物質情報学１（解析力学），担当 谷村省吾，講義ノート４

拘束条件

独立変数と従属変数

系の配置を記述する変数 $(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ を多くしすぎると，これらの変数を完全に自由に動かすことができなくなり，変数同士の間である関係式がつねに成立したり，一部の変数だけで他の変数を表すことができたりする．

例えば，三角形という図形について３辺の長さ a, b, c と３角の大きさ α, β, γ と面積 T という合計７つの変数 $(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, T)$ を導入することができるが，これら７つの変数を好き勝手に変えることはできない．これらの変数の間には

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2, \tag{1}$$

$$s(s-a)(s-b)(s-c) = T^2, \tag{2}$$

$$\text{ただし，} s := \frac{a+b+c}{2}, \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}ab\sin\gamma = T \tag{4}$$

といった関係式が成立する．

問１．三角形の２辺の長さ a, b とその間の角の大きさ γ がわかったとき，他の辺の長さ c と他の角 α, β を決める式を書け．

変数の組 $(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ の一部 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の値を自由に変えることはできるが，これらの値を決めれば残りの変数 $(x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_N)$ の値が決まってしまうならば，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を**独立変数** (independent variables) といい，$(x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_N)$ をそれらに対する**従属変数** (dependent variables) という．独立変数の個数 n をこの系の**自由度** (degreed of freedom) という．

何が独立変数で何が従属変数かということは絶対的に決まっていることではない．例えば，２次元平面上を動く質点の位置を記述する変数として直交座標と極座標の４つの変数 (x, y, r, ϕ) を導入すると，

$$\begin{cases} x = r\cos\phi, \\ y = r\sin\phi \end{cases} \tag{5}$$

という関係があるので，(r, ϕ) を独立変数，(x, y) を従属変数として選ぶことができる．しかし，

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \tan\phi = \dfrac{y}{x} \\ \text{あるいは，} \cos\phi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \qquad \sin\phi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \tag{6}$$

という関係があるので，(x, y) を独立変数，(r, ϕ) を従属変数としてもよい．

拘束条件

一般に，変数 $(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ が時間 t の関数であるとき，これらの変数と微分に関する条件式

$$\Psi(x_1, x_2, \cdots, x_N, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \cdots, \dot{x}_N, t) = 0 \tag{7}$$

あるいは

$$\Psi(x_1, x_2, \cdots, x_N, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \cdots, \dot{x}_N, t) \geq 0 \tag{8}$$

を**束縛条件**または**拘束条件** (constraint) という．拘束条件は等式のこともあるし不等式で与えられることもある．変数の時間微分を含んでいる拘束条件

$$\Psi(x_1, x_2, \cdots, x_N, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \cdots, \dot{x}_N, t) = 0 \tag{9}$$

を積分して，微分を含まない形

$$\Phi(x_1, x_2, \cdots, x_N, t) = 0 \tag{10}$$

に直せるとき，拘束条件 (9) は**可積分** (integrable) あるいは**ホロノミック** (holonomic) であるという．

一般には，拘束条件は一つとは限らず，複数個の拘束条件があり得る：

$$\begin{cases} \Psi_1(x_1, \cdots, x_N, \dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_N, t) = 0, \\ \quad \vdots \\ \Psi_k(x_1, \cdots, x_N, \dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_N, t) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

問 2．等式で表される拘束条件の例を挙げよ．また，不等式で表される拘束条件の例を挙げよ．

問 3．変数 (x, y) に関する拘束条件

$$x\dot{x} + y\dot{y} = 0 \tag{12}$$

から

$$x^2 + y^2 - c = 0 \tag{13}$$

を導け．ただし c は定数．

問 4．変数 (x, y) に関する拘束条件

$$x\dot{y} - y\dot{x} = 0 \tag{14}$$

から

$$\frac{y}{x} - c = 0 \tag{15}$$

を導け．ただし c は定数．

問 5．変数 (x, y, θ, ϕ) に関する拘束条件

$$\begin{cases} \dot{x} - a\dot{\phi}\cos\theta = 0, \\ \dot{y} - a\dot{\phi}\sin\theta = 0 \end{cases} \tag{16}$$

はホロノミックではないことを証明せよ．ただし a は定数．この拘束条件はどのような物理的状況を表しているか説明せよ．

消去法

もとのラグランジアンが N 個の一般化座標とそれらの時間微分の関数 $L(x_1, \cdots, x_N, \dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_N, t)$ で与えられているとする．しかも，$N - n$ 個の従属変数 $(x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_N)$ が n 個の独立変数 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の関数として表されるとする．この場合，**従属変数をすべて独立変数で表してラグランジアンを独立変数だけの関数 $L(x_1, \cdots, x_n, \dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_n, t)$ の形に書き直す**ことができる．つまり，従属変数 $(x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_N)$ をラグランジアンの表式から消去することができる．そうしておいてから，ラグランジアン $L(x_1, \cdots, x_n, \dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_n, t)$ から独立変数だけについてのオイラー・ラグランジュ方程式を立てて，解けばよい．

問 6．質量 m_1, m_2 の質点の座標を x_1, x_2 とする．これらが

$$x_1 + x_2 = \ell = \text{定数} \tag{17}$$

という拘束条件を満たしているとする．また，この系はラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + m_1 g x_1 + m_2 g x_2 \tag{18}$$

を持つとする．

(i) このモデルはどのような物理的状況を表しているか説明せよ．

(ii) x_2 を x_1 の式で表せ．

(iii) $\dot{x}_2$ を $\dot{x}_1$ の式で表せ．

(iv) L を $x_1, \dot{x}_1$ だけの式で表せ．

(v) このラグランジアンから変数 x_1 についてのオイラー・ラグランジュ方程式を書け．

(vi) その方程式の初期値問題を解け．

問 7．角度 α の斜面を動く質点の座標 (x, y) は独立変数 r を使って

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha, \\ y = -r\sin\alpha, \end{cases} \tag{19}$$

と表すことができる．このとき，ラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \tag{20}$$

を変数 $r(t)$ に対するラグランジアンに書き換えよ．それからオイラー・ラグランジュ方程式を導け．その方程式の初期値問題を解け．

問 8．地球の重力の方向に沿った直線を**鉛直線** (vertical line) という．鉛直線を含む平面を**鉛直面** (vertical plain) という．鉛直線に直交する平面を**水平面** (horizontal plain) という．

水平方向に x 軸をとり，鉛直上向きを y 軸をとる．関数 $y = f(x)$ のグラフで表される曲がった斜面上を滑って動く質点を考える．ラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \tag{21}$$

から変数 y を消去して独立変数 x だけで書き表せ．また，そのラグランジアンから変数 x に対するオイラー・ラグランジュ方程式を導け．

問 9．m, k は正の実数とする．ラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \tag{22}$$

からオイラー・ラグランジュ方程式を導け．その初期値問題の解が

$$x(t) = x(0)\cos\omega t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega}\sin\omega t \tag{23}$$

で与えられることを確かめよ．ただし，

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{24}$$

である．

$$\omega T = 2\pi, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{25}$$

とおくと (23) の関数は $x(t+T) = x(t)$ を満たす．つまり，この質点は**周期** (period) T で振動する．

問 10．鉛直面内を動く二重振り子の運動を考える．2 つの質点があり，それぞれの質量を m_1, m_2，それぞれの直交座標を $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ とする．長さ ℓ_1 で質量ゼロで伸び縮みも曲がりもしない棒があり，棒の一方の端は原点に固定されており，もう一方の端には質量 m_1 の質点がくっついている．原点は動けないが，棒は自由に回転することはできる．長さ ℓ_2 で質量ゼロで伸び縮みも曲がりもしない棒があり，この棒の一方の端には質量 m_1 の質点，もう一方の端には質量 m_2 の質点がくっついている．

(i) 変数 (x_1, y_1, x_2, y_2) に対して拘束条件は 2 つある．これらの拘束条件を数式で表せ．

(ii) 4 つの変数に拘束条件が 2 つあるので，この系の自由度は $4 - 2 = 2$ である．独立変数 ϕ_1, ϕ_2 を

$$\begin{cases} x_1 = \ell_1\sin\phi_1, \\ y_1 = -\ell_1\cos\phi_1, \\ x_2 = \ell_1\sin\phi_1 + \ell_2\sin\phi_2, \\ y_2 = -\ell_1\cos\phi_1 - \ell_2\cos\phi_2 \end{cases} \tag{26}$$

となるように選ぶ．ラグランジアン

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &\quad -m_1 g y_1 - m_2 g y_2 \end{aligned} \tag{27}$$

を $\phi_1, \phi_2, \dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2$ の関数に書き直せ．

(iii) ϕ がゼロに近い数であるとき，

$$\cos\phi \approx 1 - \frac{1}{2}\phi^2 \tag{28}$$

$$\sin\phi \approx \phi \tag{29}$$

という近似的等式が成り立つ．この近似式を使って，(ii) で求めたラグランジアンを $\phi_1, \phi_2, \dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2$ のたかだか 2 次多項式で近似せよ．

(iii) 二重振子はどのような周期でどう運動するか，説明せよ．

問11. 摩擦のない水平面上を回転する棒に束縛された質点の運動を考える．Ω は定数，r は時間変化する独立変数であり，直交座標 (x, y) は

$$\begin{cases} x = r\cos\Omega t, \\ y = r\sin\Omega t \end{cases} \tag{30}$$

に従う従属変数だとする．

(i) ラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \tag{31}$$

を $r, \dot{r}$ の関数に書き直せ．

(ii) そのオイラー・ラグランジュ方程式を導け．

(iii) 変数 E を

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{1}{2}m\Omega^2 r^2 \tag{32}$$

と定める．関数 $r(t)$ が (ii) のオイラー・ラグランジュ方程式を満たすならば E は時間変化しないことを証明せよ．

(iv) (ii) で導いた方程式の一般解を書け．

(v) 初期条件を次のように場合分けする：

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & E < 0,\ \ r(0) > 0,\ \ \dot{r}(0) < 0, \\ \text{(b)} & E = 0,\ \ r(0) > 0,\ \ \dot{r}(0) < 0, \\ \text{(c)} & E = 0,\ \ r(0) > 0,\ \ \dot{r}(0) > 0, \\ \text{(d)} & E > 0,\ \ r(0) < 0,\ \ \dot{r}(0) > 0. \end{array} \tag{33}$$

各場合に応じて関数 $r(t)$ のグラフを書け．

(vi) (v) に示された場合分けはそれぞれどんな状況になっているか説明せよ．

ラグランジュの未定乗数法

拘束条件や従属変数があるということは，自由に変えることのできない余分な変数があるということである．最小作用の原理を考えるときは変数を自由に変分させるので，そこに現れる変数は独立変数でなくてはならない．そこで，最少の独立変数だけで系を記述しようとするのが消去法であった．もちろん，これは無駄がない方法なのだが，従属変数を消去した結果の数式が非常に複雑になることもある．

拘束条件を扱う方法として，消去法に替わる別の方法が以下で説明するラグランジュの未定乗数法である．

一般論として，関数 $F(x_1, \cdots, x_N)$ の最大値や最小値を求めたいという問題を考える．ところが，変数 $(x_1, \cdots, x_N)$ は好き勝手に動かすことができなくて，拘束条件

$$\Phi(x_1, x_2, \cdots, x_N) = 0 \tag{34}$$

を満たさなくてはならないとする．この制約のもとで関数 $F(x_1, \cdots, x_N)$ の停留値（できれば極大値・極小値・最大値・最小値）と停留点 $(x_1, \cdots, x_N)$ を求めよ，という問題を考える．

消去法 (elimination method) であれば，拘束条件の式 $\Phi(x_1, x_2, \cdots, x_N) = 0$ を一つの変数，例えば x_N について解いて，

$$x_N = g(x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}) \tag{35}$$

の形に直してから $F(x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}, x_N)$ の x_N のところに代入し，残った独立変数 $(x_1, x_2, \cdots, x_{N-1})$ について，目的の関数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}, g(x_1, x_2, \cdots, x_{N-1})) \tag{36}$$

を微分してゼロになるところを探す．ただ，この方法だと，すべての変数は対等であるのに，消去する変数を選ぶことが，もとの問題の対称性を損なう．また，変数 x_N の代わりになる関数 $x_N = g(x_1, x_2, \cdots, x_{N-1})$ は複雑な関数になることが多く，後の問題を煩雑にする．

ラグランジュの未定乗数法 (method of Lagrange multiplier) は消去法とは全然発想が違う．すでに余分な変数があるのに，あえてもう

一つ余分な変数 λ を導入し，新たな関数

$$\begin{aligned}&G(x_1,x_2,\cdots,x_N,\lambda)\\&:=F(x_1,x_2,\cdots,x_N)+\lambda\mathit{\Phi}(x_1,x_2,\cdots,x_N)\end{aligned} \tag{37}$$

を定める．そうしておいてから，関数 G を $x_1,x_2,\cdots,x_N,\lambda$ の各変数で微分してゼロになるところを求めれば，それが拘束条件 $\mathit{\Phi}=0$ の下での関数 F の停留点（極大点や極小点）である，というのが，ラグランジュの未定乗数法である．いま導入した変数 λ は，値が未定で，$\mathit{\Phi}$ に掛け算されることから，**未定乗数** (undetermined multiplier) と呼ばれる．

問 12. a を正の定数として変数 (x,y) についての拘束条件

$$\mathit{\Phi}(x,y)=x^2+y^2-a^2=0 \tag{38}$$

の下で関数

$$F(x,y)=x+y \tag{39}$$

の値を最大化または最小化する (x,y) を求めよ．(i) 拘束条件の式を変形して変数 y を x で表して，関数 F を x だけの式で表してから最大・最小値を求める方法と (ii) 未定乗数法（この場合は未定乗数の値も求めよ），の両方の方法で求めよ．

問 13. 未定乗数法を証明せよ．つまり，なぜ未定乗数法で拘束条件付き極大・極小問題が解けるのか，説明せよ．

問 14. a,b,c を定数として変数 (x,y) についての拘束条件

$$\mathit{\Phi}(x,y)=ax+by+c=0 \tag{40}$$

の下で関数

$$F(x,y)=x^2+y^2 \tag{41}$$

が最小になるような (x,y) を定める方程式を書け．また，その解 (x,y) を求めよ．

複数の拘束条件

$$\begin{cases}\mathit{\Phi}_1(x_1,\cdots,x_N)=0,\\ \quad\vdots\\ \mathit{\Phi}_k(x_1,\cdots,x_N)=0.\end{cases} \tag{42}$$

が課せられた変数 $(x_1,\cdots,x_N)$ の関数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ の最大・最小点を求めたい場合は，k 個の未定乗数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ を導入し，新たな関数

$$\begin{aligned}&G(x_1,x_2,\cdots,x_N,\lambda_1,\cdots,\lambda_k)\\&:=F(x_1,x_2,\cdots,x_N)\\&\qquad+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\mathit{\Phi}_i(x_1,x_2,\cdots,x_N)\end{aligned} \tag{43}$$

を定める．そして関数 G を $x_1,\cdots,x_N,\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ の各変数で微分してゼロになるところを求めれば，それが拘束条件 $\mathit{\Phi}_1=\cdots=\mathit{\Phi}_k=0$ の下での関数 F の停留点（極大点や極小点）である．

なお，未定乗数の符合も値も最初は未定なので，未定乗数の項は足し算で書いても引き算で書いてもかまわない：

$$\begin{aligned}&G(x_1,x_2,\cdots,x_N,\lambda_1,\cdots,\lambda_k)\\&:=F(x_1,x_2,\cdots,x_N)\\&\qquad-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\mathit{\Phi}_i(x_1,x_2,\cdots,x_N).\end{aligned} \tag{44}$$

ラグランジアンへの未定乗数法の応用

変数 $\boldsymbol{q}(t)$ で記述される力学系が拘束条件

$$\mathit{\Psi}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)=0 \tag{45}$$

を課せられている場合は，未定乗数 $\lambda(t)$ （これも時間の関数であることに注意）を導入し，元のラグランジアン L に一つ項を加えた新たなラグランジアン

$$\tilde{L}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\lambda,t)=L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)+\lambda\mathit{\Psi}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) \tag{46}$$

を作って，$\boldsymbol{q}$ と λ に対するオイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_i} = 0 \ (i = 1, \cdots, n) \tag{47}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\lambda}}\right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \lambda} = 0 \tag{48}$$

を立てて解けばよい．

なお，$\tilde{L}$ の上に乗せた波線記号 $\sim$ はチルダ (tilde) と読む．もともとスペイン語やポルトガル語などのアルファベットの種類を増やすための記号だが，ここではたんに記号の種類を増やすために使われている．

問 15．問 6 の問題を未定乗数法を使って解け．

問 16．直交座標 (x, y) で記述される 2 次元平面上の質点のラグランジアンを

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \tag{49}$$

とし，この質点が拘束条件

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (a > 0) \tag{50}$$

を課せられているとする．このとき次の二通りのやり方で質点の運動を求めよ．

(i) 関係式

$$x = a\cos\phi, \quad y = a\sin\phi \tag{51}$$

により，変数 (x, y) を ϕ の従属変数とする．ラグランジアン (49) を $\phi, \dot{\phi}$ の関数で表し，ϕ についてのオイラー・ラグランジュ方程式を立てて，解け．

(ii) 未定乗数 λ を導入して

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2 - a^2) \tag{52}$$

で新たなラグランジアンを定める．ただし，後の計算がやりやすくなることを見越して，未定乗数を $-\frac{1}{2}\lambda$ にした．x, y, λ についてのオイラー・ラグランジュ方程式を立てて，解け．条件 (50) を満たす解だけを書け．