物質情報学１（解析力学），担当 谷村省吾，講義ノート２

力と仕事とエネルギー

記号の書き方

関数 $f(x)$ の微分を

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \tag{1}$$

と書く．とくに変数が時間 t である場合，

$$\dot{f}(t) = \frac{df}{dt} \tag{2}$$

のように**時間についての微分は上付きの点で表すことが多い**．2 回微分した関数は

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\frac{df}{dx} = \frac{d^2 f}{dx^2} \tag{3}$$

あるいは

$$\ddot{f}(t) = \frac{d}{dt}\frac{df}{dt} = \frac{d^2 f}{dt^2} \tag{4}$$

と書く．2 回以上の微分は

$$f^{(3)}(x) = \frac{d^3 f}{dx^3} \tag{5}$$

や

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n} \tag{6}$$

のように書く．また，ベクトルの内積を復習．

自由度

物体の状態や配置を記述するための数値で，時間とともに変化し得る変数を，**自由度** (degree of freedom) という．例えば，3 次元空間を移動する点状の物体の位置は，横・縦・高さの座標値であるところの変数 (x, y, z) で表される．変数が 3 つなので，点状の物体の自由度は 3 つだと言う．別の例として，人間の腕は，ひじの関節の角度や指の角度が変化し得るが，これらの角度変数すべてが腕の自由度である．

質点

物体には**質量** (mass) という物理量が備わっている．後で運動方程式を導入するときに，質量の数学的定義が与えられるが，定性的には，質量は，加速・減速のしにくさ・慣性の大きさである．つまり，質量の大きな物体ほど，加速するのに大きな力が必要である．

質量を持っているが，物体そのものの大きさは無視できる小さな物体を**質点** (point mass) という．**質点は，空間中の位置だけを自由度とし，体積や変形や回転といった自由度は持たない．**

ある物体が質点か否かは絶対的に決まっていることではない．例えば，斜面を転がるボールの運動を考えるときは，ボールの向きが変化するし，ボールの回転速度も変化するし，そのことが斜面上のボールの運動にも影響を及ぼすので，ボールを質点とは見なせない．しかし，真空中を落下するボールの運動を考えるときは，ボールの回転運動はボールの飛び方にまったく影響しないので，ボールを質点と見なしてよい．また，地球や月の運動を考えるときも，本当は地球や月は大きさも自転運動もあるのだが，地球の中心の運動だけに注目し，海水や大気の運動も無視できる範囲では，地球や月を質点と見なしても大きな間違いは生じない．しかし，地球を周回する人工衛星の精密な軌道を求めるときには，地球を質点として扱うのではなく，でこぼこの形と不均一な質量分布を持った物体として扱わなくてはならない．

このように，質点という概念は，理想化された概念であり，問題によって妥当性が変わる近似概念であることに注意してほしい．

慣性の法則

時間とともに移動する質点において，質点の進行方向が一定であり，移動距離が経過時間に比例する運動を，**等速直線運動**あるいは**等速度運動** (uniform motion) という．時刻 t_0 に質点が位置ベクトル $\boldsymbol{r}_0$ の地点にあったとし，質点が一定の速度 $\boldsymbol{v}$ で動けば，時刻 t での質点の位置は

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}(t - t_0) \tag{7}$$

で与えられる．位置ベクトルの成分を $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$，速度ベクトルの成分を $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$，と書けば，上の式 (7) は

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x(t - t_0) \\ y = y_0 + v_y(t - t_0) \\ z = z_0 + v_z(t - t_0) \end{cases} \tag{8}$$

と書ける．等速直線運動 (7) に関しては

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v} \tag{9}$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{0} \tag{10}$$

が成り立つ．つまり，等速直線運動において速度は一定値 $\boldsymbol{v}$ であり，加速度は 0 である．

外部から力を受けていない質点は等速直線運動する．これを**慣性の法則** (law of inertia) という．

力

日常語では力という言葉は「体力」,「学力」,「人間力」などさまざまなことがらを指すが，物理学でいう**力** (force) という概念は，物体を変形させたり物体の運動状態を変化させるものとして定義される．**物体は他の物体に力を及ぼす**ことがあるし，**物体は他の物体から力を受ける**ことがある．物理学でいう力には，及ぼす側と受ける側がある．言い換えると，**力という言葉は，原則として「何かが別の何かに力を及ぼす」という形で語られるものである．**

例えば，おもりに重力が作用している場合は，正確に言うと，地球がおもりを引っ張っている．目立たないが，じつはおもりも地球を引っ張っている．糸におもりが吊るされている場合は，おもりが糸を引いているし，糸がおもりを引いている．斜面を滑る物体に摩擦が働いている場合は，斜面が物体に力を及ぼしているし，物体も斜面に力を及ぼしている．

ただし，遠心力とか慣性力と呼ばれる力には,「及ぼすものと及ぼされるものの存在」という原則は通用しない．急カーブする自動車の中では，カーブの外に向けて車内の人や物体が引っ張られるような遠心力を感じるが，**この遠心力は，何か他の物体から及ぼされている力ではない．**また，**遠心力を受ける物体が他の物体を引っ張っているわけでもない．**じつは遠心力や慣性力と呼ばれる力は，真の力ではなく，**見かけの力** (fictitious force) と呼ばれる．

力はベクトルで表される．記号としては $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$ で表されることが多い．

運動方程式

3 次元空間中を質量 m の質点が動く状況を考える．時刻 t における質点の位置ベクトルを直交座標で $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ と表す．

質点にはベクトル $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$ で表される力が働いているとする．このとき，質点の加速度は，力に比例し，質量に反比例する：

$$m\,\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} \tag{11}$$

じつは，この式は質量と力の定義式でもあるし，質量と力が知られているときに物体の運

動を予測する式でもある．この式は，ニュートンの**運動方程式** (equation of motion) とか，力学の第 2 法則と呼ばれることもある．が，歴史上，最初にこの式を書いた人はニュートンではなくオイラーだそうである．ベクトルで書かれた運動方程式 (11) は，成分に分けると

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x \tag{12}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y \tag{13}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z \tag{14}$$

という連立方程式である．

また，一つの質点にいろいろな物体からの力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$ が作用する場合は，これらの力の合力により質点の加速度が決まる：

$$m\,\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_n \tag{15}$$

運動方程式は時間について 2 階の微分方程式であり，時刻 $t = 0$ での位置 $\boldsymbol{r}(0)$ と速度 $\boldsymbol{v}(0)$ が与えられれば，任意の時刻での位置 $\boldsymbol{r}(t)$ を求められる．このような問題を**初期値問題** (initial-value problem) という．

問 1. 関数 $z(t)$ に対する運動方程式

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg \tag{16}$$

の初期値問題を解け．つまり，$z(t)$ を $z(0), \dot{z}(0), t$ の関数で表せ．ただし g は定数．

問 2. 関数 $x(t)$ に対する運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{17}$$

の初期値問題を解け．つまり，$x(t)$ を $x(0), \dot{x}(0), t$ の関数で表せ．ただし k は定数．

作用・反作用の法則

物体 a が物体 b に力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{ab}}$ を及ぼすならば，物体 b は物体 a に力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{ba}}$ を及ぼし，

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{ba}} = -\boldsymbol{F}_{\mathrm{ab}} \tag{18}$$

という関係が成り立つ．これを作用・反作用の法則という．ただし，遠心力などの見かけの力に関しては，作用を及ぼす物体がなく，作用・反作用の法則も成り立たない．

仕事

質点の位置の変化を**変位** (displacement) という．位置ベクトル $\boldsymbol{r}_1$ から位置ベクトル $\boldsymbol{r}_2$ に質点が移動すれば，変位ベクトルは

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \tag{19}$$

である．

$$\boldsymbol{r}_1 + \Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 \tag{20}$$

と書く方が意味がわかりやすいかもしれない．

外部の者が質点に力 $\boldsymbol{f} = (f_x, f_y, f_z)$ を及ぼしつつ，質点が $\Delta\boldsymbol{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ の分だけ変位したとき，外部の者は質点に

$$\Delta W := \boldsymbol{f}\cdot\Delta\boldsymbol{r} = f_x\,\Delta x + f_y\,\Delta y + f_z\,\Delta z \tag{21}$$

の分だけ**仕事** (work) をした，と定める．ここで「:=」という記号は定義式を表す．例えば「$\Delta W := \boldsymbol{f}\cdot\Delta\boldsymbol{r}$」は「$\Delta W$ とは $\boldsymbol{f}\cdot\Delta\boldsymbol{r}$ のことである」と読む．

上の式は無限に小さな変位 $\Delta\boldsymbol{r}$ に伴う仕事を定義しているが，場所によって力が変化したり，曲線に沿って質点を移動させる場合は，仕事は線積分によって求められる．**線積分** (line integral) は，曲線 C を N 個の区間に分割して，曲線の始点を $\boldsymbol{r}_0$, 終点を $\boldsymbol{r}_N$ とし，途中の変位ベ

クトルを $\Delta \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i-1}$ として，曲線の刻みを無限に細かくする極限

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} := \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}_i)\cdot\Delta\boldsymbol{r}_i \tag{22}$$

で定義される．が，この定義どおりに線積分を計算することはめったにない．計算のしかたは後で説明するが，曲線 C に沿って質点を運ぶとき，力 $\boldsymbol{f}$ を質点に及ぼしている外部者がした仕事は

$$W = \int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C (f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz) \tag{23}$$

で定められる．

線積分は以下のように計算する．曲線 C を区間 $C_1, C_2, \cdots, C_k$ などに分けてもよい．各区間曲線 C_i 上の点をパラメータ λ ($a \le \lambda \le b$) によって $\boldsymbol{r}(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda))$ と表す．そうすると曲線 C_i に沿う線積分は

$$\begin{aligned} W_i &= \int_{C_i}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} \\ &= \int_a^b \Big\{ f_x\big(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)\big)\frac{dx}{d\lambda} \\ &\quad + f_y\big(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)\big)\frac{dy}{d\lambda} \\ &\quad + f_z\big(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)\big)\frac{dz}{d\lambda}\Big\} d\lambda \end{aligned} \tag{24}$$

で求められ，曲線 C 全体に沿う線積分は

$$W = \sum_{i=1}^{k} W_i \tag{25}$$

で求められる．

問 3．1 次元空間の座標を z とし，

$$f = mg\,(\text{定数}) \tag{26}$$

の力で質点を $z=0$ の位置から $z=h$ の位置まで運ぶのに要する仕事を求めよ．

問 4．1 次元空間の座標を x とし，k を定数として

$$f = kx \tag{27}$$

の力で質点を $x=0$ の位置から任意の x の位置まで運ぶのに要する仕事を求めよ．

問 5．2 次元空間の座標を (x, y) とし，

$$\boldsymbol{f} = (k_1 x, k_2 y) \tag{28}$$

の力を及ぼしながら質点を動かすことを考える．点 $\mathrm{O} = (0,0)$, $\mathrm{A} = (a,0)$, $\mathrm{B} = (a,b)$ とする．k_1, k_2, a, b は定数とする．

i) 線分 OA に沿って質点を移動させるとき，この力がする仕事 W_1 を求めよ．

ii) 線分 AB に沿って運ぶ仕事 W_2 を求めよ．

iv) $W_3 = W_1 + W_2$ を求めよ．

iii) 線分 OB に沿って運ぶ仕事 W_4 を求めよ．

iv) $W_3 = W_4$ になっていることを確かめよ．

問 6．2 次元空間の座標を (x, y) とし，

$$\boldsymbol{f} = (-ky, kx) \tag{29}$$

の力を及ぼしながら質点を動かすことを考える．点 $\mathrm{O} = (0,0)$, $\mathrm{A} = (a,0)$, $\mathrm{B} = (a,a)$, $\mathrm{C} = (0,a)$ とする．k, a は定数とする．

i) 線分 AB に沿って運ぶ仕事 W_1 を求めよ．

ii) 線分 BC に沿って運ぶ仕事 W_2 を求めよ．

iii) $W_3 = W_1 + W_2$ を求めよ．

iv) パラメータ λ は $0 \le \lambda \le \frac{\pi}{2}$ の範囲で動く変数とする．このとき，点 $\mathrm{P} = (a\cos\lambda, a\sin\lambda)$ の軌跡 C を図示せよ．また，曲線 C に沿って質点を運ぶ仕事 W_4 を求めよ．

v) W_3 と W_4 は等しいか？

問 7．3 次元空間の原点からベクトル $\boldsymbol{r}$ の分だけ離れた場所で

$$\boldsymbol{f} = \frac{GMm}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{30}$$

の力を物体に作用させる．ただし，r はベクトル $\boldsymbol{r}$ の大きさであり，G, M, m は定数である．原点から距離 a だけ離れた点から，距離 R だけ離れた点まで，この質点を移動させるとき，この力 $\boldsymbol{f}$ がする仕事 W を求めよ．とくに，$R\to\infty$ とした場合，W はいくらになるか．

保存力と位置エネルギー

一般に，場所 $\boldsymbol{r}$ にある質点が力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ を受ける状況を考える．このように，場所ごとに決まっている力を**力の場** (force field) という．

例えば，地球の周りの物体は重力と呼ばれる地球の引力を受けている．重力の大きさや向きは場所ごとに異なっているが，場所さえ決めれば重力も決まる．そのような空間を**重力場** (gravitational field) というが，これは力の場の例になっている．質量 M の質点からベクトル $\boldsymbol{r}$ だけ離れた所にある質量 m の質点は

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{31}$$

の重力を受ける．

また，ばねにつながれたおもりは，ばねが縮もうとする力あるいは伸びようとする力を受ける．ばねが長さ x だけ伸びた場所では $F = -kx$ の力を受ける．負号は，ばねが伸びた方向と，力の方向とが逆向きであることを表している．これも「ばねの力の場」と言ってよい．

質点が $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ の力の場の中にあるなら，ほうっておけば質点は運動方程式 (11) に従って勝手に動いていくが，観察者が別の力 $\boldsymbol{f}$ を及ぼして，力 $\boldsymbol{F}$ を打ち消すとする：

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}. \tag{32}$$

そうすると $\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{F}$ であり，運動方程式 (11) は

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} \tag{33}$$

となり，質点の加速度は 0 になる．さて，この状態を保って，質点をゆっくり移動させることを考える．つまり，質点を始点 O から終点 P まで曲線 C に沿って，質点を加速させることなく，ゆっくりと移動させるとする．このとき，観察者が力 $\boldsymbol{f}$ でする仕事 W の値は，一般に曲線 C に依存するであろう．

ところが，この仕事の値が，曲線 C の選び方に依らない場合がある．もしもそうなっていたら，力の場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ は**保存力の場** (conservative force field) であるという．このとき，点 O から P まで運んだ仕事は，

$$W = \int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{P}} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{P}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} \tag{34}$$

となる．本来は，線積分を書くときは，積分の経路 C も指定しなくてはならないのだが，保存力の場では，線積分の値が始点と終点だけで決まってしまうので，ここでは始点 O と終点 P だけを明示している．

始点 O を一定の基準点としておくと，W 自体が終点 P だけの関数になる．そうすると「点 P にある質点には，仕事 W をしてもらった分だけエネルギーがたまっている」という解釈ができる．そこで，

$$U(\mathrm{P}) := -\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{P}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} \tag{35}$$

と書き，$U(\mathrm{P})$ を点 P における**位置エネルギー** (potential energy) という．また，点 O を位置エネルギーの基準点という．

点 P_1 から P_2 まで質点をそっと運ぶのに要する仕事は

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_{\mathrm{P}_1}^{\mathrm{P}_2} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} \\ &= -\int_{\mathrm{P}_1}^{\mathrm{P}_2} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} \\ &= -\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{P}_2} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} - \int_{\mathrm{P}_1}^{\mathrm{O}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} \\ &= -\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{P}_2} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{P}_1} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} \\ &= U(\mathrm{P}_2) - U(\mathrm{P}_1) \end{aligned} \tag{36}$$

となる．したがって，$U(\mathrm{P}_2) > U(\mathrm{P}_1)$ ならば $W_{12} > 0$ であり，位置エネルギーの低いところから高いところに質点を運ぶには正の仕事を

してやらなければならない．同じことだが，この式を

$$U(\mathrm{P}_1) + W_{12} = U(\mathrm{P}_2) \tag{37}$$

と書くと，質点が受けた仕事の分だけ位置エネルギーがたまる，という解釈が妥当であることがわかるだろう．

問 8. 摩擦力は保存力か？　また，静電気力は保存力か？

問 9. 点 P の座標を $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ とし，保存力場 $\boldsymbol{F}$ の位置エネルギーを $U(\boldsymbol{r})$ とする．仕事と位置エネルギーの変化の関係式 (36) を，$\mathrm{P}_1 = \boldsymbol{r}$ と $\mathrm{P}_2 = \boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}$ を結ぶ微小変位 $\Delta\boldsymbol{r}$ に対して書くと

$$-\boldsymbol{F} \cdot \Delta\boldsymbol{r} = U(\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}) - U(\boldsymbol{r}) \tag{38}$$

となる．この式から

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \tag{39}$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \tag{40}$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \tag{41}$$

が成り立つことを示せ．これらの式をまとめて

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} = -\mathrm{grad}\, U \tag{42}$$

と書くこともある．ただし grad は**勾配** (gradient) と読む．また，$\boldsymbol{F}$ が保存力場ならば

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0, \tag{43}$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0, \tag{44}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0 \tag{45}$$

が成り立つことを示せ．式 (35) は保存力から位置エネルギーを決める式であり，(39), (40), (41) は位置エネルギーから保存力を決める式になっている．(43), (44), (45) は，力の場 $\boldsymbol{F}$ が保存力場になるための必要条件であるが，じつは十分条件でもある．

問 10. ばねの先に質点がくっついている．ばねを長さ x だけ伸ばしたとき，ばねは

$$F = -kx \tag{46}$$

の復元力で元の長さに戻ろうとする．$x = 0$ の位置を基準点として，この質点が長さ x の位置にあるときの位置エネルギー U を求めよ．

問 11. 地球の表面の近くで，横・縦・高さの方向に直交座標 (x, y, z) を設ける．地表近くの質点には

$$\boldsymbol{F} = (0, 0, -mg) \tag{47}$$

で表される重力が働く．ここで m は質点の質量であり，g は重力加速度である．座標 $(0, 0, 0)$ の位置を基準点として，この質点が (x, y, z) の位置にあるときの位置エネルギー U を求めよ．

問 12. 地球表面近くに限定しなければ，地球の中心からベクトル $\boldsymbol{r}$ だけ離れた質点には

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{48}$$

で表される重力が働く．ここで M は地球の質量，m は質点の質量であり，G は万有引力定数である．地球から無限に離れた場所を基準点として，この質点が地球の中心から距離 r だけ離れた位置にあるときの位置エネルギー U を求めよ．

運動エネルギー

運動方程式 (11) をもう一度書いておく：

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} \tag{49}$$

この式の両辺に速度ベクトルを内積すると，

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{F} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \tag{50}$$

となる．変位 $d\boldsymbol{r}$ は時間経過 dt に伴う変位であり，$\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ はこの変位に伴う仕事だから，式 (50) の右辺は，力 $\boldsymbol{F}$ が質点に単位時間あたりに与える仕事である．

上の式 (50) の左辺は

$$m\,\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\,\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) \tag{51}$$

と書き直せる．ここに現れた

$$\begin{aligned} K &:= \frac{1}{2}m\,\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \\ &= \frac{1}{2}m\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} \\ &= \frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2+v_z^2) \end{aligned} \tag{52}$$

を質点の**運動エネルギー** (kinetic energy) と呼ぶ．そうすると，上の式 (50) は

$$\frac{dK}{dt}=\boldsymbol{F}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \tag{53}$$

あるいは

$$dK=\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} \tag{54}$$

となる．この式は，**質点が受けた仕事の分だけ運動エネルギーが増加する**ことを意味している．

問 13. 式 (51) が成り立つことを確かめよ．

エネルギー保存則

力 $\boldsymbol{F}$ は保存力場だとすると，式 (42)

$$\boldsymbol{F}=-\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}} \tag{55}$$

によって $\boldsymbol{F}$ は位置エネルギー $U(\boldsymbol{r})$ に関係づけられる．このとき (53) は

$$\frac{dK}{dt}=\boldsymbol{F}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=-\frac{dU}{dt} \tag{56}$$

となり，したがって

$$\frac{d}{dt}(K+U)=0 \tag{57}$$

を導く．この式は，保存力場の中で運動する物体の**運動エネルギーと位置エネルギーの和は時間変化しない**ことを意味している．このことを**力学的エネルギーの保存則** (conservation law of mechanical energy) という．

問 14. 関数 $U(x,y,z)$ に t の関数 $x(t),y(t),z(t)$ を合成してできる関数 $U(x(t),y(t),z(t))$ について，

$$\frac{dU}{dt}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt} \tag{58}$$

が成り立つことを証明せよ．この公式を (56) の式変形で使った．

問 15. 問 1 で解いた運動方程式

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=-mg \tag{59}$$

の初期値問題の解について，時刻 t における運動エネルギー $K(t)$ と位置エネルギー $U(t)$ を求めよ．また，$E(t)=K(t)+U(t)$ を求めよ．

問 16. 問 2 で解いた運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx \tag{60}$$

の初期値問題の解について，時刻 t における運動エネルギー $K(t)$ と位置エネルギー $U(t)$ を求めよ．また，$E(t)=K(t)+U(t)$ を求めよ．

参考文献

「ニュートンの運動方程式」と呼ばれる方程式を最初に考え出した人はじつはニュートンではない，という話は以下の 2 冊の本に書かれている：

・中根美知代ほか『科学の真理は永遠に不変なのだろうか：サプライズの科学史入門』（ベレ出版）

・山本義隆『古典力学の形成―ニュートンからラグランジュへ』（日本評論社）