対称性と保存則

最小作用の原理と対称性の概念を組み合わせると保存法則が導かれる．このことをネーターの定理という．今回はこれを説明する．

対称性

対称性という概念を説明する．A という状態の対象に R という変換や操作を施した結果，A' という状態になるとする：

$$A \ \mapsto\ R(A) = A' \tag{1}$$

例えば，図形を平行移動したり回したりひっくり返したりするのは変換の一種である．一般に，変換を施した後の状態 A' は元の A とは異なる．しかし，もしも $A' = A$ になっていれば，A は変換 R の下で**不変** (invariant) である，もしくは，A は R について**対称性** (symmery) を持つ，という．なお，何もしない操作を**恒等変換** (identity transformation) といい，数学的には，恒等変換も変換の一つとみなす．

問 1. 平面上の二等辺三角形の対称性を述べよ．また，正三角形の対称性を述べよ．

問 2. 正四面体を不変にとどめる変換をすべて列挙し，それら変換全部の数を言え．

問 3. 正六面体を不変にとどめる変換をすべて列挙し，全数を言え．同様に正八面体を不変にとどめる変換をすべて列挙し，全数を言え．

問 4. 平面上の円はどういう対称性を持つか．

問 5. 無限に広い平面はどういう対称性を持つか．また，平面上の格子模様はどういう対称性を持つか．何通りかの格子模様を検討せよ．

保存則

力学系の配置を表す変数 $\boldsymbol{q} = (q_1, \cdots, q_n)$ が，ある運動法則に従って時間変化する．つまり，時刻 0 での $\boldsymbol{q}(0)$ の値を指定すれば，運動法則によって任意の時刻 t の $\boldsymbol{q}(t)$ の値が決まるとする．このとき，変数 $\boldsymbol{q}$ とその時間微分 $\dot{\boldsymbol{q}} = (\dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n)$ の関数

$$G(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \tag{2}$$

が，いかなる初期条件 $\boldsymbol{q}(0)$, $\dot{\boldsymbol{q}}(0)$ に対しても

$$G(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t)) = G(\boldsymbol{q}(0), \dot{\boldsymbol{q}}(0)) \tag{3}$$

を満たすならば，G はこの運動法則に関する**保存量** (conserved quantity) と呼ばれる．同じことだが，

$$\frac{d}{dt} G(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t)) = 0 \tag{4}$$

と言ってもよい．

問 6. m, k は正の定数とする．変数 $x(t)$ が運動方程式

$$m\ddot{x} = -kx \tag{5}$$

に従って時間変化するならば，関数

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \tag{6}$$

は保存量であることを証明せよ．つまり，

$$\frac{dE}{dt} = 0 \tag{7}$$

を証明せよ．また，微分方程式 (5) の一般解を求めて，関数 $x(t)$ のグラフを描け．微分方程式 (5) に従うシステムは**調和振動子** (harmonic oscillator) と呼ばれる．また，保存量 (6) は全エネルギーと呼ばれる．

問 7. m, k, γ は正の定数とする．変数 $x(t)$ が運動方程式

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} \tag{8}$$

に従って時間変化するならば，関数

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \tag{9}$$

の値は時間とともに単調に減少することを証明せよ．つまり，

$$\frac{dE}{dt} \le 0 \tag{10}$$

であることを証明せよ．また，微分方程式 (8) の一般解を求めて（係数 γ の大小によって場合分けする必要がある），関数 $x(t)$ のグラフを描け．微分方程式 (8) に従うシステムは**線形な摩擦のある振動子**あるいは**減衰振動子** (damped oscillator) と呼ばれる．

連続変換と無限小変換

パラメータづけられた連続変換というものを考える．それは

$$q_i \ \mapsto \ \tilde{q}_i = \phi_i(\boldsymbol{q}, \varepsilon) \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{11}$$

という形の変換である．ε は変換の度合いを表す実数パラメータであり，$\varepsilon = 0$ のときは恒等変換だとする：

$$\tilde{q}_i = \phi_i(\boldsymbol{q}, 0) = q_i \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{12}$$

とくに ε が無限小（限りなく 0 に近い微小な数）であるときは，変換 (11) を

$$q_i \ \mapsto \ \tilde{q}_i = q_i + \varepsilon f_i(\boldsymbol{q}) \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{13}$$

と書いてよい．これを**無限小変換** (infinitesimal transformation) の式という．ここで

$$f_i(\boldsymbol{q}) = \left.\frac{\partial \phi_i}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \tag{14}$$

である．

また，変換 (11) に伴って一般化座標の時間微分は

$$\dot{q}_i \ \mapsto \ \dot{\tilde{q}}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \phi_i}{\partial q_j}\,\dot{q}_j \tag{15}$$

に変わる．無限小変換 (13) の下で時間微分は

$$\dot{q}_i \ \mapsto \ \dot{\tilde{q}}_i = \dot{q}_i + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial q_j}\,\dot{q}_j \tag{16}$$

の分だけ変わる．これを速度の無限小変換という．

問 8. ε が無限小であるとき，ε の 2 次以上の項は無視できる．例えば，厳密には

$$(1+\varepsilon)^2 = 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 \tag{17}$$

だが，

$$(1+\varepsilon)^2 = 1 + 2\varepsilon \tag{18}$$

としてよい．同様に，厳密には

$$(1+\varepsilon)^3 = 1 + 3\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3 \tag{19}$$

だが，

$$(1+\varepsilon)^3 = 1 + 3\varepsilon \tag{20}$$

としてよい．一般に

$$F(x+\varepsilon) = F(x) + \frac{\partial F(x)}{\partial x}\,\varepsilon \tag{21}$$

となる．同様の扱いによって以下を計算せよ：

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \tag{22}$$

$$\sqrt{1+\varepsilon} \tag{23}$$

$$e^{\varepsilon} \tag{24}$$

$$\cos\varepsilon \tag{25}$$

$$\sin\varepsilon \tag{26}$$

問 9. 平面においてベクトル (c_x, c_y) の方向への平行移動は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} \tag{27}$$

で与えられる．速度の変換則を求めよ．

問 10. 平面において回転変換は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \\ \sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{28}$$

で与えられる．この変換の下で

$$A = x^2 + y^2 \tag{29}$$

は不変であることを確かめよ．また，回転変換に対する無限小変換の式を求めよ．

問 11. 平面における変換として

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\varepsilon & \sinh\varepsilon \\ \sinh\varepsilon & \cosh\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{30}$$

を考える．この変換はどのような変換か図示せよ．また，この変換の下で

$$S = x^2 - y^2 \tag{31}$$

は不変であることを確かめよ．また，この変換に対する無限小変換の式を求めよ．

問 12. 3 次元空間のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \tag{32}$$

の**内積** (inner product) と**外積** (exterior product, cross product) を，それぞれ

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} := a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{33}$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \tag{34}$$

で定める．また，ベクトル $\boldsymbol{a}$ の**ノルム** (norm) を

$$\|\boldsymbol{a}\| := \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}} = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2} \tag{35}$$

で定める．ノルムが 1 に等しいベクトルを**単位ベクトル** (unit vector) という．互いに直交する単位ベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{36}$$

を**規格直交系** (orthonormal system) という．**クロネッカーのデルタ** (Kronecker's delta) と呼ばれる記号と**レヴィ・チヴィタのイプシロン** (Levi-Civita's epsilon) と呼ばれる記号をそれぞれ

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{37}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i, j, k \text{ が } 1,2,3 \text{ の偶置換}) \\ -1 & (i, j, k \text{ が } 1,2,3 \text{ の奇置換}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \tag{38}$$

と定めると，直交単位ベクトル同士の内積と外積は

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \tag{39}$$

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{e}_k \tag{40}$$

に等しく，

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \boldsymbol{e}_i \tag{41}$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i,j=1}^{3} \delta_{ij} a_i b_j = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i \tag{42}$$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_i b_j \boldsymbol{e}_k \tag{43}$$

という等式が成り立つ．以下の問に答えよ：

(i) 偶置換と奇置換の定義を述べよ．

(ii) 次の関係式を証明せよ：

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ipq} = \delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{kp} \tag{44}$$

(iii) 3次元空間の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ の内積や外積について

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}, \tag{45}$$
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}, \tag{46}$$
$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}), \tag{47}$$
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}) = 0, \tag{48}$$
$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = 0, \tag{49}$$
$$\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = 0, \tag{50}$$
$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}, \tag{51}$$
$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}), \tag{52}$$
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}), \tag{53}$$
$$\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 \tag{54}$$

という関係式が成り立つことを証明せよ．

問 13. 単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を軸として微小角 ε の分だけベクトル $\boldsymbol{v}$ を回す無限小変換は

$$\tilde{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v} + \varepsilon\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v} \tag{55}$$

で与えられることを説明せよ．また，有限の角 θ の分だけ回す変換

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{v}} &= (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} + \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}\sin\theta \\ &\quad +(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{n}\cos\theta\end{aligned} \tag{56}$$

で与えられることを説明せよ．

問 14. ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ の無限小回転を $\tilde{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v} + \varepsilon\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}$, $\tilde{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w} + \varepsilon\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{w}$ で定めると，ε の2次の量を無視すると

$$\tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\tilde{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} \tag{57}$$

が成り立つことを証明せよ．よって，内積やノルムの値は回転変換の下で不変である．

ネーターの定理

力学系のラグランジアン L は一般化座標と $\boldsymbol{q} = (q_1, \cdots, q_n)$ とその時間微分 $\dot{\boldsymbol{q}} = (\dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n)$ の関数

$$L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) \tag{58}$$

である．変数 $\boldsymbol{q}(t)$ はオイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{59}$$

に従って時間変化する．さらに，任意の値の連続パラメータ ε による変数変換 (11) とそれに伴う速度の変換 (15) の下でラグランジアンが不変であったとする：

$$L(\tilde{\boldsymbol{q}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}, t) = L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) \tag{60}$$

以上の仮定の下で，

$$G := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} f_i \tag{61}$$

とおくと，

$$\frac{dG}{dt} = 0 \tag{62}$$

が成り立つ．すなわち，**ラグランジアンに対称性があれば，オイラー・ラグランジュ方程式に保存量がある．**この主張を**ネーターの定理** (Noether theorem) という．また，(61) 式で定められる G をネーター保存量，もしくは，**ネーターチャージ** (Noether charge) という．

問 15. (59) と (60) から (62) を導け．

問 16. 最小作用の原理からネーターの定理を直接導け．

問 17. 関数 $f(x, y, z)$ に対して

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} := \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \tag{63}$$

で定まるベクトルを f の**勾配ベクトル場** (gradient vector field) という．この記法を使うと

ラグランジアン $L(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})$ に対するオイラー・ラグランジュ方程式 (59) は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}}=0 \tag{64}$$

と書ける．以下の問に答えよ：
(i) 定数のベクトル $\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$ と関数 $f(\boldsymbol{r}+\varepsilon\boldsymbol{c})$ について

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{r}+\varepsilon\boldsymbol{c})}{\partial\varepsilon}=\frac{\partial f(\boldsymbol{r}+\varepsilon\boldsymbol{c})}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{c} \tag{65}$$

が成り立つことを示せ．
(ii) 関数 $F(r)$ の引数 r に $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\|\boldsymbol{r}\|$ を代入した関数について

$$\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{r}}=\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \tag{66}$$

が成り立つことを示せ．
(iii) 関数

$$U(r)=U(\|\boldsymbol{r}\|)=-\frac{1}{r} \tag{67}$$

について

$$-\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}}=-\frac{1}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{68}$$

が成り立つことを示せ．

問 18．3 次元空間中の N 個の質点からなる系に対するラグランジアン

$$L=\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{1}{2}m_\alpha\boldsymbol{v}_\alpha\cdot\boldsymbol{v}_\alpha-\sum_{\alpha<\beta}U_{\alpha\beta}\Big(\|\boldsymbol{r}_\alpha-\boldsymbol{r}_\beta\|\Big) \tag{69}$$

を考える．
(i) 質点を一斉に平行移動させる変換 $\boldsymbol{r}_\alpha\mapsto\boldsymbol{r}_\alpha+\varepsilon\boldsymbol{c}$ $(\alpha=1,\cdots,N)$ の下でラグランジアン (69) が不変であることを示せ．
(ii) (i) で述べた対称性に伴うネーターチャージを求めよ．
(iii) 質点を一斉に回転移動させる無限小変換 $\boldsymbol{r}_\alpha\mapsto\boldsymbol{r}_\alpha+\varepsilon\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}_\alpha$ $(\alpha=1,\cdots,N)$ の下でラグランジアン (69) が不変であることを示せ．
(iv) (iii) で述べた対称性に伴うネーターチャージを求めよ．
(v) 位置エネルギーの各項が

$$U_{\alpha\beta}\Big(\|\boldsymbol{r}_\alpha-\boldsymbol{r}_\beta\|\Big)=-\frac{G_N m_\alpha m_\beta}{\|\boldsymbol{r}_\alpha-\boldsymbol{r}_\beta\|} \tag{70}$$

で与えられるとき，ラグランジアン (69) に対するオイラー・ラグランジュ方程式を書け．ただし G_N はニュートンの万有引力定数である．

同値なラグランジアン

2 つの異なるラグランジアン $L,\ \tilde{L}$ から出て来るオイラー・ラグランジュ方程式がまったく同じ式になることがある．

問 19．ラグランジアン $L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$ が与えられたときに，任意の関数 $W(\boldsymbol{q},t)$ を用いて

$$\begin{aligned}\tilde{L}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) &:= L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)+\frac{dW}{dt}\\ &= L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial W}{\partial t}\end{aligned} \tag{71}$$

で新しいラグランジアン $\tilde{L}$ を定めると，$\tilde{L}$ のオイラー・ラグランジュ方程式は L のオイラー・ラグランジュ方程式とまったく同じであることを確認せよ．関係式 (71) を満たすラグランジアン L と $\tilde{L}$ は**同値** (equivalent) であるという．

問 20．変数 x,y を持つ 2 つのラグランジアン

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+Bx\dot{y} \tag{72}$$

$$\tilde{L}=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-B\dot{x}y \tag{73}$$

のそれぞれのオイラー・ラグランジュ方程式を書いて，結果的に同じ方程式になっていることを確認せよ．また，

$$\tilde{L}-L=\frac{dW}{dt} \tag{74}$$

となるような関数 $W(x,y)$ を示せ．

問 21. 関係式 (71) で結ばれる 2 つのラグランジアン $L, \tilde{L}$ が同じオイラー・ラグランジュ方程式を導くことを，最小作用の原理（変分法）の観点から説明せよ．

準不変性に伴う保存量

2 つの異なるラグランジアン $L,\ \tilde{L}$ から出て来るオイラー・ラグランジュ方程式がまったく同じ式になることがあるのだから，運動法則の不変性（対称性）を言うためには，(60) のようにラグランジアンが完全に不変である必要はなく，不変性という条件を緩めてよい．

無限小変換

$$q_i \ \mapsto\ \tilde{q}_i = q_i + \varepsilon f_i(\boldsymbol{q}) \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{75}$$

に伴ってラグランジアンが

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) \ &\mapsto\ L(\boldsymbol{q} + \varepsilon \boldsymbol{f}, \dot{\boldsymbol{q}} + \varepsilon \dot{\boldsymbol{f}}, t) \\ &= L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) + \varepsilon \frac{dW(\boldsymbol{q}, t)}{dt} \end{aligned} \tag{76}$$

のように変わるならば，ラグランジアンは変換 (75) の下で**準不変** (quasi-invariant) であるという．以上の仮定の下で，

$$G := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} f_i - W \tag{77}$$

とおくと，

$$\frac{dG}{dt} = 0 \tag{78}$$

が成り立つ．つまり，**ラグランジアンがある変換の下で（不変でなくても）準不変でありさえすれば，オイラー・ラグランジュ方程式の保存量がある．** (77) 式で定められる G もネーター保存量，もしくは，ネーターチャージと呼ばれる．

問 22. ラグランジアンの準不変性 (76) とオイラー・ラグランジュ方程式 (59) と関数 G の定義式 (77) から，保存則 (78) を導け．

問 23. (i) 変数 x, y を持つラグランジアン

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + Bx\dot{y} \tag{79}$$

は $x \mapsto x + \varepsilon$ という変換の下で準不変であることを確かめよ．この対称性に伴うネーターチャージ G_x を求めよ．
(ii) ラグランジアン (79) は $y \mapsto y + \varepsilon$ という変換の下で不変であることを確かめよ．この対称性に伴うネーターチャージ G_y を求めよ．
(iii) (i), (ii) で求めた 2 つのネーターチャージ G_x, G_y が定数であることから，$\dot{x}, \dot{y}$ に対する方程式を得る．この方程式を解け（結果的に (79) から出て来るオイラー・ラグランジュ方程式を解いたことになる）．
(iv) $(x(t), y(t))$ が平面上でどんな運動をするか図を描いて説明せよ．

時間並進対称性とエネルギー保存則

力学変数 $\boldsymbol{q}(t)$ は時間の関数であり，結果的にラグランジアン $L(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t)$ も時間 t の関数になるが，直接的には L が t の関数になっておらず $\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t)$ を通してのみ変数 t に依存するような系もあるし，直接的に L が t に依存している系もある．例えば，

$$L_1 = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2 \tag{80}$$

は，あからさまには変数 t に依存していないが，

$$L_2 = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2 + fx\cos\Omega t \tag{81}$$

はあからさまには変数 t に依存している．

ラグランジアン $L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ が直接的には時間 t の関数になっていないような系を**自律系（自励系）** (autonomous system) という．

それに対して，ラグランジアン $L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ があからさまに時間 t の関数になっている系を**非**

自律系 (non-autonomous system) という.「外からの影響下にある系」と呼ぶ方がわかりやすいかもしれない．例えば，振り子を手で揺さぶるといった場合は，人為的に決められた外力を振り子に加えることになり，外力のありようは振り子自体の運動によって決まるのではなく，外力は時間に依存した関数として用意される．そのような系は，ラグランジアンも時間に陽に依存する．

自律系の場合，力学系は**時間並進対称性** (time-translation symmetry) を持つ．これは，初期条件 $\boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{q}_0$ を与えた系が時刻 t に $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}_1$ まで動くならば，初期条件を課す時刻をずらして時刻 ε に条件 $\boldsymbol{q}(\varepsilon) = \boldsymbol{q}_0$ を与えれば時刻 $\varepsilon + t$ に $\boldsymbol{q}(\varepsilon + t) = \boldsymbol{q}_1$ に達する，という意味である．

時間並進対称に伴う保存量を見つけることができる．無限小時間 ε だけ時間をずらすと力学変数は

$$q_i(t) \ \mapsto \ q_i(t+\varepsilon) = q_i(t) + \varepsilon \dot{q}_i \tag{82}$$

$$\dot{q}_i(t) \ \mapsto \ \dot{q}_i(t+\varepsilon) = \dot{q}_i(t) + \varepsilon \ddot{q}_i \tag{83}$$

の分だけ変換を受ける．これは (75) で $f_i = \dot{q}_i$ と選ぶことに相当する．この変換の下でラグランジアンは

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \ &\mapsto \ L(\boldsymbol{q} + \varepsilon \dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{q}} + \varepsilon \ddot{\boldsymbol{q}}) \\ &= L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon \Big(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \cdot \ddot{\boldsymbol{q}} \Big) \end{aligned} \tag{84}$$

のように変わる．もしもラグランジアン $L(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t)$ が t に陽に依存していたら，

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \cdot \ddot{\boldsymbol{q}} + \frac{\partial L}{\partial t} \tag{85}$$

となるはずだが，いま自律系なので $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ である．すると，

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \ &\mapsto \ L(\boldsymbol{q} + \varepsilon \dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{q}} + \varepsilon \ddot{\boldsymbol{q}}) \\ &= L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon \frac{dL}{dt} \end{aligned} \tag{86}$$

となる．この式 (86) は式 (76) で $W = L$ と選ぶことに相当し，結果的にラグランジアンは準不変である．この場合のネーターチャージ (77) は

$$E := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \tag{87}$$

となる．この E を**エネルギー保存量**という．

問 24. (80) のラグランジアン L_1 に伴うエネルギー保存量を書け.

問 25. (69) のラグランジアン L に伴うエネルギー保存量を書け.

問 26. (75) では f_i は $\boldsymbol{q}$ の関数だと書いていたので，$f_i = \dot{q}_i$ と選ぶことは本当はネーターの定理の適用外である．また，(76) では W は $\boldsymbol{q}$ の関数だと書いていたので，$W = L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ と選ぶこともネーターの定理の適用外である．にも関わらず，(87) の E は保存量になっている．オイラー・ラグランジュ方程式 (59) と L の時間微分の書き換え (85) と自律系の条件 $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ から，エネルギー保存則 $\frac{dE}{dt} = 0$ を導け.

対称性・保存量があると何かいいことがあるのか？

1. 運動方程式を解かなくても（書かなくても）対称性からただちに保存量の存在を見抜くことができる．2. 保存量を使って力学変数の個数を減らすことができる．うまくすると，保存量を使って運動方程式を完全に解くこともできる（そういう系は可積分系と呼ばれる）．3. 運動方程式を解かなくても，保存量を使って系の運動の様子を定性的に分析することができる．