微分積分の復習

力学 (mechanics) は物体の運動を記述し予測する学問である．自動車やエレベーターなどすべての機械の設計には力学が使われているし，力学のおかげで惑星の運動を正確に予測したり人工衛星を狙い通りに動かしたりできる．

一方で，微分積分を厳密にした数学の分野を**解析学** (analysis) という．解析学は極限を扱う数学だと言ってもよい．「ゼロじゃないけど限りなくゼロに近い」とか「円を無数の長方形に分割する」とかいったことはどういうことかをきちんと答えるのが解析学だと言える．

この講義では**解析力学** (analytical dynamics) と呼ばれる理論物理の一分野を学ぶ．解析学のことば・方法を用いて力学を数学的にきっちりと仕上げた理論だから「解析力学」という名がつけられたらしい．

解析力学は，たんに力学を数学的に書き換えただけのものではなく，力学の問題を見通し良く立てたり解いたりするのに役立っており，現実的な問題への適用範囲も広い．解析力学はいろいろな具体的問題に応用できるということは，解析力学自体はあまり具体的ではなく，抽象的な理論であり，最初はとっつきにくい．

ということで，解析力学を習得するためには，微分積分などの数学が必須である．微積分の知識があやふやな人・微積分を使いこなせない人は，これを機にしっかり勉強しなおしてほしい．

集合

数やものの明確な集まりを**集合** (set) という．集合 X に入っているものを集合の**元** (element) という．a が X の元であることを $a \in X$ と書き，b が X の元ではないことを $b \notin X$ と書く．

X が数学的な集合であるというためには，X の元であるか否かが明確に決まっていないといけない．例えば「背の高い人の集合」に身長 165cm の人は入るか入らないか，はっきり決まらないので,「背の高い人の集合」は数学的な集合ではない．

a, b, c という元が集まって集合 A ができていることを

$$A = \{a, b, c\} \tag{1}$$

と書く．集合の元は有限個とは限らず，無限個の元からなる集合もある．例えば，正の偶数全体の集合

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10, \cdots\} \tag{2}$$

は無限集合である．よく使われる集合として**自然数** (natural number) 全体の集合

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\} \tag{3}$$

と**実数** (real number) 全体の集合 $\mathbb{R}$ がある．

集合を指定する方法として，元が満たす条件を言う方法がある．例えば,

$$\begin{aligned} C &= \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \text{ は } 100 \text{ 以下で}, 12 \text{ で割り切れる }\} \\ &= \{12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96\} \end{aligned} \tag{4}$$

といった書き方ができる．

$$D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 \leq x < 2\} \tag{5}$$

と書いたら，これは 1 以上で 2 より小さい実数全体の集合である．$1.999 \in D$ だが $2 \notin D$ である．

集合 A の元 x と集合 B の元 y とを組み合わせて (x, y) という元を作ることができる．例え

ば $A=\{$ 甘い，辛い，酸っぱい $\}$ という集合と，$B=\{$赤，青，緑$\}$ という集合から (甘い, 赤) という組み合わせ元を作ることができる．

集合 A の元と集合 B の元の組を全部集めた集合を

$$A \times B = \{(x,y)\,|\,x \in A,\, y \in B\} \tag{6}$$

と書き，これを集合 A と集合 B の**直積集合** (direct product) という．とくに $A \times A$ のことを A^2 と書く．同様にして $A \times B \times C$ なども定義できる．

自然数 n に対して集合 A の n 重直積集合

$$\begin{aligned} A^n &= A \times A \times \cdots \times A \\ &= \{(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,|\,x_1, x_2, \cdots, x_n \in A\} \end{aligned} \tag{7}$$

を定める．とくに $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$ などの集合を今後よく使う．

写像

集合 X と集合 Y があったとき（X と Y は同じ集合でもかまわない)，集合 X の各元 $x \in X$ に対して集合 Y の元 $f(x) \in Y$ を対応させる規則 f があれば，この f を集合 X から集合 Y への**写像** (mapping) といい，$f : X \to Y$ と書く．また，元の対応を $x \mapsto f(x)$ と書く．

例えば,

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 \tag{8}$$

は写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を定める．

$$g(x) = (x+1)^2 \tag{9}$$

としたものは $f(x)$ とは計算の仕方が異なるし，計算の手間も異なるが，計算結果は必ず一致するので，f と g は写像としては同じものと見なす．

とくに実数 $\mathbb{R}$ から実数 $\mathbb{R}$ への写像を**関数** (function) ということが多い．また，$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への写像を多変数関数という．

集合 X に対して，写像 $I : X \to X$ で，任意の元 $x \in X$ に対して

$$I(x) = x \tag{10}$$

が成り立つ I を集合 X 上の**恒等写像** (ideintity mapping) という．集合 X の恒等写像だということを強調するために I_X とか id_X と書くこともある．

写像 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ があれば**合成写像** (composite)

$$g \circ f : X \to Z, \qquad x \mapsto g \circ f(x) = g(f(x)) \tag{11}$$

が定まる．

写像 $f : X \to Y$ に対して写像 $\tilde{f} : Y \to X$ で

$$\tilde{f} \circ f = I_X \quad \text{かつ} \quad f \circ \tilde{f} = I_Y \tag{12}$$

を満たすものがあれば，$\tilde{f}$ を f の**逆写像** (inverse) といい，$\tilde{f} = f^{-1}$ と書く．

問 1. 次の関数はどのような関数の合成写像とみなせるか．できるだけ多くの写像に分解せよ．

$$z = \sin^2 x \tag{13}$$

$$z = \sin 4x \tag{14}$$

$$z = \sqrt{a + (x-b)^2} \tag{15}$$

微分と導関数

関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{16}$$

が存在すれば，$f'(a)$ を関数 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数という．

任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad (17)$$

を定めることによって関数 $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が定まれば，f' を関数 f の**導関数** (derivative) という．どういう関数 $y = f(x)$ のことを指しているか文脈から明らかな場合は，変数だけを使って

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad (18)$$

と書くこともある．

変数 t が「時間」を表している場合，関数 $f(t)$ の微分を上付きのドット（点）で表すこともある：

$$\dot{f}(t) = \frac{df}{dt} \quad (19)$$

$$\ddot{f}(t) = \frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{d}{dt} f \quad (20)$$

定理 1（極大極小なら微分がゼロ）．関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $x = a$ のところで極大または極小値をとるならば，$f'(a) = 0$ である．

定理 2（合成関数の微分に関する鎖則）．合成関数の微分に関して

$$\frac{d}{dx} g(f(x)) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \quad (21)$$

が成り立つ．$y = f(x), z = g(y)$ の変数だけを使って

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (22)$$

定理 3（逆関数の微分は元の関数の微分の逆数に等しい）．$y = f(x)$ の逆関数 $x = f^{-1}(y)$ が存在するならば，

$$\frac{dx}{dy}(f(x)) = \frac{1}{\frac{dy}{dx}(x)} \quad (23)$$

問 2．極大・極小の定義を正確に述べよ．また，定理 1 を証明せよ．

問 3．定理 2 を証明せよ．

問 4．定理 3 を証明せよ．

問 5．次の関数の導関数を求めよ．

$$y = \sin^3(4x^2 + 6) \quad (24)$$

$$y = \exp\left(6x^2 + \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}\right) \quad (25)$$

$$y = \log(\cos x) \quad (26)$$

よく使われる関数

指数関数は

$$\begin{aligned} e^x &= \exp x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \quad (27) \end{aligned}$$

で定められる．また，$e^y = x$ のことを $y = \log x$ と書き，log を対数関数という．

虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ は $i^2 = -1$ を満たす記号として定義される．そうすると

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}\, x^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}}{(2k)!}\, x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1}}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} \end{aligned} \quad (28)$$

となる．ここで

$$\begin{aligned} \cos x &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k} \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots \quad (29) \\ \sin x &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots \quad (30) \end{aligned}$$

で三角関数を定義する．そうすると，

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{31}$$

が成り立つ．

また，

$$\begin{aligned} \cosh x &:= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \cdots \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} \sinh x &:= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \cdots \end{aligned} \tag{33}$$

で双曲線関数を定義する．cosh は hyperbolic cosine, sinh は hyperbolic sine と呼ばれる．

問 6. 次の関係式が成り立つことを示せ．

$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax} \tag{34}$$

$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x} \tag{35}$$

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \tag{36}$$

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \tag{37}$$

問 7. 次の関数の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めよ．

$$y = \cosh x \tag{38}$$

$$y = \sinh x \tag{39}$$

$$y = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \tag{40}$$

$$y = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \tag{41}$$

$$y = \cos x \tag{42}$$

$$y = \sin x \tag{43}$$

$$y = \cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \tag{44}$$

$$y = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \tag{45}$$

不定積分

関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して

$$\frac{dF}{dx} = f(x) \tag{46}$$

となるような関数 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ があれば，F を f の**原始関数**という．任意の定数 C に対して

$$\frac{d}{dx}(F(x) + C) = \frac{dF}{dx} \tag{47}$$

なので，$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数なら，$F(x)+C$ も $f(x)$ の原始関数である．つまり，原始関数は一意的ではない．このことを注意して

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{48}$$

と書き，関数 $f(x)$ の不定積分という．C を積分定数という．

定積分

定積分はリーマン積分とも呼ばれ，ちゃんとした定義があるが，その説明は省略する．

定理 4（微分積分の基本定理）.

$$\int_a^b \frac{dF}{dx} dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a) \tag{49}$$

および

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \tag{50}$$

が成り立つ．

問 8. 定積分（リーマン積分）の定義を述べよ．また，定理 4 を証明せよ．

定理 5（部分積分）. 関数 $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とすると次式が成り立つ：

$$\begin{aligned} &\int_a^b f'(x)g(x)\,dx \\ &= \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx \end{aligned} \tag{51}$$

問 9. 定理 5 を証明せよ．

偏微分

関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は n 個の実数変数 $(x_1, \cdots, x_n)$ を持つ関数だが，その中の i 番目の変数だけについての微分を

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_n)\\ := \ &\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big\{f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \cdots, x_n)\\ &\qquad -f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)\Big\}\end{aligned} \tag{52}$$

で定める．これを変数 x_i についての偏微分という．

同様に，変数 x_i, x_j についても偏微分を繰り返すことができて，それを

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \tag{53}$$

と書く．

問 10. 次の関数

$$f(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \tag{54}$$

について次の導関数を求めよ：

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \tag{55}$$

さらに，$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

多変数関数の合成関数の微分

多変数関数

$$f(x_1, \cdots, x_n) \tag{56}$$

に n 個の関数

$$x_1 = \varphi_1(t), \ \cdots, \ x_n = \varphi_n(t) \tag{57}$$

を代入すると 1 変数関数

$$g(t) = f(\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)) \tag{58}$$

が定まる．これを t について微分すると次のような関係式が成り立つ：

定理 5（多変数関数の鎖則）.

$$\frac{d}{dt}f(\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{dx_i}{dt} \tag{59}$$

問 11. 定理 5 を証明せよ．

問 12. x, y, u, v が t の関数であり，

$$\frac{dx}{dt} = u \tag{60}$$

$$\frac{dy}{dt} = v \tag{61}$$

$$\frac{du}{dt} = x \cdot g(x^2 + y^2) \tag{62}$$

$$\frac{dv}{dt} = y \cdot g(x^2 + y^2) \tag{63}$$

という関係式を満たしているとする．ここで g は適当な関数である．このとき，関数

$$f(x, y, u, v) := xv - yu \tag{64}$$

について

$$\frac{df}{dt} \tag{65}$$

を求めよ．

参考書

自分は数学の知識が足りないと思ったら，シラバスを見たり，図書館にある本を眺めたりして，自分に合う本を見つけて勉強して下さい．例えば

・齋藤正彦『微分積分学』（東京図書）

は良い本だと思います．

解析力学の教科書としては

・小出昭一郎『解析力学』物理入門コース 2（岩波書店）

・大貫義郎『解析力学』物理テキストシリーズ 2（岩波書店）

・江沢 洋『解析力学』新物理シリーズ 36（培風館）

・山本義隆・中村孔一『解析力学 1, 2 巻』（朝倉書店）

・ゴールドスタイン『古典力学 上・下巻』（吉岡書店）

などが優れた本だと思います．