物質情報学5（量子力学），担当 谷村省吾，講義ノート4

数量概念と次元解析

数と量と単位

物理で重要となる数と量の違いについて解説しておく．

数 (number) は，1 つ 2 つと**数えられる** (countable) ものを抽象化した概念である．例えば「リンゴが 3 個」,「カラスが 3 羽」と言っているときの「3」が数である．

量 (quantity) とは，1 つ 2 つと数えることはできないが (uncountable)，長さとか嵩（かさ）とか重さといった質を備えていて，大小・多少・長短・高低・重軽などの比較が可能なものを抽象化した概念である．また，量は 2 倍，3 倍などのスカラー倍演算が可能である．例えば，L という長さを 10 倍した $10L$ という長さがあり得る．量の足し算も可能である．例えば，長さ L_1 と L_2 を足した長さ $L_1 + L_2$ が定まる．すなわち，**量とは，同質性・大小関係があり，スカラー倍・加法性という演算が可能なものである．**

例えば，運動場の横幅の長さや，テニスコートの縦横の長さは量である．**長さそのものは数えられない**が，運動場を歩けば「120 歩」というように,「1 歩」の何倍なのかということは数えることはできる．つまり，**基準の量を定めれば，基準量の何倍の大きさかという数は勘定できる．**そのような基準量のことを**単位量** (unit) ともいう．このことは，

$$\text{量} = \text{係数} \times \text{基準量} \tag{1}$$

と書くことができる．例えば，長さについて

$$L = 3\,\mathrm{m} = 300\,\mathrm{cm} \tag{2}$$

という式は,「L という量は，m（メートル）という単位量の 3 倍に等しい，また，cm（センチメートル）という単位量の 300 倍にも等しい」ことを意味する．標語的に言うと，**量そのものは数ではないが，単位量を決めると量は数で表される．**

$L_1 = 3\,\mathrm{m}$ と $L_2 = 50\,\mathrm{cm}$ という長さの足し算は，1 m =100 cm（1m は 1cm の 100 倍に等しい，と読んでほしい）という単位の変換により

$$\begin{aligned} L_1 + L_2 &= 3\,\mathrm{m} + 50\,\mathrm{cm} \\ &= 3 \times 100\,\mathrm{cm} + 50\,\mathrm{cm} \\ &= 300\,\mathrm{cm} + 50\,\mathrm{cm} \\ &= (300 + 50)\,\mathrm{cm} \\ &= 350\,\mathrm{cm} \\ &= 3.5 \times 100\,\mathrm{cm} \\ &= 3.5\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{3}$$

と計算される．他方，長さと質量を足そうと思っても，いくら単位を変換しても同一の単位にそろえることができないので，一つの量にまとまらない：

$$\begin{aligned} L + M &= 3\,\mathrm{m} + 50\,\mathrm{g} \\ &= 300\,\mathrm{cm} + 0.05\,\mathrm{kg} \end{aligned} \tag{4}$$

長さ同士，あるいは質量同士のように足し算ができる量のことを**次元がそろっている量**という．

物理量は特定の単位で測らなければならないわけではない．例えば，メートルで表そうが，インチで表そうが，フィートで表そうが，長さは長さである（1 インチ =2.54 cm, 1 フィート =30.48 cm）．そう考えると，文字記号で長さを表すときは,「長さ L m」と書くよりも，記号 L に単位も含めてしまって**「長さ L」と書く**

方がよい.「長さ L m」と書いてしまうと，m 以外の単位が使えなくなってしまう.「長さ L」と書いておけば L を m で測ることも cm で測ることもできて，$L = 3\,\mathrm{m} = 300\,\mathrm{cm}$ という式を書いてよい.

「長さ L」という書き方にしておくと，どんな単位系でも成り立つ関係式を書ける．例えば，縦横の辺の長さが L_1, L_2 の長方形の面積は $S = L_1 L_2$ であるが，この関係式は長さを m で表しても cm で表しても成り立つ．また，長さの単位を選べば自動的に面積の単位も決まる.

また，$L = 3\,[\mathrm{m}]$ のように単位に括弧を付けて書く流儀もあるが，この流儀はやめた方がよい.「長さ L は m の 3 倍だ」と言いたいのだから堂々と $L = 3\,\mathrm{m}$ と書けばよい.

同様に,「質量 M kg の物体」と書くよりも「質量 M の物体」と書いた方がよい．例えば

$$M = 1\,\text{ポンド} = 453\,\mathrm{g} = 0.453\,\mathrm{kg} \tag{5}$$

というように単位の異なる値を等号で結んでもよい.

物理量に具体的な値を代入して計算するときは，単位を付けたまま計算するとよい．例えば，速度 V，時間 T で進む距離は $L = VT$ だが，時速 270 km を秒速に換算するのは，1 km = 1000m, 1 時間=60 分，1 分= 60 秒などから

$$\begin{aligned} V &= \frac{L}{T} = \frac{270\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{h}} \\ &= \frac{270 \times 10^3\,\mathrm{m}}{1 \times 60\,\mathrm{min}} = \frac{270 \times 10^3\,\mathrm{m}}{1 \times 60 \times 60\,\mathrm{s}} \\ &= \frac{2.7 \times 10^2 \times 10^3\,\mathrm{m}}{3.6 \times 10^3\,\mathrm{s}} \\ &= \frac{2.7}{3.6} \times 10^2\,\mathrm{m\,s^{-1}} = \frac{3}{4} \times 10^2\,\mathrm{m\,s^{-1}} \\ &= 0.75 \times 10^2\,\mathrm{m\,s^{-1}} \\ &= 75\,\mathrm{m\,s^{-1}} \end{aligned} \tag{6}$$

と計算できる．正しい式を書けば正しい単位が自動的に付いてくるはずなので，計算のチェックにもなる.

量の掛け算・割り算により新しい次元の量が定義される. 例えば，力 F と距離 L の掛け算で仕事 $W = FL$ という別種の量が定まる．具体的に，力 $F = 10$ N（N は力の単位，ニュートン）で物体を L =3 m 動かす仕事は

$$W = FL = (10\,\mathrm{N}) \times (3\,\mathrm{m}) = 30\,\mathrm{Nm} = 30\,\mathrm{J} \tag{7}$$

に等しい（J は仕事の単位，ジュール）．$W = FL$ という関係は

$$F = \frac{W}{L} \tag{8}$$

とも書けて,「力とは長さあたりの仕事である」ことを意味する．例えば，10N の力とは，1m あたり 10J の仕事をする力であり,

$$F = 10\,\mathrm{N} = 10\,\mathrm{J\ m^{-1}} \tag{9}$$

と書いてよい.

また，面積と圧力を掛け算すると力になる．力を面積で割ると圧力になる．つまり，圧力とは単位面積あたりの力である．1m^2 あたり 1N の力がかかる圧力が 1Pa（パスカル）である．また，100Pa = 1hPa（ヘクトパスカル）と定める．1 気圧 =1013 ヘクトパスカルは

$$\begin{aligned} P &= 1013\,\mathrm{hPa} \\ &= 1013 \times 100\,\mathrm{Pa} \\ &= 1013 \times 100\,\mathrm{N\ m^{-2}} \\ &= 1.013 \times 10^5\,\mathrm{N\ m^{-2}} \end{aligned} \tag{10}$$

に等しい.

質量 1kg の物体に働く重力を「1kg 重」という．これは 1kg の物体に $9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ の加速度を与える力であり,（質量）×（加速度）=（力）なので,

$$1\,\mathrm{kg}\,\text{重} = 1\,\mathrm{kg} \times 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}} = 9.8\,\mathrm{N} \tag{11}$$

に等しい．また,

$$1\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{cm} = 10^2\,\mathrm{cm} \tag{12}$$

である．上に示した気圧 $P = 1013\,\mathrm{hPa}$ は,

$$\begin{aligned} P &= 1.013 \times 10^5 \,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \\ &= 1.013 \times 10^5 \,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}\,重}\,\frac{\mathrm{kg}\,重}{(100\,\mathrm{cm})^2} \\ &= 1.013 \times 10^5 \,\frac{\mathrm{N}}{9.8\mathrm{N}}\,\frac{\mathrm{kg}\,重}{10^4\,\mathrm{cm}^2} \\ &= \frac{1.013}{9.8} \times 10^5 \times 10^{-4}\,\frac{\mathrm{kg}\,重}{\mathrm{cm}^2} \\ &= 0.1034 \times 10^1\,\mathrm{kg}\,重\,\mathrm{cm}^{-2} \\ &= 1.034\,\mathrm{kg}\,重\,\mathrm{cm}^{-2} \qquad (13) \end{aligned}$$

と換算される．つまり，1 気圧とは，1 cm^2 あたり 1.03 kg の重さがのしかかっているくらいの圧力である．

また，質量密度とは，単位体積あたりの質量である．体積と密度を掛け算したものが質量である．ただし，日常的な感覚すると，1 m^3 あたりの鉄やコンクリートの質量はあまりにも大きいので，質量密度は 1 cm^3 あたりの質量を g（グラム）で測る単位，$\mathrm{g\,cm}^{-3}$ で表示することが多い.

有効数字

どのような測定値も限りなく正確なわけではなく，測定値には不確かさが伴う．例えば，鉛筆の長さをものさしで測るとき，ものさしの目盛りが mm（ミリメートル）刻みであれば，1mm よりも小さな長さを数値化することはできないので,「L =172mm」という測定値を読み取ったときも，厳密には「L は 171.5mm よりは長くて 172.5mm よりは短い」と言うべきであり,

$$171.5\,\mathrm{mm} \;\le\; L \;<\; 172.5\,\mathrm{mm} \qquad (14)$$

と書くべきである．この場合，長さ L の**有効数字** (significant figures) は 3 ケタだという．はじめの 3 ケタしか信用できない，4 ケタ目の数字は不確かだということである．また，いまの場合,「172mm」のことを「17.2cm」と書くのは適当だが,「17.20cm」と書くのは不適当である．有効数字が明確になるように

$$L = 1.72 \times 10^2\,\mathrm{mm} = 1.72 \times 10^{-1}\,\mathrm{m} \qquad (15)$$

と書くこともある.「1.72」の部分が有効数字である.

それに対して，例えば底辺の長さ a, 高さ h の三角形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}ah \qquad (16)$$

という関係式を満たすが，この $\frac{1}{2}$ という数は実験で測られた値ではなく，数学的定義に従って決められた数であり，ジャスト $\frac{1}{2}$ である．これを 0.50 とか 0.500 と書くのはおかしい．小数で表すとしたら $0.500000\cdots$ と書くべき数である．形式的には，このような数の有効数字のケタ数は無限ということになる.

有効数字の掛け算や割り算には注意が必要である．例えば，横の長さ 421mm, 縦の長さ 86mm の長方形の面積を

$$421\,\mathrm{mm} \times 86\,\mathrm{mm} \;=\; 36206\,\mathrm{mm}^2 \qquad (17)$$

と計算するのは数学的には正しいが，ものさしの目盛りが 1mm 単位しかないのだとすると，「421mm」という読み取り値はじつは「420.5mm から 421.5mm までの間の値」と考えるべきだし,「86mm」も「85.5mm から 86.5mm までの間の値」と考えるべきである．そうすると，大きめに面積を見積もると

$$421.5\,\mathrm{mm} \times 86.5\,\mathrm{mm} \;=\; 36459.75\,\mathrm{mm}^2 \qquad (18)$$

となるし，控えめに見積もると

$$420.5\,\mathrm{mm} \times 85.5\,\mathrm{mm} \;=\; 35952.75\,\mathrm{mm}^2 \qquad (19)$$

となる（穴あき算でも同様の結果を確かめてみよう）．そうすると，(17) 式の 36206 mm^2 という値は文字通りには信じることができない.

せいぜい最初の 36 という数字は当たっていると言えるだけである．この場合は，計算結果の 3 ケタ目の数を**四捨五入**して

$$\begin{aligned} 421\,\mathrm{mm} \times 86\,\mathrm{mm} &= 36206\,\mathrm{mm}^2 \\ &\fallingdotseq 36000\,\mathrm{mm}^2 \\ &= 3.6 \times 10^4\,\mathrm{mm}^2 \end{aligned} \quad (20)$$

とするのが物理学的に妥当な答えである．

有効数字 3 ケタの値と有効数字 2 ケタの値を掛け算または割り算した場合，答えの有効数字は 2 ケタしかない．一般に，有効数字 m ケタの値と有効数字 n ケタの値を掛け算または割り算した場合，$m \geq n$ なら答えの有効数字は n ケタしかなく，計算結果の $n+1$ ケタ目の数を四捨五入する．

問 1．鉄の質量密度は $\rho = 7\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$ である．これを $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$ の単位に換算せよ．

問 2．地球の半径は約 6400km であり，地球は 1 日 1 回自転している．赤道における自転運動による地表面の速度を求めて，秒速で表せ．

問 3．地球と太陽の距離は約 1 億 5 千万 km であり，太陽の周りを地球は 1 年 1 回公転している．地球の公転運動速度を求めて，秒速で表せ．

問 4．地球と月の距離は約 38 万 km であり，地球の周りを月は約 27.3 日で 1 回公転している．月の公転運動速度を求めて，秒速で表せ．

問 5．問 2, 3, 4 の答えを速いものから順に並べよ．

問 6．質量 20g の物体がマッハ 1=秒速 340m で飛ぶときの運動エネルギーと，質量 20kg の物体が高さ 10 mの所から落ちて得る運動エネルギーとではどちらが大きいか？ 暗算だけで比較できるか？ また，ちゃんと値を計算して比較してみよ．

次元解析

単位系の概念をより抽象化したものとして，物理的次元の概念を紹介しよう．本当は，物理的次元の方が，単位系よりも基本的な概念である．

「体積」や「重さ」といった量は，ある種の均質性を備えたものに対して使える概念である．例えば，均質な「水」だからこそ，体積を 2 倍・3 倍したものも水だと言えるし，コップの水とバケツの水を足したものも水だと言える．このように，スカラー倍と和が可能であるような量の同質性・均質性を抽象化した概念を**次元** (dimension) あるいは物理的次元と呼ぶ．

次元にはいろいろな種類がある．例えば，長さ (length) の次元 L，時間 (time) の次元 T，質量 (mass) の次元 M，面積 (area) の次元 A，体積 (volume) の次元 Vol，エネルギー (energy) の次元 E などがある．ここで L や T は，3 メートルや 12 時間などの具体的な長さや時間ではなく,「抽象的な長さ」や「抽象的な時間」を表すシンボルだと思ってほしい．記号の使い方として，例えば，変数 x が長さの次元を持っていることを

$$[x] = L \quad (21)$$

と書く．また，3m（メートル）のような定量に対しても、

$$[3\mathrm{m}] = L \quad (22)$$

と書く．この式は「3 m という量は，長さの次元 L を持つ」と読む．

足し算または引き算される量は，同質でなくてはならない．「長さ」と「重さ」のような異質な量を足し算しても，どういう質の量になるかわからないからである．つまり，**同じ次元を持っている量だけが，足し算・引き算・等号・不等号の対象になる．**

しかし，次元の異なる量を掛け算または割り算してもよい．むしろ掛け算・割り算することによって，新しく別の次元の量が定義される．例えば，面積の次元 S は長さの次元 L の 2 乗に等しい：

$$S = L^2 \tag{23}$$

体積の次元 V は長さの次元 L の 3 乗に等しい：

$$\mathrm{Vol} = L^3 \tag{24}$$

速度 (velocity) の次元 Vel は，長さを時間で割った次元に等しい：

$$\mathrm{Vel} = LT^{-1} \tag{25}$$

力 (force) の次元 F はもうちょっと複雑で

$$F = MLT^{-2} \tag{26}$$

に等しい．

物理的に意味のある等式や不等式の各項・両辺は同じ次元を持っていなければならない．例えば，ばねが長さ x だけ伸びたときにばねが縮もうとする力を F とすると，

$$F = -kx \tag{27}$$

という関係式が成り立つが，左辺の次元は

$$[F] = MLT^{-2} \tag{28}$$

であり，右辺の次元は

$$[kx] = [k][x] = [k]L \tag{29}$$

なので，

$$[k] = MT^{-2} \tag{30}$$

でなくてはならない．このばねに質量 m の物体がつながっていたとする．m/k という量の次元を求めると，

$$\left[\frac{m}{k}\right] = \frac{M}{MT^{-2}} = T^2 \tag{31}$$

となるので，m/k の平方根は時間の次元を持つことがわかる：

$$\left[\sqrt{\frac{m}{k}}\right] = T \tag{32}$$

この時間は，ばね定数 k のばねにつなげられた質量 m のおもりの運動に関係しているはずである．実際，おもりが振動する周期（1 往復の振動をするのに要する時間）は $\sqrt{m/k}$ に比例する．この式 (32) だけから，おもりの質量を 4 倍，9 倍にすれば，おもりの振動の周期は 2 倍，3 倍になることがわかる．また，ばね定数を 4 倍，9 倍にすれば（強いばねを使えば），振動周期は 1/2 倍，1/3 倍になることもわかる．このように物理量の次元を分析することを**次元解析** (dimensional analysis) という．

振り子のおもりが重いほど往復振動に要する時間は長くなるだろうし，ばねが強いほど往復時間が短くなるだろうということは直観的に見当がつくが，物理的次元を利用すると，このように正確な分析ができる．

また，次元を使うと，いろいろな計算のチェックが簡単にできる．例えば,「圧力を求めよ」という問題を解いた答えが面積の次元になっていたら，そもそも出発点の式が間違っていたはずだと言える．

式の途中に「面積＋重さ」のような，次元のそろっていない式が現れたら，それも物理的にあり得ない計算式である．

問 7. 質量 M，長さ L, 時間 T の組み合わせで，以下の量の次元を表せ．速度，加速度，力，仕事，エネルギー，面積，体積，角度，圧力，運動量，角運動量，力積，トルク

問 8. 長さ×運動量，時間×エネルギー，角運動量，圧力×体積の次元を求めよ．

問 9. 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{33}$$

の解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{34}$$

で与えられるが，これらの関係式を次元解析の観点から分析・検討せよ．

問 10．加速度 g の重力を受けて長さ ℓ のひもにぶら下がった振り子が振れる場面を考える．g と ℓ から時間の次元の量 τ を作れ．振り子の周期（1 往復の振動に要する時間）を 2 倍にしたかったら振り子のひもの長さを何倍にすればよいか．

問 11．気体の密度（単位体積あたりの質量）ρ と気体の圧力 P から，速度の次元の量 v を作れ．また，1 気圧の空気の密度は，およそ 1.2 kg m^{-3} である．これに対する v の値を求めよ．この結果は，空気中の音速に近い値になる．

問 12．万有引力の法則と運動方程式を組み合わせた式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\frac{GMm}{r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{35}$$

に次元解析を適用して，ケプラーの第 3 法則（惑星の公転周期 T と惑星の公転半径 R の間に $T^2 \propto R^3$ という比例関係が成立すること）を証明せよ．

問 13．太陽と惑星の距離が 4 倍または 9 倍になれば，公転周期は何倍になるか．

無次元量

「長さ」を「長さ」で割り算したものや,「重さ」を「重さ」で割り算したものは，何の次元も持たない「ただの数」になる．そういう数を**無次元量** (dimensionless quantity) という．例えば，円周率 π や，角度は無次元量である．無次元量の次元は $[\pi] = M^0L^0T^0$ となる．

とくに角度や時間の単位は 60 進法や 12 進法のなごりがあって，単位の換算が少し面倒である．時間の単位は常識だと思うが，

$$1\,日\,(\mathrm{day}) = 24\,時間\,(\mathrm{hour}) \tag{36}$$

$$1\,時間\,(\mathrm{hour}) = 60\,分\,(\mathrm{minute}) \tag{37}$$

$$1\,分\,(\mathrm{minute}) = 60\,秒\,(\mathrm{second}) \tag{38}$$

だから

$$\begin{aligned} 1\,日 &= 24\,時間 \\ &= 24\times 60\,分 \\ &= 24\times 60\times 60\,秒 = 86400\,秒 \end{aligned} \tag{39}$$

である．角度については度・分・秒という単位がある．分・秒は時間と角度では定義が異なるので注意が必要.

$$1\,周 = 360^\circ（度） \tag{40}$$

$$1^\circ（度） = 60'（分） \tag{41}$$

$$1'（分） = 60''（秒） \tag{42}$$

だから

$$\begin{aligned} 1\,周 &= 360^\circ \\ &= (360\times 60)' = 21600' \\ &= (360\times 60\times 60)'' = 1296000'' \end{aligned} \tag{43}$$

である．地球上では時間と経度の比が

$$\begin{aligned} \frac{1\,日}{1\,周} &= \frac{24\,時間}{360^\circ} = \frac{1\,時間}{15^\circ} \\ &= \frac{24\times 60\,分}{(360\times 60)'} = \frac{1\,分}{15'} \\ &= \frac{24\times 60\times 60\,秒}{(360\times 60\times 60)''} = \frac{1\,秒}{15''} \end{aligned} \tag{44}$$

である．つまり，経度 15 度につき 1 時間，経度 15 分につき 1 分の時差がある．

問 14．名古屋大学本部の所在地は東経 136 度 58 分 7 秒である．大阪城の位置は東経 135 度 31 分 33.04 秒である．太陽が南中する（空の一番高い位置に昇る）時刻は名大と大阪城ではどちらがどれだけ早いか.

問 15．弧度法（ラジアン）の定義を説明せよ．

問 16．指数関数や三角関数の引数は無次元でなくてはならない．理由を言え．

量子力学に関係する物理量

原子や分子の個数の単位として mol（モル）が使われる．1 グラムの水素に入っている水素原子の個数がおおよそ 1 モルになるようにモルは定義されており，1 mol $= 6.02 \times 10^{23}$ 個である．モルは無次元な単位である．

ものの大きさの見当をつけるために，原子の直径は $10^{-10}\,\mathrm{m} = 0.1\mathrm{nm}$（ナノメートル）$= 1$ 億分の 1cm 程度だということを覚えておくとよい．

仕事またはエネルギーの単位は J（ジュール），電荷の単位は C（クーロン），電圧の単位は V（ボルト）であり，ボルトの定義は $\mathrm{V} = \mathrm{J} \cdot \mathrm{C}^{-1}$ である．

電子の電荷 $e = 1.60 \times 10^{-19}\mathrm{C}$ と 1V の積を

$$\begin{aligned} 1\mathrm{eV} &= 1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot \mathrm{V} \\ &= 1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{J} \qquad (45) \end{aligned}$$

と書き，**eV** を「**エレクトロンボルト**」と読む．1eV は，1 つの電子が 1 ボルトの電極の間を移動するときに電場から受け取るエネルギーである．原子の関わる現象（化学反応，燃焼，電池など）は，原子 1 個あたりだいたい 0.1eV から 1eV 程度のエネルギーのやりとりを伴うので，原子物理では eV という単位が手頃である．

光の速さ $c = 3.00 \times 10^{8}\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} =$ 秒速 30 万 km は一定である．光の正体は**電磁波** (electromagnetic wave) であり，電磁波とは電場と磁場の振動が空間を伝わって行く現象である．電磁波の波長 λ と周波数 ν には

$$c = \lambda\nu \qquad (46)$$

という関係がある．また，光には粒子としての性質もあり，そのような粒子を**光子** (photon) と呼ぶ．1 つの光子のエネルギーは

$$E = h\nu \qquad (47)$$

に等しい．ここで，$h = 6.63 \times 10^{-34}\mathrm{J} \cdot \mathrm{s}$ はプランク定数と呼ばれる．これらを組み合わせると，

$$\begin{aligned} E &= h\nu \\ &= h\frac{c}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda e} \cdot e \\ &= \frac{6.63 \times 10^{-34}\mathrm{J} \cdot \mathrm{s} \times 3.00 \times 10^{8}\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}}{\lambda \times 1.60 \times 10^{-19}\mathrm{C}} \cdot e \\ &= \frac{1}{\lambda} \times \frac{6.63 \times 3.00}{1.60} \times 10^{-34+8+19} \\ &\qquad \times \frac{\mathrm{J} \cdot \mathrm{s} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}}{\mathrm{C}} \cdot e \\ &= \frac{1}{\lambda} \times 12.4 \times 10^{-7} \times \mathrm{V} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{e} \qquad (48) \end{aligned}$$

となり，メートル単位で測った光の波長 λ を，エレクトロンボルト単位で測った光子のエネルギー E に換算する公式

$$E = 1.24 \times 10^{-6} \times \frac{\mathrm{m}}{\lambda}\,\mathrm{eV} \qquad (49)$$

を得る．

問 17．メタンガスが燃焼するときに出る熱エネルギーは 890 kJ/mol である．1 分子あたりのエネルギーを J 単位と eV 単位で求めよ．

問 18．

(1) h を 2π で割った

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05 \times 10^{-34}\mathrm{J} \cdot \mathrm{s} \qquad (50)$$

もプランク定数あるいディラック定数と呼ばれる．$\hbar$ の次元を M, L, T で表示せよ．

(2) 電荷 e を持つ二つの粒子が距離 r だけ離れているとき，電荷同士は

$$F = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\, r^2} \qquad (51)$$

の力を及ぼし合う．ここで ε_0 は真空の誘電率と呼ばれる定数である．このとき，

$$\delta = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \qquad (52)$$

の次元を M, L, T で表示せよ．

(3) プランク定数 $\hbar$ と，上で定めた定数 δ と，

電子の質量 m を掛け算または割り算で組み合わせて，長さの次元を持つ物理量 a を作れ．
(4) 具体的な値 $e = 1.60 \times 10^{-19}$C, $m = 9.11 \times 10^{-31}$kg, $(4\pi\varepsilon_0)^{-1} = 8.99 \times 10^9 \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{C}^{-2}$ を用いて a の値を求めよ．また，これを水素原子のおおよその半径 $5 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}$ と比較せよ．
(5) プランク定数 $\hbar$ と，定数 δ と，電子の質量 m を掛け算または割り算で組み合わせて，エネルギーの次元を持つ物理量 U を作れ．また，U の値を J 単位と eV 単位で表示せよ．

問 19． 赤い光の波長は，おおよそ $\lambda = 700\,\mathrm{nm} = 7 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$ である．
(1) この光の周波数を求めよ．その際，適切な単位をつけて答えよ．
(2) 赤い光の光子 1 個のエネルギーを J 単位と eV 単位で求めよ．
(3) 10W（ワット）の電球から赤い光が出ているとしたら，1 秒あたり何個の光子が出ているか．

問 20．日焼けにかかわる紫外線の波長は，おおよそ $\lambda = 300\,\mathrm{nm}$ である．
(1) この光の周波数を求めよ．その際，適切な単位をつけて答えよ．
(2) この光子 1 個のエネルギーを J 単位と eV 単位で求めよ．
(3) 紫外線が生物に有害だとされるのはなぜか．
(4) X 線，ガンマ線とは何か．可視光（人間の肉眼で見える光）とどう違うのか説明せよ．