物理学基礎 II（電磁気学），担当 谷村省吾，講義ノート 7

導体と電流

物質中の電荷と電場への応答

プラスチックでも金属でも人体でも，どんな物質にも電気をためることができる．つまり**物質はゼロでない電荷を持つことができる**．しかし，他の物質を接触させると電気がその物質を通り抜けて逃げてしまうことがある．いろいろ調べてみると，電気を通しやすい物質と通しにくい物質があり,「電気の通りやすさ」という性質は物質によって非常に大きな違いがあることがわかる．こうした現象・性質を理解するためには，物質のつくりを知る必要がある．

すべての物質は，原子でできている．原子は，プラスの電荷と大きな質量を持った原子核の周りを，マイナスの電荷と小さな質量を持った電子が回っているという構造になっている．原子核のプラス電荷量とその周りの電子のマイナス電荷量は等しく，原子全体では電気的に電荷ゼロの状態になっている．しかし，原子から電子がはがれることもあり，その場合は原子はプラスの電荷を帯びた正イオン（陽イオン）になる．逆に，原子に余剰の電子がくっつくこともあり，その場合，原子はマイナスの電荷を帯びた負イオン（陰イオン）になる．

電場 $\boldsymbol{E}$ は電荷 q に力 $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$ を及ぼすので，原子を強い電場中に置くと，電場の方向に原子核が動き，反対方向に電子が動く．原子核がどれくらいしっかり固定されているか，あるいは，電子がどれくらいしっかり原子核につなぎとめられているか，という物質の作りの違いによって，これらの粒子の挙動は大きく異なる．

金属中なら正イオン（原子核）はほとんど完全に固定されているが，電子は原子核に引き止められずに，どこまでも動いて行く．溶液中なら，正イオンも負イオンも動き回ることができる．絶縁体と呼ばれる物質では，原子核も電子の位置は多少の変化はあるが，イオンや電子が自由に動き回ることはない．つまり，**物質が電場の中に置かれていると，物質中の電荷の移動が起こるようなものもあるし，電荷がほとんど動かないようなものもある．**

だいたいこれくらいのことを知っていれば，電場と物質の関わりを理解することができる．

なお,「電気をためる」という言葉は「電池を充電する」のとは異なった出来事を指している．**電池の充電は，正確にいうと，電池にエネルギーをためているのであって，電気をためているのではない．** ここで「電気をためる」という言葉は，もともとプラス・マイナスのどちらの電気も持っていたなかったもの，あるいはプラス・マイナスの電荷量が等しくて打ち消し合っていたものに，余分のプラス電荷またはマイナス電荷を与えることを指している．電池を充電しても，電池がプラスの電荷を帯びたり，マイナスの電荷を帯びたりするわけではない．

電流

電気の流れを定量的に表すために電流という概念を定める．**電流** (electric current) とは単位時間あたりの電荷の移動量のことである．プラスの電荷が左から右に移動すれば，電流の向きも左から右だと定める．マイナスの電荷が左から右に移動すれば，電流の向きは右から左だと定める．

とくに人間が作った電気回路という装置では電気を細い導線に沿って流すことが多いので，導線に

対して電流を定義することが多いが，電流は必ずしも細い線の中だけを流れるものではない．例えば，電気分解の際には，溶液の中のあらゆる場所で電荷の移動が起きており，電流は溶液全体に分布している．

時間に比例して一定の割合で電荷が移動しているとき，時間 t の間に移動した電荷の量を q，電流を I とすると

$$q = It \tag{1}$$

という関係がある．これは一定の速度 v で時間 t に移動した距離を ℓ とすると

$$\ell = vt \tag{2}$$

という関係が成り立つのと同型な関係式である．

上の式 (1) は

$$I = \frac{q}{t} \tag{3}$$

と書き直すことができる．電荷を C（クーロン），時間を s（秒）という単位で測るなら，電流は

$$\mathrm{A}\,（アンペア）= \mathrm{C/s} \tag{4}$$

という単位で測られる．

また，面積 S の断面に対して垂直に電流が流れているとき，単位面積あたりの電流を**電流密度** (current density) といい，j という文字で表す．つまり，面積 S の断面を通過する電流 I は

$$I = jS \tag{5}$$

に等しい．この式は

$$j = \frac{I}{S} = \frac{q}{tS} \tag{6}$$

と書き直すことができる．したがって電流密度の単位は

$$\mathrm{A/m^2} = \mathrm{C\,s^{-1}\,m^{-2}} \tag{7}$$

である．

電流には向きがあるので，電流密度はベクトルで表すのが適当である．一般には電流密度はベクトル場 $\boldsymbol{j}$ で表され，単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を持つ面積 S の平面断片を通過する電流は

$$I = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n} S \tag{8}$$

に等しい．

問 1. 落雷は雲と地面の間で電流が流れる現象だが，一回の雷撃で 20 C ほどの電荷が 2 ms（ミリ秒）ほどの時間で流れる．この電流は何アンペアか求めよ．これがどの程度の電流か実感するために，家庭のブレーカーの許容電流を調べてみよ（電流が流れすぎると配線や電気製品が発熱する恐れがあるので，各家庭には，過剰電流が流れると電流を遮断するブレーカーが設置されている）．

電荷保存則

電荷にはプラスとマイナスがあり，プラスとマイナスの電荷は打ち消し合う．宇宙全体の電荷の総量は時間が経過しても増えも減りもせず不変にとどまる．限られた空間領域 V に注目すれば，V の境界面 ∂V を通り抜けて電流が出れた分だけ V 内の電荷量は減るし，∂V を通って電流が流れ込んだ分だけ V 内の電荷量は増える．電荷密度のスカラー場 ρ が単位体積あたりの電荷量を表し，電流密度のベクトル場 $\boldsymbol{j}$ がそのベクトルに垂直な平面を単位面積を単位時間あたりに通り抜ける電荷の量を表すことから，

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dv = -\int_{\partial V} \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n}\, dS \tag{9}$$

が成り立つ．これを**局所的な電荷保存則** (local charge conservation law) という．

オームの法則と電気抵抗

固体は原子が整然を並んだ結晶であり，電場をかけると，原子核はほとんど動かないが，電子は電

場の反対方向に動く．とくに金属中の電子はいくらでも動く．したがって金属では電場と同じ向きに電流が流れる．液体も電場をかけると電流が流れるが，この場合は，正イオンが電場の方向に，負イオンが電場の反対方向に動いている．

電場 $\boldsymbol{E}$ は電荷 q に力 $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$ を及ぼすのだから，電場が一定なら，力も一定，電荷の加速度も一定になり，電子やイオンの移動速度は時間とともにどんどん大きくなりそうだが，実際には，**電場が一定なら物質中の電子やイオンの移動速度は一定値にとどまる**．なぜ物質中の電子は加速し続けないのかという理由は非常に難しく，1920 年頃まで謎であった．電子の運動は量子力学ができてから初めて理解できるようになってきたが，いまでも完全には理解し尽されてはいない．

経験則として，**一様な物質を一様な電場中に置くと，電場の向きに，電場の大きさに比例した電流が流れる**ことが知られており，これを**オームの法則** (Ohm's law) という．電場 $\boldsymbol{E}$ と電流密度 $\boldsymbol{j}$ の比例関係は

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{10}$$

と書かれる．比例係数 σ は物質の種類によって異なる．σ が大きければ電気が流れやすい物質，σ が小さければ電気が流れにくい物質ということになる．σ は**電気伝導率** (electrical conductivity) と呼ばれる．

とくにこう書いたからといって内容が増えるわけではないが，σ の逆数

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \tag{11}$$

を体積抵抗率とか比抵抗とか**抵抗率** (electrical resistivity) と呼ぶ．

問 2．電気伝導率 σ の単位を m, kg, s, A の組み合わせで表せ．

問 3．式 (10) は**微視的あるいは局所的オームの法則**とも呼ばれる．底面積 S，高さ ℓ の円筒形の一様な物質があり，円筒の軸に沿って一様な電場 E があるとする．また，二つの底面の間の電位差を ϕ とする．丁寧に言うと，二つの底面に S_1, S_2 という名前を付けたとして，電場が S_1 から S_2 に向かっているとき，S_2 を電位の基準場所にして S_1 の電位を測った値を ϕ とする．このとき，

$$I = jS, \tag{12}$$

$$j = \sigma E, \tag{13}$$

$$\phi = E\ell \tag{14}$$

という関係式が成り立つことを説明せよ．また，このことから

$$\phi = RI, \tag{15}$$

$$R = \frac{1}{\sigma}\frac{\ell}{S} = \rho\frac{\ell}{S} \tag{16}$$

という関係が成り立つことを示せ．(15) は，通常のオームの法則，あるいは**大域的オームの法則**と呼ばれる．係数 R はこの円筒形物体の**電気抵抗** (resistance) と呼ばれる．

問 4．電気抵抗の単位は Ω（オーム）と書かれる．抵抗率 ρ の単位は $\Omega\,\mathrm{m}$ であることを確かめよ．

抵抗率 ρ はその物質の「電気の通しにくさ」を表す．いくつかの物質のついて抵抗率の値を列挙しておく．ただし，たいていの物質の抵抗率は温度によって変化する．ここに書いてある抵抗率は 0 ℃付近での値である．

銀	$\rho = 1.47 \times 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$
金	$\rho = 2.05 \times 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$
銅	$\rho = 1.55 \times 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$
鉄	$\rho = 8.9 \times 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$
鉛	$\rho = 19.2 \times 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$
ニクロム	$\rho = 107.3 \times 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$
炭素	$\rho = 1640 \times 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m} = 1.64 \times 10^{-5}\,\Omega\,\mathrm{m}$
海水	$\rho = 2.0 \times 10^{-1}\,\Omega\,\mathrm{m}$
ケイ素	$\rho = 3.97 \times 10^{3}\,\Omega\,\mathrm{m}$
純水	$\rho = 2.5 \times 10^{5}\,\Omega\,\mathrm{m}$
ガラス	$\rho = 10^{10} \sim 10^{14}\,\Omega\,\mathrm{m}$
ポリエステル	$\rho = 10^{12} \sim 10^{14}\,\Omega\,\mathrm{m}$
硫黄	$\rho = 2 \times 10^{15}\,\Omega\,\mathrm{m}$

上から下に行くにつれて抵抗率が大きい，つまり電気を通しにくい物質が下の方に並んでいる．抵抗率が $10^{10}\,\Omega\,\mathrm{m}$ よりも大きいと，実用上は，ほとんど電気は流れない．このような物質を**絶縁体** (insulator) とか不導体と呼ぶ．

抵抗率がだいたい $10^{-6}\,\Omega\,\mathrm{m}$ よりも小さいと電気はやすやすと流せる．このような物質を**導体** (conductor) とか良導体という．

絶縁体と導体の中間の抵抗率を持つ物質を**半導体** (semi-conductor) という．

導体・半導体・絶縁体は明瞭に区別されるものではなく，あくまで電気の通しやすさに関する「程度の違い」である．それでも，電気をよく通す物質と，ほとんど通さない物質の差は歴然としており，導体から絶縁体まで抵抗率の値は小から大まで極端に広がっている．電気をよく通す銀などの金属と，ポリエステルなどの絶縁体とでは，抵抗率は 10^{23} 倍も異なっている．

問 5. 電気をよく通す物質と，通しにくい物質とでは，抵抗率が $10^{23} = 100{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000$ 倍も異なる理由を考えよ．この巨大な数はいったい何に原因があるのか？

静電場中におかれた導体

電流を流し続けるための電場と電位差を保つ電源がある場合にはオームの法則は成り立つが，電流を押し流し続ける電源装置がない場合には何が起こるだろうか？

静電場と導体に関しては比較的シンプルな法則が成り立つので，それを分析しよう．静電場の中に導体を置くと，電場に沿って電流が流れる．とくに金属固体の場合は，電場の反対方向に電子が移動する．電子はどこまでも移動することはできず，固体の表面で行き止まる．そうすると固体の表面には電荷がたまり，やがてこの電荷自身が作り出す電場と，外部から与えている電場とが，導体の内部で打ち消し合うようになり，電場が完全に打ち消し合ったとき，電子の移動が止まる．静電場中の金属ではこのような電子の移動はほとんど一瞬に完了してしまう．

以上の考察から静電場と導体に関して次のような一般法則を導くことができる．なお，導体の「内部」と「表面（のすぐ近くの内側）」を区別していることに注意してほしい．

1) **静電場中の定常状態の導体の内部の電場はゼロである．** ただし，定常状態とは電荷の移動が停止した状態のことである．導体内では「電場がゼロでないならば，電荷の移動が起こり，ゆえに定常状態ではない」．この命題の対偶が,「定常状態ならば電場はゼロだ」という命題になる．

2) **ひとつながりの導体の内部と表面の電位は一定値である．とくに導体の表面は等電位面である．** なぜなら，点 P から点 Q に向かう曲線に沿って電場を線積分したものが電位差

$$\phi(\mathrm{P}) - \phi(\mathrm{Q}) = \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{17}$$

を定めるので，もしも点 P と点 Q を電場ゼロの場所を通る曲線でつなぐことができるなら，点 P, Q の電位差はゼロである．

3) **定常状態の導体の内部は電気的に中性である．導体の電荷は表面のみにたまる．** このことを証明しよう．ガウスの法則より任意の 3 次元領域 V について

$$\varepsilon_0 \int_{\partial V} \boldsymbol{E}\cdot \boldsymbol{n} dS = \int_V \rho\, dv \tag{18}$$

である．領域 V は導体の形とは関係なく，便宜的に選べることに注意しよう．いま，導体内の任意の点 P に対して，点 P を取り囲む小さな領域 V を V の境界面も導体内に収まるように選ぶことができて，∂V では電場 $\boldsymbol{E}=0$ だから,

$$\int_V \rho\, dv = 0 \tag{19}$$

となるから，導体内部の点 P の近傍の電荷密度 ρ は 0 である．

しかし，点 P が導体表面にある場合は，点 P を囲む領域 V をどんなに小さく選んでも，V の境界面 ∂V の一部は導体の外に出るし，そこでは電場はゼロとは限らないので，点 P 近傍の電荷もゼロとは言えない．つまり，表面にはゼロでない電荷があり得る．

4) **導体の表面のすぐ外側にはゼロでない電場が存在し得るが，電場の向きは必ず導体表面に垂直である．** 導体表面の電荷面密度（単位面積あたりの電荷）を σ とすれば電場の強さ E と

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{20}$$

という関係にある．(平面状の一様な電荷が作る電場の場合は係数 1/2 がかかっていたことに注意.)

5) **もし，導体内部に空洞があって，空洞内に電荷がなければ，空洞内の電場はゼロであり，空洞表面の電荷もゼロである．**

問 6. 上に掲げた，導体と静電場に関する法則 4, 5 を論証せよ（なぜ正しいのか説明せよ）．

静電誘導

導体のそばに電荷を置くと，電荷が作る電場に導体中の電子が引き寄せられ（あるいは反発され）て，電子の移動が起き，導体内の電荷分布が偏る．この現象を**静電誘導** (electrostatic induction) という．この偏りに生じた電荷によって，新たな電場が生じる．導体の外に置かれた電荷と，導体内の電荷が作る電場とが重なり合って打ち消し合い，導体内の電場がゼロになるまで電荷の移動は続く．

一般に，導体からなる系の定常状態を求めようという問題は，導体内部の電場＝0 という条件と電荷保存則という 2 つという条件の下で，導体外部にできる電場と導体表面に誘導される電荷を求めるという連立問題になる．一般の形の導体に対してこの問題を解くのは，かなり難しい数学的問題でなる．

導体に，無限遠方に伸びた導体をつなげることを**接地** (earth) という．接地すると，無限遠方からいくらでも電荷が移動してくることができる．また，接地された導体は無限遠方との電位差が 0 になる．

ごく簡単な場合として，無限平面導体のそばに点電荷を置いた場合の，電場と，導体に静電誘導された電荷分布を求めよう．**鏡像法** (mirror method) を使う．

問 7. 平行な 2 枚の導体平面の間に点電荷を置いた場合，どんな鏡像電荷を想定すれば電場を求めることができるか？(ヒント：平行な 2 枚の鏡の間に手や顔を入れたらどんな光景が見えるか想像してみよ.)

問 8. 平面上の異なる 2 点 A, B と正の定数 s, t に対して，点 P を線分の長さの比が $\mathrm{AP} : \mathrm{BP} = s : t$ となるようにとると，点 P の軌跡は $s = t$ の場合は AB の垂直二等分線，$s \neq t$ の場合は円になることを証明せよ（アポロニウスの円と呼ばれる）．

問 9. 接地した導体球の外部に点電荷を置いたとき，導体球に誘導される電荷と，周りの電場を求めよ．