物質情報学 5（量子力学），担当 谷村省吾，講義ノート 1

複素数

複素数は量子力学にとって最も基本的な道具・言葉である．**複素数は抽象的な記号だが，複素平面という視覚イメージを持つと理解しやすくなるし，たいして難しいものではない．しかし，実際に自分で手を動かして計算したり絵を描いたりしないと，自由に扱えるようにならないし，本当には複素数を理解しないままでいることになる．面倒くさがらずに計算練習をやってほしい．** こういうことをしつこく言っても，試験をしてみると複素数の計算がまったくできない学生が何人かいる．複素数なしには量子力学は理解できないので，何としても自分のものにするつもりで取り組んでほしい．

虚数の導入

実数全体の集合を $\mathbb{R}$ と書く．実数は加減乗除（和差積商）の四則演算ができる（0 で割ることだけはできない）．**実数は二乗すれば必ず正または 0 になる**：

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq 0 \tag{1}$$

ゆえに，**二乗して負になる実数はない．** 例えば

$$x^2 = 2 \tag{2}$$

という方程式には

$$x = \pm\sqrt{2} = \pm 1.41421356\cdots \tag{3}$$

という実数根が存在するが，

$$x^2 = -1 \tag{4}$$

という方程式を満たす実数 x はない．それでも形式的に

$$i = \sqrt{-1} \tag{5}$$

という記号を定めれば，$x^2 = -1$ の根は $x = \pm i$ と書ける．i は**虚数単位** (imaginary unit) と呼ばれ，$\boldsymbol{i^2 = -1}$ という式で特徴付けられる．虚数を使えば，例えば

$$x^2 = -4 \tag{6}$$

の根は

$$x^2 = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i \tag{7}$$

と書ける．

問 1. 方程式

$$az^2 + bz + c = 0 \tag{8}$$

の解は，

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{9}$$

で与えられることを示せ（$b^2 - 4ac < 0$ のときの解は虚根と呼ばれ，

$$z = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \tag{10}$$

で与えられる）．

複素数の定義

2 つの実数 x, y に対して

$$z = x + iy \tag{11}$$

と書かれる記号 z を**複素数** (complex number) という．複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ と書く．また，複素数 $z = x + iy$ に対し

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z \tag{12}$$

と書き，x を z の**実部** (real part), y を z の**虚部** (imaginary part) という．

複素数の演算

実数 a, b, c, d に対して

$$z = a + ib, \quad w = c + id \tag{13}$$

という 2 つの複素数 z, w を定めると，これらの和差積商は

$$z + w = (a + c) + i(b + d), \tag{14}$$
$$z - w = (a - c) + i(b - d), \tag{15}$$
$$zw = ac - bd + i(ad + bc), \tag{16}$$
$$\frac{z}{w} = \frac{ac + bd + i(-ad + bc)}{c^2 + d^2} \tag{17}$$

で定められる．

$z = a + ib$ の虚部の符号を変えた複素数を

$$\bar{z} = z^* = a - ib \tag{18}$$

と書き，z の**共役複素数** (conjugate) という．また，

$$|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{19}$$

を z の**絶対値** (absolute value) という．$|z|$ は必ず正または 0 の実数である．例えば，

$$|4 + 3i|^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \tag{20}$$
$$|4 + 3i| = \sqrt{25} = 5 \tag{21}$$
$$\begin{aligned}(4 + 3i)^2 &= (4 + 3i)(4 + 3i) \\ &= 4^2 + 2 \times 4 \times 3i + (3i)^2 \\ &= 16 + 24i - 9 \\ &= 7 + 24i \end{aligned} \tag{22}$$
$$\begin{aligned}|(4 + 3i)^2| &= |7 + 24i| \\ &= \sqrt{7^2 + 24^2} \\ &= \sqrt{49 + 576} \\ &= \sqrt{625} = 25 \end{aligned} \tag{23}$$

という等式が成り立つ．それぞれ何を計算しているのかよく見てほしい．とくに，$|4+3i|^2$ と $(4 + 3i)^2$ は等しくない．**注意：絶対値は必ず非負の実数になる．絶対値の計算結果に虚数 i が現れることはあり得ない．絶対値が負の数になることもない．**

問 2. 上の式 (17) で定めた $\frac{z}{w}$ に対して

$$\frac{z}{w} \cdot w \;=\; z \tag{24}$$

が成り立つことを確かめよ．つまり，

$$\frac{ac + bd + i(-ad + bc)}{c^2 + d^2} \cdot (c + id) \tag{25}$$

を計算して，これが $a + ib$ になることを確かめよ．

代数学の基本定理

$n = 1, 2, 3, \cdots$ と任意の複素数 $a_1, \cdots, a_n$ に対し方程式

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0 \tag{26}$$

にあてはまる複素数 z が必ず存在する．解は（重根があれば重複度の分だけ繰り返し数えれば）n 個存在する．

実数係数の代数方程式の実数解は存在するとは限らないが（例えば $x^2 + 1 = 0$ の実数解はない），複素数係数の代数方程式には複素数解でよければ必ず解が存在するというのが上の主張である．複素数は 2 次方程式を形式的に解くために導入されたものだが，それだけで 3 次方程式も 4 次方程式も解の存在が保証されるのであり，代数方程式の解の存在を保証するという目的に限れば複素数以上の拡張概念は必要ないのである．

問 3. 以下のそれぞれの方程式にあてはまる複素数 z を求めよ（答えは具体的な実数 a, b を使って $a + bi$ の形で書け．解が 2 つ以上ある場

合はすべての解を書くこと）.

$$\text{(i)} \quad z^2 = 2i \tag{27}$$

$$\text{(ii)} \quad z^2 = 3 + 4i \tag{28}$$

$$\text{(iii)} \quad z^2 = -5 + 12i \tag{29}$$

$$\text{(iv)} \quad z^2 = -15 + 8i \tag{30}$$

$$\text{(iv)} \quad z^3 = -2 + 2i \tag{31}$$

複素平面

実数 x を横軸の数直線で表し，実数 y を縦軸の数直線で表せば，複素数 $z = x + iy$ は xy 平面上の点で表される．このような平面を**複素平面** (complex plane) といい，x 軸を**実軸** (real axis), y 軸を**虚軸** (imaginary axis) という．

このとき点 z と原点 0 との距離は絶対値

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{32}$$

に等しい．また，原点 0 から点 z を通る半直線と x 軸のプラス側半直線とがなす角を z の**偏角** (argument) あるいは**位相** (phase) という．ラジアン単位で測った偏角を

$$\arg\, z \tag{33}$$

と書く．$\arg\, z = \theta$ とおけば

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{34}$$

が成り立つ．これを複素数の**極表示**ともいう．

問 4. 以下の複素数の位置を複素平面に図示せよ．さらにそれぞれの $|z|$ と $\arg\, z$ を求めよ．

$$\text{(i)} \quad z = 1 + i \tag{35}$$

$$\text{(ii)} \quad z = 1 + i\sqrt{3} \tag{36}$$

$$\text{(iii)} \quad z = \sqrt{3} + i \tag{37}$$

$$\text{(iv)} \quad z = -1 + i\sqrt{3} \tag{38}$$

$$\text{(v)} \quad z = -1 - i \tag{39}$$

$$\text{(vi)} \quad z = 1 - i \tag{40}$$

指数関数

正の実数 a を底とする指数関数は，掛け算の繰り返しで定義される：

$$a^n = a \times a \times \cdots \times a \quad (n\text{ 個の } a \text{ の積}) \tag{41}$$

この定義から，指数法則と呼ばれる性質

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \tag{42}$$

が成り立つことが証明できる．

指数関数の素朴な定義式 (41) によって，x が自然数のときに a^x は定義されるが，x の値が 0 や負の整数や分数や無理数や複素数の場合でも a^x が指数法則を満たすことを要請して a^x の定義域を拡張することができる．つまり，指数関数 $\phi(x)$ は形式的に

$$\phi(x + y) = \phi(x) \cdot \phi(y) \tag{43}$$

を満たすものとする．この定義から，

$$\phi(x) = \phi(x + 0) = \phi(x) \cdot \phi(0) \tag{44}$$

なので，$\phi(x) \neq 0$ であれば

$$\phi(0) = 1 \tag{45}$$

がわかる．もしも $\phi(b) = 0$ となるような数 b があれば，任意の x について

$$\phi(x) = \phi(x - b + b) = \phi(x - b) \cdot \phi(b) = 0$$

が言えてしまい，$\phi(x)$ は恒等的にゼロになってしまう．これでは面白い関数とは言えないので，$\phi(b) = 0$ となるような b は存在しないことを要請する．

また，指数関数 $\phi(x)$ の性質を知るために，その微分を調べる：

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\phi(x)\cdot\phi(h)-\phi(x)}{h}\\ &= \left\{\lim_{h\to 0}\frac{\phi(h)-1}{h}\right\}\cdot\phi(x)\\ &= c\cdot\phi(x) \qquad (46)\end{aligned}$$

つまり，関数 $\phi(x)$ は x で微分しても定数倍になるだけである．とくに $c=1$ と選んで，微分方程式の初期値問題

$$\frac{d\phi}{dx}=\phi(x), \qquad \phi(0)=1 \qquad (47)$$

の解

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\\ &= 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots \qquad (48)\end{aligned}$$

を自然な指数関数 $\phi(x)=e^x$ と呼ぶ．この形で指数関数を定義しておくと，変数 x に実数でも複素数でも正方行列でも代入することができる．

複素数の指数関数

複素数 z の指数関数 (exponential function) は

$$\begin{aligned}e^z &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n\\ &= 1+z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots \qquad (49)\end{aligned}$$

で定義される．当たり前ではないことだが，任意の複素数 z に対して，この無限級数は収束する．$e^z=\exp z$ とも書く．明らかに

$$e^0=1 \qquad (50)$$

である．複素数 α と実数 t に関して

$$\frac{d}{dt}\,e^{\alpha t}=\alpha\,e^{\alpha t} \qquad (51)$$

が成り立つ．また，任意の複素数 z,w に対して

$$(\exp z)^*=\exp(z^*) \qquad (52)$$

$$e^{z+w}=e^z\cdot e^w \qquad (53)$$

が成り立つ．実数 θ に対して

$$\begin{aligned}\left|e^{i\theta}\right|^2 &= e^{i\theta}(e^{i\theta})^*=e^{i\theta}e^{-i\theta}\\ &= e^{i\theta-i\theta}=e^0=1 \qquad (54)\end{aligned}$$

が成り立つので，

$$\left|e^{i\theta}\right|=1 \qquad (55)$$

である．

また，

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \qquad (56)$$

$$e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta \qquad (57)$$

あるいは

$$\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}) \qquad (58)$$

$$\sin\theta=\frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta}) \qquad (59)$$

で三角関数 cos, sin を定義する．(56) を使うと，複素数の極表示 (34) は

$$z=|z|\,e^{i\theta} \qquad (60)$$

とも書ける．

問 5. 以下の計算をせよ（計算結果は，具体

的な実数 a,b を用いて $a+bi$ の形に書け）.

$$(-2+3i)+(6+5i) \tag{61}$$
$$(-2+3i)-(6+5i) \tag{62}$$
$$(-2+3i)\times(6+5i) \tag{63}$$
$$4i\times(-2+3i) \tag{64}$$
$$(3+4i)^2 \tag{65}$$
$$(3+4i)^3 \tag{66}$$
$$(3+4i)^* \tag{67}$$
$$(3+4i)^*\times(5+2i) \tag{68}$$
$$|3+4i|^2 \tag{69}$$
$$|3+4i| \tag{70}$$

$$\frac{1}{3+4i} \tag{71}$$

$$\left|\frac{1}{3+4i}\right| \tag{72}$$

$$\frac{2+5i}{3+4i} \tag{73}$$

$$\sqrt{i} \tag{74}$$
$$\sqrt{1+i\sqrt{3}} \tag{75}$$
$$e^{i\pi/4} \tag{76}$$
$$e^{i3\pi/4} \tag{77}$$
$$e^{i\pi/6} \tag{78}$$
$$e^{-i\pi/3} \tag{79}$$

問 6. 任意の複素数について以下の関係式が成り立つことを証明せよ：

$$\mathrm{Re}\,z=\frac{1}{2}(z+z^*) \tag{80}$$
$$\mathrm{Im}\,z=\frac{1}{2i}(z-z^*) \tag{81}$$
$$(z+w)^*=z^*+w^* \tag{82}$$
$$(z-w)^*=z^*-w^* \tag{83}$$
$$(zw)^*=z^*w^* \tag{84}$$
$$\left(\frac{z}{w}\right)^*=\frac{z^*}{w^*} \tag{85}$$
$$|z|^2=zz^* \tag{86}$$
$$\frac{1}{z}=\frac{z^*}{|z|^2} \tag{87}$$
$$|zw|=|z|\,|w| \tag{88}$$
$$\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|} \tag{89}$$
$$\arg(zw)=\arg z+\arg w \tag{90}$$
$$\arg\left(\frac{z}{w}\right)=\arg z-\arg w \tag{91}$$

問 7. 任意の複素数について以下の関係式が成り立つことを証明せよ．また，等号が成り立つための必要十分条件を示せ.

$$|z+w|\le|z|+|w|, \tag{92}$$
$$|z-w|\ge|z|-|w| \tag{93}$$

問 8. 以下のおのおのの関係式を満たす複素数 z,w の例を挙げよ.

$$|z+w|^2>|z|^2+|w|^2 \tag{94}$$
$$|z+w|^2=|z|^2+|w|^2 \tag{95}$$
$$|z+w|^2<|z|^2+|w|^2 \tag{96}$$

注：(92), (93) は，いかなる複素数 z,w に対しても必ず成立する関係式である．(94), (95), (96) はいつでも成り立つ関係式ではなく，複素数 z,w の値に応じて (94), (95), (96) のうちのどれか一つだけが成立する.

問 9. 次の命題を証明せよ.「複素数 z,w において，$zw=0$ ならば $z=0$ または $w=0$ である.」

問 10. 次の命題を証明せよ.「複素数 z において，$z=0$ ならば $|z|=0$ である．また，$|z|=0$ ならば $z=0$ である.」

問 11. α を任意の複素数，t を実数変数として

$$\frac{d}{dt}\,e^{\alpha t}=\alpha\,e^{\alpha t} \tag{97}$$

が成り立つことを証明せよ.

問 12. $\cos, \sin$ の定義式 (58), (59) から

$$\frac{d}{d\theta}\cos\theta = -\sin\theta \tag{98}$$
$$\frac{d}{d\theta}\sin\theta = \cos\theta \tag{99}$$

を示せ.

問 13. α, β を任意の実数とする．指数関数と三角関数を結びつける式 (56) と指数法則

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta} \tag{100}$$

から三角関数の加法定理

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta \tag{101}$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta \tag{102}$$

を導け.

双曲線関数

複素数 z に対して

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \tag{103}$$
$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \tag{104}$$

で定まる cosh を双曲線余弦関数 (hyperbolic cosine)，sinh を双曲線正弦関数 (hyperbolic sine) という．また,

$$\tanh z = \frac{\cosh z}{\sinh z} \tag{105}$$

を双曲線正接関数 (hyperbolic tangent) という.

問 14. 次の関数のグラフを書け：

$$\text{(i)} \quad y = \cosh x \tag{106}$$
$$\text{(ii)} \quad y = \sinh x \tag{107}$$
$$\text{(iii)} \quad y = \tanh x \tag{108}$$

問 15. 次の式を満たす実数の組 (x, y) のグラフを書け：

$$x^2 - y^2 = 1 \tag{109}$$

問 16. 次の関係式を証明せよ：

$$(\cosh z)^2 - (\sinh z)^2 = 1, \tag{110}$$
$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x, \tag{111}$$
$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x \tag{112}$$

問 17. t を正の実数とする．xy 座標平面において原点 O$= (0,0)$ とする．直線 $x = 1$ の上に点 A$=$ $(1,0)$，点 P$=$ $(1,\, t)$ を定める．線分 OA, AP, OP で囲まれる図形の面積を求めよ.

問 18. t を正の実数とする．xy 座標平面において円周 $x^2 + y^2 = 1$ の上に点 A$= (1,0)$，点 P$= (\cos\, t, \sin\, t)$ を定める．原点 O$= (0,0)$ とするとき，線分 OA と円弧 AP と線分 OP で囲まれる図形の面積を求めよ.

問 19. t を正の実数とする．xy 座標平面において双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の上に点 A$= (1,0)$ と点 P$= (\cosh\, t, \sinh\, t)$ を定める．原点 O$= (0,0)$ とするとき，線分 OA と双曲線の一部分の弧 AP と線分 OP で囲まれる図形の面積を求めよ.

参考文献

[1] 谷村省吾「ゼロから学ぶ数学・物理の方程式」（講談社）．大学の数学に落ちこぼれたと思う人は読んでほしいです.

[2] 洲之内治男・猪股清二「関数論」（サイエンス社）．複素数の関数についての本です.

[3] ファインマン，レイトン，サンズ「ファインマン物理学 5：量子力学」（岩波書店）．量子力学をはじめて学ぶにはこの本がよいと思います.