

演習問題

[1] 以下の数を求めよ．計算結果は具体的な実数 a, b を用いて $a + bi$ の形で書け．

- (1) $(3 + 2i)^*$ (4) $|-4 - 5i|^2$
 (2) $(3 + 2i)^2$ (5) $e^{i\pi/6}$
 (3) $|3 + 2i|^2$ (6) $e^{-i2\pi/3}$

[2] 1次元空間中を動く粒子の波動関数 $\psi(x)$ について以下の問に答えよ．ただし a, c は正の実数とする．

$$\psi(x) = \begin{cases} ce^{-x/a} & (x \geq 0) \\ ce^{x/a} & (x < 0) \end{cases}$$

- (1) 関数 $\psi(x)$ のグラフを描け．
 (2) $\|\psi\|^2 := \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx$ を求めよ．
 (3) $\|\psi\|^2 = 1$ となるように c を求めよ．
 (4) この粒子が $a \leq x \leq 2a$ の範囲に見つかる確率を求めよ．

[3] (1) 次の行列で表される物理量 \hat{A} の固有値 a_1, a_2 を求めよ．それぞれに属する固有ベクトル $|\chi_1\rangle, |\chi_2\rangle$ も求めよ．ただし $a_1 \leq a_2$ とし，固有ベクトルは規格化せよ．

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2+i \\ 2-i & -1 \end{pmatrix}$$

(2) 次のベクトル $|\phi\rangle$ が $\langle\phi|\phi\rangle = 1$ を満たすように定数 c の値を決めよ．

$$|\phi\rangle = c \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3) 上の状態ベクトル $|\phi\rangle$ において物理量 \hat{A} を測ったとき測定値として a_1 または a_2 を得る確率をそれぞれ求めよ．

(4) 状態 $|\phi\rangle$ における \hat{A} の期待値を求めよ．

[4] 次のハミルトニアン \hat{H} によるシュレーディンガー方程式に従う状態ベクトル $|\psi(t)\rangle$ を考える．ただし， ε, α は正の実数定数， t は実数変数， c_1, c_2 は複素変数とする．

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -i\alpha \\ i\alpha & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad |\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

- (1) このハミルトニアンに対する定常状態を 2 つ求めよ．
 (2) シュレーディンガー方程式の初期値問題の解を求めよ．
 (3) 初期状態ベクトルが次の $|\psi(0)\rangle$ だった場合の $c_1(t), c_2(t)$ を求めよ．

$$|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} c_1(0) \\ c_2(0) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ i \end{pmatrix}$$

- (4) (3) で求めた確率振幅 $c_1(t), c_2(t)$ に対して確率 $p_1(t) = |c_1(t)|^2$ と $p_2(t) = |c_2(t)|^2$ を求めよ．
 (5) $p_1(t)$ と $p_2(t)$ のグラフを描け．グラフの座標軸には数や文字で目盛を記せ．
 (6) $p_1(t)$ は周期関数になる．この関数の周期を求めよ．なお，周期とは，任意の t に対して $p_1(t+T) = p_1(t)$ と $T > 0$ を満たす最短の時間 T のことである．

(7) (3) の解の状態ベクトル $|\psi(t)\rangle$ において, 問 [3] (1) で導入された物理量 \hat{A} を測ったとき, 測定値として a_1 または a_2 を得る確率をそれぞれ求めよ.

(8) (3) の解の状態ベクトル $|\psi(t)\rangle$ において, 問 [3] (1) の物理量 \hat{A} の期待

値を求めよ.

[5] 講義ノート 5 (非可換性と干渉効果) の問 2, 問 3, 問 7, 問 8, 問 9, 問 10 を解け.

[6] 講義ノート 8 (不確定性関係) の問 6, 問 7 を解け.