物理学基礎II（電磁気学），担当 谷村省吾，講義ノート 8

磁場とマクスウェル方程式

静磁場の基本法則

電荷が電場を作り，電場が電荷に力を及ぼすように，電流は磁場を作り，磁場は電流に力を及ぼす．別の言い方をすると，動いている電荷は磁場を作り，磁場は動いている電荷に力を及ぼす．

磁場をベクトル場 $\boldsymbol{B}$ で表す（歴史的な経緯のため，$\boldsymbol{B}$ は「磁束密度」と呼ばれるが，この呼び名はやめて，たんに「磁場」と呼ぶようにした方がよいと私（谷村）は思っている）．

(i) **ローレンツ力の法則** (Lorentz force law)：点電荷 q が速度 $\boldsymbol{v}$ で電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ がある場所を動くとき

$$\boldsymbol{f} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{1}$$

の力を受ける．

「磁束」と呼ばれる物理量を導入し，磁束の単位を Wb（ウェーバー），磁場（磁束密度）B の単位をテスラ $\mathrm{T} = \mathrm{Wb}\,\mathrm{m}^{-2}$ と表記する．

問 1. 一様な磁場 $\boldsymbol{B}$ の中を，長さ L のベクトル $\boldsymbol{L}$ で表される導線に沿って電流 I が流れているとき，この長さ L の導線は

$$\boldsymbol{F} = I\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B} \tag{2}$$

だけの力を受けることを証明せよ．この関係式はフレミングの左手の法則とも呼ばれる．ヒント：導線には単位長さあたり n 個の電子があるとし，各電子は電荷 q を持っており，電子が導線に沿って速度 $\boldsymbol{v}$ で動くとすると，関係式

$$I\frac{\boldsymbol{L}}{L} = qn\boldsymbol{v} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{F} = nL\boldsymbol{f} \tag{4}$$

が成立することを確認せよ．この式と (1) から (2) を導け．

問 2. 磁場 B の物理次元を長さ L, 質量 M, 時間 T, 電流 I で組み立てよ．また，磁場 B の単位を m, kg, s, A の組み合わせで表せ．

(ii) **アンペールの法則** (Ampére's law)：任意の 2 次元面 S について

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 \int_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n}\, dS \tag{5}$$

が成り立つ．アンペールの法則を言葉で言い表すと,「面 S の縁に沿う磁力線の線積分は，面 S を貫く電流の量に比例する」となる．比例係数 μ_0 は真空の透磁率と呼ばれ,

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{m\,kg\,s^{-2}\,A^{-2}} \\ &= 1.25663706 \times 10^{-6}\,\mathrm{m\,kg\,s^{-2}\,A^{-2}} \end{aligned} \tag{6}$$

は定義値である．微分形のアンペールの法則は[1]

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = \mu_0\,\boldsymbol{j} \tag{7}$$

(iii) **磁場のガウスの法則**：磁力線には湧き出し点も吸い込み点もないことが経験的に知られている．すなわち，任意の 3 次元領域 V について

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = 0 \tag{8}$$

が成り立つ．微分形では

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \tag{9}$$

[1] grad, rot, div などの微分演算やストークスの定理を今回の講義では説明していないので,「微分形の…」という部分は読み飛ばして下さい．

問 3. 無限に長い導線に沿って電流 I が流れているとき，この周りにできる磁場を求めよ．磁場を求めよと言った場合は，空間のすべての点における磁場の向きと大きさを求めよということを意味する．

問 4. 無限に長い 2 本の平行な導線があり，導線は距離 R だけ離れており，2 本の導線に沿って同方向にそれぞれ電流 I_1, I_2 が流れているとする．このとき導線に働く力の向きと，導線の単位長さあたりの力の大きさを求めよ．

問 5. 単位長さあたり N 回巻いてある無限に長いソレノイドコイルに電流 I を流す．電流の向きと磁場の向きの関係を図で表せ．コイル内にできる磁場の大きさ B を求める式を導け．$N = 10^5\,\mathrm{m}^{-1}$ のコイルで $B = 1$ T（テスラ）の磁場を作るためには，いくらの電流を流せばよいか．また，このときコイルを構成している導線にはどんな力が働くか．この力でコイルが壊れてしまわないようにするためにはどのような工夫をすべきか．

変動する電磁場

以下の部分は，講義では説明する時間がないが，電磁気学の完成された理論を見てもらいたいために書いておく．

時間とともに変化する場は，空間の点 $\boldsymbol{r}$ と時刻 t の関数になる．電場は $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ という時間変動するベクトル場になり，磁場も $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ というベクトル場になる．これらは**マクスウェル (Maxwell) 方程式**と呼ばれる以下の微分方程式のセットを満たす：

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho \tag{10}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{11}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = \mu_0\left(\boldsymbol{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) \tag{12}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \tag{13}$$

問 6. マクスウェル方程式を積分形で書け．

問 7. (12) の両辺の div を計算することによって，電荷の保存則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\boldsymbol{j} = 0 \tag{14}$$

を導け．

問 8. 電荷も電流もない真空中という条件で，(11), (12) の両辺の rot を求め，式変形することによって，$\boldsymbol{E}$ だけ，あるいは $\boldsymbol{B}$ だけに対する方程式を導け．

問 9. ε_0, μ_0 と光速 c の関係式を書け．

参考文献

[1] パーセル「バークレー物理学コース 2：電磁気 上・下」第 2 版（丸善）

[2] 長岡洋介「電磁気学 1, 2」（岩波書店）

[3] 砂川重信「電磁気学」（岩波書店）

[4] 砂川重信「電磁気学演習」（岩波書店）

[5] ファインマン，レイトン，サンズ（宮島龍興訳）「ファインマン物理学 3：電磁気学」（岩波書店）

[6] 北野正雄「マクスウェル方程式：電磁気学のよりよい理解のために」（サイエンス社）

[7] 今井功「電磁気学を考える」（サイエンス社）

[8] 太田浩一「電磁気学の基礎 1, 2」（シュプリンガー・ジャパン）

[9] 兵頭俊夫「電磁気学」（裳華房）

[10] 小塚洋司「電気磁気学」（森北出版）