡る閉曲線 C を作る．ただし，P_1 と P_2 はまっすぐな線分で結び，P_2 と P_3 を結ぶ区間は原点を中心とする円弧とし，P_3 と P_4 もまっすぐな線分で結び，P_4 と P_1 を結ぶ区間も原点を中心とする円弧とする．この閉曲線 C に沿っての電場の線積分 $\int_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．

(4) 点電荷 Q を中心とする半径 r の球面 S を貫く電束 $\varPhi = \varepsilon_0\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ を求めよ．

電位

静電場 $\boldsymbol{E}$ の中に試験電荷 q を置いて，電場の力に逆らって「そろりと」電荷を運ぶことを考える．つまり電場から受ける力 $\boldsymbol{F}_e = q\boldsymbol{E}$（電気的 electric な力という意味で e を添える）の他に何らかの力 $\boldsymbol{F}_m$（力学的 mechanical な力という意味で m を添える）を電荷に与えて，

$$\boldsymbol{F}_e + \boldsymbol{F}_m = q\boldsymbol{E} + \boldsymbol{F}_m = \boldsymbol{0} \tag{12}$$

のように力の釣り合いを保って，試験電荷を加速させず，そっと運ぶ．力の打ち消し合いの条件から

$$\boldsymbol{F}_m = -q\boldsymbol{E} \tag{13}$$

である．すると，基準点 O から点 $\boldsymbol{r}$ まで経路 C に沿って電荷を運ぶ間に力 $\boldsymbol{F}_m$ がする仕事は

$$W = \int_C \boldsymbol{F}_m\cdot d\boldsymbol{r} = -q\int_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} \tag{14}$$

に等しい．一般に経路 C の始点と終点を固定しても，$\int_C \boldsymbol{F}_m\cdot d\boldsymbol{r}$ という線積分の値は経路 C の取り方によって変化するかもしれないものだが，静電場は保存力の法則 (10) を満たしているので，結局この W の値は経路 C の取り方によらず，終点 $\boldsymbol{r}$ だけで決まる．

したがって，単位電荷を基準点 O から終点 $\boldsymbol{r}$ に運ぶのに要する仕事

$$\phi(\boldsymbol{r}) = -\int_{\mathrm{O}}^{r} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}' \tag{15}$$

という量を定められる．$\phi(\boldsymbol{r})$ を基準点 O に対する点 $\boldsymbol{r}$ の**電位** (electric potential) という．基準点 O から観測点 $\boldsymbol{r}$ まで電場に逆らって試験電荷 q をそっと運ぶのに必要な仕事を $W(\boldsymbol{r})$ とすると

$$W(\boldsymbol{r}) = q\,\phi(\boldsymbol{r}) \tag{16}$$

が成り立つ．電位はスカラー場である．「電位が高い場所」とは「プラスの電荷をそこまで運ぶのには大きな仕事を要する」ことを意味する．

当然ながら，電位の値は，基準点に対して相対的に決まるものであり，基準点を替えれば電位の値も変わる．基準点を O にとった場合の点 $\boldsymbol{r}$ の電位を $\phi_{\mathrm{O}}(\boldsymbol{r})$, 基準点を O′ にとった場合の電位を $\phi_{\mathrm{O}'}(\boldsymbol{r})$, とすると,

$$\phi_{\mathrm{O}}(\boldsymbol{r}) = \phi_{\mathrm{O}}(\mathrm{O}') + \phi_{\mathrm{O}'}(\boldsymbol{r}) \tag{17}$$

という関係式が成り立つ．つまり基準点を替えれば，電位の値は定数 $\phi_{\mathrm{O}}(\mathrm{O}')$ の分だけ足される（あるいは引かれる）．

また，電位に関しても重ね合わせの原理が成り立つ．つまり，ある電荷分布 ρ_1 が作る電場を $\boldsymbol{E}_1$, 電位場を ϕ_1 とし，別の電荷分布 ρ_2 が作る電場を $\boldsymbol{E}_2$, 電位場を ϕ_2 とすれば，電荷 $\rho_1+\rho_2$ が同時にあったときにできる電場は $\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2$, 電位場は $\phi_1+\phi_2$ である．

無限遠方を基準とした電位

適当に大きな，有限の体積の領域をとればすべての電荷がその領域内に収まっているような状況では，遠くに行けば行くほど電場は弱まるので,「電場ゼロの理想的な場所」として「無限遠方 ∞」という場所を基準点に選ぶことができる．この場合，電位は

$$\phi(\boldsymbol{r}) = -\int_{\infty}^{r} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}' = \int_{r}^{\infty} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}' \tag{18}$$

となる．とくに原点 O に置かれた点電荷 Q による電位は

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{r}) &= \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot d\boldsymbol{r} \\ &= \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\frac{r}{r}dr \\ &= \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r}\end{aligned} \tag{19}$$

となる．

電位と電場の関係

事実 1. (15) のように，電場を積分したものが電位だが，逆に，電位 ϕ を微分すれば電場 $\boldsymbol{E}$ になる：

$$-\frac{\partial\phi}{\partial x} = E_x, \quad -\frac{\partial\phi}{\partial y} = E_y, \quad -\frac{\partial\phi}{\partial z} = E_z \tag{20}$$

これらをまとめて

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\,\phi = -\Big(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\Big) \tag{21}$$

と書く．grad は gradient の略で，$\mathrm{grad}\,\phi$ を ϕ の勾配ベクトル場という．

定義. 電位場 $\phi(\boldsymbol{r})$ と定数 c に対して 3 次元空間の点の集合

$$S_c := \{\boldsymbol{r}\,|\,\phi(\boldsymbol{r}) = c\} \tag{22}$$

を高さ c の**等電位面** (equipotential surface, level set) という．

事実 2. 任意の点を通る等電位面は，その点における電場ベクトルと直交する．

問 8. 3 次元空間の座標を (x, y, z) とする．点 $(0, 0, a)$ に電荷 Q があり，点 $(0, 0, -a)$ に電荷 $-Q$ があるときの電位場 $\phi(x, y, z)$ を求めよ．(x, z) 平面で等電位線を描け．また，同じ平面上で電気力線を描け．