物質情報学１（解析力学），担当 谷村省吾

演習問題

1. 以下の関係式を証明せよ．ただし $f(x,y)$ は微分可能な任意の関数である．

(1) $\dfrac{d}{dt}f\bigl(x(t),y(t)\bigr)=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dt}$

(2) $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial y}f=\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial x}f$

2. $2n+1$ 個の変数を持つ関数 $L(q_1,\cdots,q_n,v_1,\cdots,v_n,t)$ に，変数 t の関数 $q_i(t)$ $(i=1,\cdots,n)$ とその導関数 $\dot{q}_i(t)=\dfrac{dq_i}{dt}$ $(i=1,\cdots,n)$ を代入して，t について $t_1\le t\le t_2$ の範囲で積分して作用

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L\bigl(\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t),\,t\bigr)dt=\int_{t_1}^{t_2}L\bigl(q_1(t),\cdots,q_n(t),\dot{q}_1(t),\cdots,\dot{q}_n(t),t\bigr)dt$$

の値を定める．ここで $\boldsymbol{q}=(q_1,\cdots,q_n)$, $\dot{\boldsymbol{q}}=(\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_n)$ という書き方をした．$\eta_i(t)$ $(i=1,\cdots,n)$ を微分可能な任意の関数で $\eta_i(t_1)=\eta_i(t_2)=0$ を満たすものとする．ε を実数変数とし，$\varepsilon=0$ のところで S の値が極小または極大になるという条件

$$\begin{aligned}0&=\frac{d}{d\varepsilon}\int_{t_1}^{t_2}L\bigl(\boldsymbol{q}(t)+\varepsilon\boldsymbol{\eta}(t),\,\dot{\boldsymbol{q}}(t)+\varepsilon\dot{\boldsymbol{\eta}}(t),\,t\bigr)dt\Big|_{\varepsilon=0}\\&=\frac{d}{d\varepsilon}\int_{t_1}^{t_2}L\bigl(q_1(t)+\varepsilon\eta_1(t),\cdots,q_n(t)+\varepsilon\eta_n(t),\dot{q}_1(t)+\varepsilon\dot{\eta}_1(t),\cdots,\dot{q}_n(t)+\varepsilon\dot{\eta}_n(t),t\bigr)dt\Big|_{\varepsilon=0}\end{aligned}$$

から n 個のオイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0\qquad(i=1,\cdots,n)$$

を導け.

3. 以下の力 $\boldsymbol{F}=(F_x,F_y,F_z)$ に対する位置エネルギー $V(x,y,z)$ を求めよ．ただし，位置エネルギー $V(x,y,z)$ は

$$-\frac{\partial V}{\partial x}=F_x,\quad -\frac{\partial V}{\partial y}=F_y,\quad -\frac{\partial V}{\partial z}=F_z$$

の 3 つの式を同時に満たす関数である．また，m,g,a,b,c は実数定数である．

(1) $\boldsymbol{F}=(0,0,-mg)$

(2) $\boldsymbol{F}=(a,b,c)$

(3) $\boldsymbol{F}=(ax,by,cz)$

(4) $\boldsymbol{F} = (ay, ax, 0)$

(5) $\boldsymbol{F} = \left(\dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right)$

4. 地面に平行な x 軸と，地面に垂直で上向きの y 軸を設定する．このような xy 平面を鉛直平面という．$y = -x\tan\alpha$ （α は定数）で表される斜面を質量 m の質点が動くとする．r を一般化座標として（つまり $r(t)$ を時間変化する独立変数として），斜面上の質点の位置を

$$x = r\,\cos\alpha, \quad y = -r\,\sin\alpha$$

で表す．質点には下向きに一定の重力 mg が働いており，摩擦力は働いていないとする．ラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

を r と $\dot{r}$ だけの関数に書き換えて，r に対するオイラー・ラグランジュ方程式を求めよ．また，その方程式の初期値問題を解け（関数 $r(t)$ を $r(0)$ と $\dot{r}(0)$ と t の式で表せ，ということ）．

5. 地面に水平な x 軸と，地面に垂直で上向きの y 軸を設定し，$y = \dfrac{1}{2a}x^2$（a は定数）で表される曲線に拘束されて質量 m の質点が動くとする．質点には下向きに一定の重力 mg が働いており，摩擦力は働いていないとする．ラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

を一般化座標 x と $\dot{x}$ だけの関数に書き換えてオイラー・ラグランジュ方程式を求めよ．

6. 3 次元空間中で地面に垂直な軸の周りを半径 a の円周が一定の角速度 ω で回転している．この円周上に拘束されている質量 m の質点を考える．θ を一般化座標として，質点の位置を

$$x = a\,\sin\theta\,\cos\omega t, \quad y = a\,\sin\theta\,\sin\omega t, \quad z = -a\,\cos\theta$$

で表す．質点には下向きに一定の重力 mg が働いており，摩擦力は働いていないとする．

(1) ラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

を θ と $\dot{\theta}$ だけの関数に書き換えてオイラー・ラグランジュ方程式を求めよ．

(2) 質点が円周に対して相対的に動かない解，すなわち，任意の時刻 t に対して $\theta(t) = \theta_0 =$ 一定となるような解をすべて求めよ（ヒント：上で求めたオイラー・ラグランジュ方程式に $\dot{\theta} = 0, \ddot{\theta} = 0$ を代入して θ を求める）．このような θ_0 で表される点を「動かない点，釣り合っている点」という意味で平衡点という．

7. 平面上の動かない点 P の座標を (x_0, y_0) とする．また，平面において，方程式 $ax + by + c = 0$ で表される直線 ℓ 上の点 Q の座標を (x, y) とする．点 Q を直線 ℓ に沿って動かして，2 点 P, Q の距離が最短となるような点 Q の位置と，そのときの線分 PQ の長さを，以下の 2 通りの方法で求めよ．

(1) （消去法）線分 PQ の長さの 2 乗を

$$f(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

と書く．求めたいのは，拘束条件 $ax + by + c = 0$ のもとで f の値を最小にするような (x, y) である．次の手順で解け．i) 方程式 $ax + by + c = 0$ を y について解いて，y を x の式で表せ．ii) この式を f に代入して f を x だけの関数で表せ．iii) そうして f の値を最小にするような x を求めよ．iv) そして，そのときの y と f の値を求めよ．v) この f の平方根が PQ の最短距離である．

(2) （ラグランジュの未定乗数法）実数変数 λ を導入して

$$F(x, y, \lambda) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - \lambda(ax + by + c)$$

を定め，(x, y, λ) を無制限に動かして F の値を最小にするような (x, y, λ) を求めよ．また，そのときの F の値を求めよ．これらの結果を (1) の結果と比べよ．

8. 地面に水平な x 軸と，地面に垂直で上向きの y 軸を設けた鉛直平面上を 2 つの質点が動く．質量 m_1 の質点の座標を (x_1, y_1), 質量 m_2 の質点の座標を (x_2, y_2) とする．これらは，拘束条件

$$y_1 = 0, \qquad (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = a^2$$

を満たすとする．つまり，質点 1 は x 軸に沿って動き，質点 1 と 2 は長さが a の棒でつながれている．この拘束条件を満たす質点の位置は，一般化座標 (x, ϕ) を用いて

$$x_1 = x, \qquad y_1 = 0, \qquad x_2 = x + a\sin\phi, \qquad y_2 = -a\cos\phi$$

と表すことができる．

(1) ラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - m_1 g y_1 - m_2 g y_2$$

を $(x, \phi, \dot{x}, \dot{\phi})$ の関数として表せ．そして，オイラー・ラグランジュ方程式を導け．

(2) 上で求めたラグランジアン $L(x, \phi, \dot{x}, \dot{\phi})$ はじつは x に依存しないことを確認せよ．このことから保存量を一つ見つけよ．

(3) 上の事実を使って ϕ に対するオイラー・ラグランジュ方程式を簡単化せよ．

9. （ネーターの定理）ε を微小な（0 に近い）実数パラメータとして，一般化座標 q_i $(i = 1, \cdots, n)$ に $q_i \to q_i' = q_i + \varepsilon f_i(\boldsymbol{q})$ という変換を施したときラグランジアンが

$$L(\boldsymbol{q} + \varepsilon \boldsymbol{f}, \dot{\boldsymbol{q}} + \varepsilon \dot{\boldsymbol{f}}, t) = L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$$

のように不変であるとする．このとき，$\boldsymbol{q}(t)$ がオイラー・ラグランジュ方程式を満たすならば，保存則

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} f_i\right) = 0$$

が成り立つことを証明せよ．

10. 3 次元ベクトル

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

の内積と外積をそれぞれ

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z, \qquad \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}$$

で定める．内積は実数であり，外積はベクトルである．ベクトル $\boldsymbol{A}$ のノルムと呼ばれる数を

$$||\boldsymbol{A}|| = \sqrt{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}} = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2 + (A_z)^2}$$

で定める．以下の関係式が成り立つことを証明せよ．

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}, \tag{3}$$

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) \cdot \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = 0, \tag{5}$$

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = ||\boldsymbol{A}||^2 \, ||\boldsymbol{B}||^2 - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^2, \tag{6}$$

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{A}, \tag{7}$$

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} + (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) \times \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}, \tag{8}$$

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{D})(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}), \tag{9}$$

$$||\boldsymbol{A}|| \, ||\boldsymbol{B}|| \geq |\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}|. \tag{10}$$

11. 3 次元ベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の外積 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ のノルムは，2 つのベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積に等しいことを示せ．$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ は，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の両方に垂直なベクトルであることを示せ．また，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ の順に右手系をなすことを示せ．

12. 3 次元ベクトル $\boldsymbol{A}$ と，ノルムが 1 のベクトル $\boldsymbol{n}$ と，微小な実数 ε に対して，$\boldsymbol{n}$ を軸としてベクトル $\boldsymbol{A}$ を角度 ε だけ回転させたとき，$\boldsymbol{A}$ は

$$\delta\boldsymbol{A} = \varepsilon\,\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}$$

の分だけ変化することを示せ.

13. N 個の質点からなる系を考える．それぞれの質量は $m_1, m_2, \cdots, m_N$, 位置ベクトルは $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N$ とする．ラグランジアンは

$$L = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\,\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i - V(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N)$$

で与えられる．質点系はオイラー・ラグランジュ方程式に従って運動しているとする．このとき以下の問に答えよ.

(1) 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$ と任意の実数 ε に対して

$$V(\boldsymbol{r}_1+\varepsilon\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}_2+\varepsilon\boldsymbol{a}, \cdots, \boldsymbol{r}_N+\varepsilon\boldsymbol{a}) = V(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N)$$

が成り立つならば，位置エネルギー V はベクトル $\boldsymbol{a}$ の方向に並進不変であるという．このとき，

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{a}\cdot\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\right) = 0$$

が成り立つことを示せ．この結果は，質点の運動量の総和の $\boldsymbol{a}$ の方向成分が保存量であることを意味している.

(2) 3 次元ベクトル $\boldsymbol{n}$ と任意の微小実数 ε に対して

$$V(\boldsymbol{r}_1+\varepsilon\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2+\varepsilon\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{r}_N+\varepsilon\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}_N) = V(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N)$$

が成り立つならば，位置エネルギー V はベクトル $\boldsymbol{n}$ を軸とする回転に関して不変であるという．このとき，

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{r}_i\times\dot{\boldsymbol{r}}_i\right) = 0$$

が成り立つことを示せ．この結果は，質点の角運動量の総和の $\boldsymbol{n}$ 方向成分が保存量であることを意味している.

14. 以下の手順に従って，関数 $f(x)$ をルジャンドル変換した関数 $g(p)$ を求めよ．

(i) 関数 $y=f(x)$ のグラフを描け．

(ii) $p=f'(x)$ を求めて，横軸を x, 縦軸を p とするグラフを描け．

(iii) この式を x について解いて x を p の式で表せ．横軸を p, 縦軸を x として，この関数 $x=\psi(p)$ のグラフを描け．

(iv) $g(p)=f-px$ を計算して x を消去して g を p だけの式で表せ．横軸を p, 縦軸を g として，この関数のグラフを描け．

(v) $x=-g'(p)$ を計算せよ．これが (iii) で求めた $x=\psi(p)$ と一致することを確かめよ．

以上の (i) から (v) までの手順を以下のすべての関数について繰り返せ．

$$(1) \quad f(x)=\frac{1}{2}x^2$$

$$(2) \quad f(x)=-\sqrt{1-x^2} \qquad (-1<x<1)$$

$$(3) \quad f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}(x+1)^2 & (x\leq -1) \\ 0 & (-1<x<1) \\ \frac{1}{2}(x-1)^2 & (x\geq 1) \end{cases}$$

$$(4) \quad f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x(x-2) & (x\leq 0) \\ \frac{1}{2}x(x+2) & (x>0) \end{cases}$$

$$(5) \quad f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}(x+1)^2+1 & (x\leq -2) \\ -x-\frac{1}{2} & (-2<x\leq -1) \\ \frac{1}{2}x^2 & (-1<x\leq 1) \\ x-\frac{1}{2} & (1<x\leq 2) \\ \frac{1}{2}(x-1)^2+1 & (2<x) \end{cases}$$

$$(6) \quad f(x)=\begin{cases} -x-1 & (x\leq -2) \\ -\frac{1}{2}x & (-2<x\leq 0) \\ \frac{1}{2}x & (0<x\leq 2) \\ x-1 & (2<x) \end{cases}$$

15. 関数 $L(\boldsymbol{q},\boldsymbol{v},t)=L(q_1,\cdots,q_n,v_1,\cdots,v_n,t)$ から導関数

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial v_i}=p_i(\boldsymbol{q},\boldsymbol{v},t) \qquad (i=1,\cdots,n)$$

を定める．この式を v_i について解いて関数

$$v_i=v_i(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) \qquad (i=1,\cdots,n)$$

を定めることができたとする．この関係式を使うことによって

$$\begin{aligned} H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) &= \sum_{i=1}^{n} p_i v_i - L \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot v_i(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) - L(\boldsymbol{q},\boldsymbol{v}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t),t) \end{aligned}$$

を変数 $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$ の関数として表すことができる．このとき，$(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$ を独立変数として扱って，以下の関係式が成り立つことを確かめよ：

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_j} &= v_j + \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial v_i}{\partial p_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial v_i}\frac{\partial v_i}{\partial p_j} = v_j, \\ \frac{\partial H}{\partial q_j} &= \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial v_i}{\partial q_j} - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial v_i}\frac{\partial v_i}{\partial q_j} \right) = -\frac{\partial L}{\partial q_j}. \end{aligned}$$

さらに，$q_j(t)$ を時刻 t の関数とし，$v_j = \dot{q}_j(t)$ を代入し，オイラー・ラグランジュ方程式を用いて

$$\begin{aligned} \dot{q}_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j}, \\ \dot{p}_j &= -\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad (j = 1,\cdots,n) \end{aligned}$$

が成り立つことを示せ．この式はハミルトンの運動方程式とか正準運動方程式と呼ばれる．関数 H はハミルトニアンと呼ばれる．

16. 3次元空間の座標を (x,y,z), 時刻を t で表す．関数 $\phi(x,y,z,t)$ と $A_x(x,y,z,t)$, $A_y(x,y,z,t)$, $A_z(x,y,z,t)$ は微分可能な関数とする．時刻 t における質点の位置を $\boldsymbol{r}(t) = (x(t),y(t),z(t))$ とし，質量 m の質点のラグランジアンを

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) + \dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z - \phi$$

とする．このラグランジアンに対するオイラー・ラグランジュ方程式が

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} + \dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right), \\ m\ddot{y} &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} + \dot{z}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) - \dot{x}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right), \\ m\ddot{z} &= -\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} + \dot{x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - \dot{y}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \end{aligned}$$

となることを示せ．また，正準運動量を

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + A_x, \\ p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + A_y, \\ p_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + A_z \end{aligned}$$

で定める．このときハミルトニアン

$$H = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - L$$

を $(x, y, z, p_x, p_y, p_z, t)$ の式で表せ．

参考文献

[1] ランダウ，リフシッツ『力学（増訂第 3 版）ランダウ=リフシッツ理論物理学教程』東京図書 (1986).

[2] ランダウ，リフシッツ『力学・場の理論 — ランダウ=リフシッツ物理学小教程』ちくま学芸文庫 (2008).

[3] 大貫義郎『解析力学』物理テキストシリーズ 2，岩波書店 (1987).

[4] ゴールドスタイン『古典力学 上・下巻』吉岡書店 (第 2 版 1983, 第 3 版 2006).

[5] 和達三樹『物理のための数学』物理入門コース 10，岩波書店 (1983).