物質情報学 1（解析力学），担当 谷村省吾，講義ノート 3

ラグランジアンと最小作用の原理

微分の基本

関数 $f(x)$ の微分を

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \tag{1}$$

と書く．とくに変数 t が時間を表す場合は

$$\dot{f}(t) = \frac{df}{dt} \tag{2}$$

のように書く．つまり**時間についての微分は上付きの点で表すのが習慣である**．2 回微分は

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\frac{df}{dx} = \frac{d^2 f}{dx^2} \tag{3}$$

あるいは

$$\ddot{f}(t) = \frac{d}{dt}\frac{df}{dt} = \frac{d^2 f}{dt^2} \tag{4}$$

と書く．関数 $f_1(t), f_2(t)$ と定数 c について

$$\frac{d}{dt}\Big(cf_1\Big) = c\dot{f}_1, \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(f_1 + f_2\Big) = \dot{f}_1 + \dot{f}_2, \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(f_1 f_2\Big) = \dot{f}_1 f_2 + f_1 \dot{f}_2 \tag{7}$$

が成り立つ．また，関数 $g(x)$ に $x = f(t)$ を入れた合成関数 $g(f(t))$ について

$$\frac{d}{dt}g(f(t)) = \frac{dg}{dx}\frac{dx}{dt} = g'(f(t))\,\dot{f}(t) \tag{8}$$

が成り立つ．従って，

$$\frac{d}{dt}\{f(t)\}^2 = 2f\dot{f}, \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt}\sin f(t) = \dot{f}\cos f, \tag{10}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big(f_1 f_2\Big) = \ddot{f}_1 f_2 + 2\dot{f}_1\dot{f}_2 + f_1\ddot{f}_2 \tag{11}$$

などが成り立つ．

一般化座標

物体の配置を完全に記述するのに必要十分な変数の組 $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$ を**一般化座標** (generalized coordinate) という．

例えば，2 次元平面中を動く 1 個の質点なら，その位置は直交座標 $\boldsymbol{r} = (x, y)$ で記述される．この場合は (x, y) が一般化座標である．

3 次元空間中を動く 1 個の質点なら，その位置は直交座標 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ で記述され，(x, y, z) が一般化座標となる．

3 次元空間に N 個の質点があれば，α 番目 $(\alpha = 1, 2, \cdots, N)$ の質点の 3 次元座標を $\boldsymbol{r}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$ として，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q} &= (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N) \\ &= (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \cdots, x_N, y_N, z_N) \\ &= (q_1, q_2, \cdots, q_{3N})\end{aligned} \tag{12}$$

が質点系の一般化座標である．つまり，3 次元空間の N 個の質点からなる質点系の自由度は $3N$ である．

しかし，質点の位置を表すのに必ず直交座標を使わなければならないわけではない．2 次元であれば，

$$\begin{cases} x = r\,\cos\phi, \\ y = r\,\sin\phi \end{cases} \tag{13}$$

で定められる 2 次元の**極座標** (polar coordinate) (r, ϕ) を用いてもよい．ここで変数 r は動径と呼ばれ，$r \geq 0$ の範囲を動く．変数 ϕ は偏角と呼ばれ，任意の実数値をとるが，ϕ と $\phi + 2\pi$ は同じ点を指すので，異なる点を指すためには

ϕ の値の範囲を $0 \leq \phi < 2\pi$ か $-\pi \leq \phi < \pi$ に限定するのが通例である．

3 次元空間の点を表す場合は，

$$\begin{cases} x = \rho\, \cos\phi, \\ y = \rho \sin\phi, \\ z = z \end{cases} \tag{14}$$

で定められる**円筒座標** (cylindrical coordinate) (ρ, ϕ, z) を用いてもよい．

同じく 3 次元空間なら

$$\begin{cases} x = r\, \sin\theta\, \cos\phi, \\ y = r\, \sin\theta\, \sin\phi, \\ z = r\, \cos\theta \end{cases} \tag{15}$$

で定められる 3 次元極座標 (r, θ, ϕ) を用いてもよい．これは**球面座標** (spherical coordinate) とも呼ばれる．それぞれの変数の範囲は $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$ または $-\pi \leq \phi < \pi$ である．

問 1．2 次元極座標 (13) について以下の関係式が成り立つことを示せ．ただし，x, y, r, ϕ が時間 t の関数だとして微分を計算せよ．

$$x^2 + y^2 = r^2, \tag{16}$$

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi, \tag{17}$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi, \tag{18}$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2, \tag{19}$$

$$x\dot{y} - y\dot{x} = r^2\dot{\phi}. \tag{20}$$

問 2．3 次元極座標 (15) について以下の関係式を示せ．ただし，x, y, z, r, θ, ϕ が時間 t の関数だとして微分を計算せよ．

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\sin\theta\cos\phi + r\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi \\ &\qquad - r\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi, \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{r}\sin\theta\sin\phi + r\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi \\ &\qquad + r\dot{\phi}\sin\theta\cos\phi, \end{aligned} \tag{23}$$

$$\dot{z} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta, \tag{24}$$

$$\begin{aligned} &\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \\ &\quad = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta. \end{aligned} \tag{25}$$

ラグランジアン

物体の運動エネルギー K と位置エネルギー U を一般化座標 $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$ とその時間微分 $\dot{\boldsymbol{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n)$ の関数で表して引き算した関数

$$L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) := K - U \tag{26}$$

を**ラグランジアン** (Lagrangian) という．位置 $\boldsymbol{q}(t)$ と速度 $\dot{\boldsymbol{q}}(t)$ が時間 t の関数であることから結果的に $L(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t))$ は t の関数になるが，$\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t)$ を通さなくてもあからさまにラグランジアンが t の関数になっていてもよく，その可能性を考慮に入れて $L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ と書いた．

ラグランジアンは運動エネルギーと位置エネルギーの差で定義されるが，ラグランジアンの値そのものに物理的意味はないし，ラグランジアンの値が直接測定されることもない．また，考えている対象は質点とも限らず，ともかく一般化座標で記述され時間変化するシステムでありさえすれば何でもよい．このことから，ラグランジアンで記述される対象を**力学系** (dynamical system) という一般的な呼び方をすることがある．

力学系が時間 $t_1 \leq t \leq t_2$ の間に関数 $\boldsymbol{q}(t)$ に従って動くと仮定して，この運動に沿ってラグアンジアンを時間積分した値を

$$S := \int_{t_1}^{t_2} L(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t)\, dt \tag{27}$$

とおき，S を**作用積分** (action integral) と呼ぶ．作用積分は，関数 $\boldsymbol{q}(t)$ に対する汎関数である．ここで，関数 $\boldsymbol{q}(t)$ は力学系の実際の動き方を表す関数である必要はない．つまり，**「もし仮にこういう動き方をしたとすれば」という仮想的な運動に対してもラグランジアンや作用積分の値を計算することはできる．**

勝手に想像して描いた運動について作用積分の値を計算して何の意味があるのか?と思われるだろうが，ここが**最小作用の原理** (principle of least action) と呼ばれる物理法則の出番である．時刻 t_1 に系の配置が $\boldsymbol{q}_1$ であり，時刻 t_2 に系の配置が $\boldsymbol{q}_2$ であるような運動経路 $\boldsymbol{q}(t)$ を考える．すなわち，$\boldsymbol{q}(t)$ は境界条件

$$\boldsymbol{q}(t_1) = \boldsymbol{q}_1, \quad \boldsymbol{q}(t_2) = \boldsymbol{q}_2 \tag{28}$$

を満たすとする．**もしも関数 $\boldsymbol{q}(t)$ が現実に起こる運動ならば，この関数は作用積分の値を停留にする**，というのが最小作用の原理である．

つまり，$\boldsymbol{\eta}(t) = (\eta_1(t), \cdots, \eta_n(t))$ を

$$\boldsymbol{\eta}(t_1) = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{\eta}(t_2) = \boldsymbol{0} \tag{29}$$

を満たす任意の変分関数として

$$S(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} L\big(\boldsymbol{q}(t) + \varepsilon\boldsymbol{\eta}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t) + \varepsilon\dot{\boldsymbol{\eta}}(t), t\big) dt \tag{30}$$

とおけば，$\boldsymbol{q}(t)$ が現実に起こる運動ならば，

$$\frac{d}{d\varepsilon} S(\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = 0 \tag{31}$$

が成り立つ．気持ちとしては「現実の運動は作用積分の値を最小にする」と言いたいから，最小作用の原理と呼ぶのだが，微分がゼロだということから最小性は保証できないので，最小とは言わずに停留と言った．

問 3. 作用積分の停留条件 (31) から**オイラー・ラグランジュ方程式**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{32}$$

を導け．n 個の一般化座標を持つ系のオイラー・ラグランジュ方程式は，n 個の微分方程式からなる連立方程式であることに注意してほしい．

問 4. 質点のラグランジアンが

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} - U(\boldsymbol{r}) \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z) \end{aligned} \tag{33}$$

で与えられている場合，座標 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ についてのオイラー・ラグランジュ方程式 (32) を書け．それがニュートンの運動方程式を再現することを確認せよ．

問 5. 座標 x で位置が表される質点のラグランジアン

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - mgx \tag{34}$$

について以下の問い答えよ．

(i) このラグランジアンに対するオイラー・ラグランジュ方程式を書け．

(ii) (i) の方程式の一般解を求めよ．

(iii) $t = 0$ のとき $x = 0$, かつ，$t = T$ のとき $x = h$ となる解を求めよ．ただし $T > 0$ は定数.

(iv) 関数 $x(t)$ を

$$x(t) = at(T - t) + h\frac{t}{T} \tag{35}$$

とおくと，定数 a がいくらであってもこの関数は $x(0) = 0$ と $x(T) = h$ を満たす．この関数 $x(t)$ に対して作用積分 $S_a = \int_0^T L\, dt$ を求めよ．

(v) S_a の値が最小になるような a の値を求めよ．また，そのときの S_a の値を求めよ．また，そのときの関数 $x(t)$ が (iii) で求めた解と一致することを確かめよ．

(vi) 定数 b は $0 < b < T$ の範囲にあるとして，関数 $x(t)$ を

$$x(t) = \begin{cases} ht/b & (0 \le t \le b) \\ h & (b \le t \le T) \end{cases} \tag{36}$$

とおくと，定数 b がいくらであってもこの関数は $x(0)=0$ と $x(T)=h$ を満たす．この関数 $x(t)$ に対して作用積分 $S_b=\int_0^T L\,dt$ を求めよ．また，S_b の最小値を求めよ．これと，(v) で求めた S_a の最小値との大小を比較せよ．

問 6．直交座標 (x,y) と $r=\sqrt{x^2+y^2}$ で記述される質点のラグランジアン

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-U(r) \tag{37}$$

を 2 次元極座標 (13), (19) を使って書き表せ．また，極座標 (r,ϕ) についてのオイラー・ラグランジュ方程式を書け．

問 7．3 次元空間中に質量 m_1 と m_2 の質点があり，それぞれの位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2$ とする．2 質点の**重心**位置ベクトル $\boldsymbol{X}$ と相対位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を

$$\boldsymbol{X}:=\frac{m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1+m_2}, \tag{38}$$

$$\boldsymbol{r}:=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1 \tag{39}$$

で定める．$\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ を $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{r}$ の式で表せ．また，質点系の運動エネルギー

$$K=\frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_1+\frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_2 \tag{40}$$

を $\dot{\boldsymbol{X}}$ と $\dot{\boldsymbol{r}}$ で表せ．

問 8．1 次元空間中に質量 m_1 と m_2 の質点があり，それぞれの位置を x_1,x_2 とする．2 質点の重心位置 X と相対位置 r を

$$X:=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}, \tag{41}$$

$$r:=x_2-x_1 \tag{42}$$

で定める．

(i) x_1,x_2 を X,r の式で表せ．

(ii) 2 質点のラグランジアン

$$L=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2-\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2 \tag{43}$$

を $(X,r,\dot{X},\dot{r})$ の関数で表せ．

(iii) 座標 X,r についてのオイラー・ラグランジュ方程式を書き，方程式を解け．

問 9．時間 t にあからさまに依存しているラグランジアンの例として

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2+fx\cos\Omega t \tag{44}$$

を考える．ただし m,k,f,Ω は定数である．このラグランジアンに対するオイラー・ラグランジュ方程式を書け．また，この方程式はどのような物理的状況を記述しているか説明せよ．さらに，この方程式を解け．

問 10．一般論としては，ラグランジアンは運動エネルギー K と位置エネルギー U の引き算 $L=K-U$ という形である必要はない．例えば，一般化座標 (x,y) を持つ力学系について

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+Bx\dot{y} \tag{45}$$

というラグランジアンを考えてもよい．ただし，B は定数である．形式的には，これは $U=-Bx\dot{y}$ という位置エネルギーを持つ系になっている．位置だけの関数ではないものを「位置エネルギー」と呼ぶのも変なので，これを**速度依存ポテンシャル** (velocity-dependent potential) という．

(i) このラグランジアン (45) に対するオイラー・ラグランジュ方程式を書け．

(ii) また，別のラグランジアン

$$\tilde{L}=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-B\dot{x}y \tag{46}$$

に対するオイラー・ラグランジュ方程式を書け．