◦ 現代数学社「理系への数学」2010年12月号 pp59-65
21世紀の量子論入門 第8回
「ベルの不等式とミステリー姉妹」

2017・10・18(　　)

複雑系科学特論1

量子基礎論　　谷村省吾

参考文献
◦別冊日経サイエンス No199『量子の逆説』
に収録「量子の地平線」

古典力学 classical mechanics ⟷ 量子力学 quantum mechanics

マクロの系 ~~のを~~ を対象とする　　ミクロの系

目に見え手に触れるサイズの物体の運動　　原子、電子、原子核、光子、素粒子…

ボール、車、ロケット、人工衛星、月、惑星…

共通点と相違点

力学の構文

		例
系 (system)	「Aという系が	質量144グラムのボールが
状態 (state)	Bという状態にあるとき	時速120kmで飛んでいるとき
物理量 (observable)	Cという物理量が	ボールの運動エネルギーは
値 (value)	Dという値を持つ。」	80ジュールの値を持つ

この形式は量子・古典で共通。

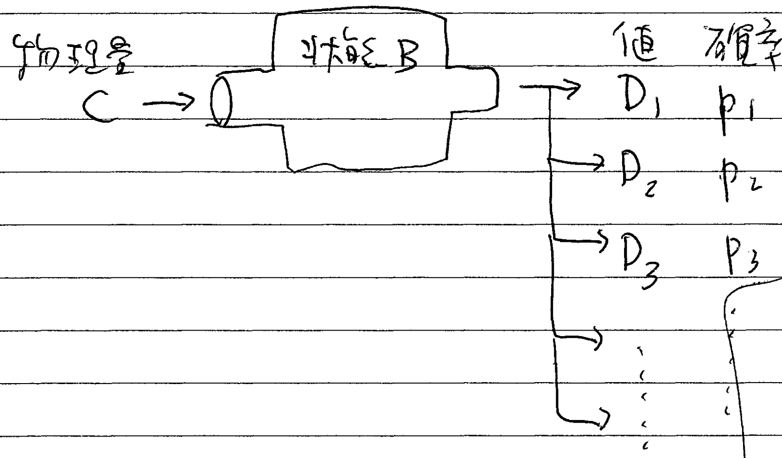
物理量とは… 測って数値化できるものであり、和、スカラー倍、積が定まるもの

$C_1 + C_2$

λC

$C_1 C_2$

量子力学では
同じ系
同じ状態で
同じ物理量を測っても
同じ値が得られるとは限らない。



$\cancel{E = 80}$

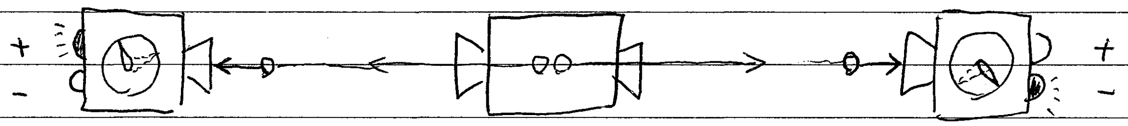
$$\underbrace{E = \frac{1}{2} m v^2}_{\text{物理量の関係式}} = \underbrace{80\,\mathrm{J}}_{\text{物理量の値}}$$

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + mgh + \frac{1}{2} k x^2$$

測るたびに異なる値が出て来ることがある。　物理量の値は知らなくても物理量の演算はできる。

そこで、確率を論ずる

ここまでだったらさほど不思議ではないが…
こんな実験を考えよう.



実験者はダイヤルをAかBにセットする
~~粒子が~~ 測定器が粒子をキャッチすると
プラスかマイナスのランプが点く.
その結果を

こちらもダイヤルをUまたはVにセット
測定結果を
$U=-1$ とか
$V=+1$ と書く.

$A=+1$ とか (Aという物理量が $+1$ という値をとる)
$B=-1$ と書く (B 〃 -1 〃)

粒子のペアは毎回同じ状態で準備される
しかし Aを測ると、測るたびに $+1$ だったり -1 だったりする.
Aの測定データ $+1, +1, -1, +1, -1, +1, -1, -1, -1, +1, -1, -1, +1 \cdots$
→ +と−のランダムな列に見える.
+, − の出現確率はどちらも $\frac{1}{2}$
BやUやVも同様. 測定値は ± 1 の乱数列. 確率 $\frac{1}{2}$

ペアナンバー	左のダイヤル (実験者がコントロール)	右のダイヤル (実験者がコントロール)	測定結果		測定値のかけ算
1	A	U	$A=+1$	$U=+1$	$AU=+1$
2	A	V	$A=+1$	$V=-1$	$AV=-1$
3	A	V	$A=-1$	$V=-1$	$AV=+1$
4	B	U	$B=1$	⋮	⋮
5	B	V	$B=-1$	⋮	⋮
6	B	U	$B=+1$		⋮
⋮	A	V	$A=-1$		
⋮	⋮				

$A \cdot U$ の平均値を $\langle AU \rangle$ と書く.

$\langle AV \rangle$

$\langle BU \rangle$

$\langle BV \rangle$ も同様.

一回の実験で A と B の ~~値~~ 両方の値を測ることはないので AB や $\langle AB \rangle$ は定められない.

~~このとき、次の~~

Definition

$$\langle S \rangle := \langle AU \rangle + \langle AV \rangle + \langle BU \rangle - \langle BV \rangle$$

Theorem Bell (1964), Clauser-Horne-Shimony-Holt (1969)

$$-2 \leqq \langle S \rangle \leqq 2$$

証明 A の値が a, B の値が b, U の値が u, V の値が v となる確率を $P(a,b,u,v)$ とする。

(a, b, u, v はそれぞれ ± 1)

$(A=a)$ かつ $(U=u)$ となる確率 $P_{AU}(a,u) = \sum_{b=\pm 1}\sum_{v=\pm 1} P(a,b,u,v)$

$$\langle AU \rangle = \sum_{\substack{a=\pm 1\\ u=\pm 1}} a \cdot u \cdot P_{AU}(a,u)$$

$$= \sum_{a,b,u,v=\pm 1} a \cdot u \cdot P(a,b,u,v)$$

~~など~~ $\langle AV \rangle$, $\langle BU \rangle$, $\langle BV \rangle$ なども同様

そうすると

$$\langle S \rangle = \sum_{a,b,u,v} au\,P(a,b,u,v)$$
$$+ \sum av\,P(a,b,u,v)$$
$$+ \sum bu\,P(a,b,u,v)$$
$$- \sum bv\,P(a,b,u,v)$$
$$= \sum_{a,b,u,v=\pm 1} (au + av + bu - bv)\,P(a,b,u,v)$$

$=$

$$\langle S\rangle = \sum_{a,b,u,v=\pm1} \{a(u+v)+b(u-v)\}\, P(a,b,u,v)$$

u	v	$u+v$	$u-v$
+1	+1	2	0
+1	−1	0	2
−1	+1	0	−2
−1	−1	−2	0

$(u+v)$ と $(u-v)$ は どちらか一方が ~~…~~ 0 で、
他方が ± 2.

~~…~~ また、a, b も ± 1 の ~~…~~ 値をとるので
$s = a(u+v)+b(u-v)$ ~~…~~ の値は ± 2.

一般に関数 $f(a,b,u,v)$ の最大値が f_{max}, 最小値が f_{min} だとしたら

$$f_{min} \leq f(a,b,u,v) \leq f_{max}$$

確率 $P(a,b,u,v)$ は実数であり、~~…~~ 負の数にはならないので

$$f_{min}\cdot P(a,b,u,v) \leq f(a,b,u,v)\cdot P(a,b,u,v) \leq f_{max}\cdot P(a,b,u,v)$$

$a,b,u,v=\pm1$ について和をとると、全確率 $= \sum_{a,b,u,v} P(a,b,u,v) = 1$ なので

$$f_{min} \leq \langle f\rangle \leq f_{max}$$

となる。

いまの場合、s の最大値は $+2$, 最小値は -2 なので
s の平均値 $\langle S\rangle$ について

$$-2 \leq \langle S\rangle \leq 2$$

が成り立つ。
これで BCHSH の不等式が証明できた。

・古典力学と量子力学では物理量の代数構造が異なる。

X と Y という物理量を考える。

$X^2 = 1$ とする。

$X^2 - 1 = 0$

$(X-1)(X+1) = 0$

~~$X = 1$~~

$(X-1) = 0$ または $X+1 = 0$

$X = 1$ または $X = -1$.　　X は ± 1 の値をとる。

$Y^2 = 1$ とする $\longrightarrow$ Y は ± 1 の値をとる。

・古典力学では $YX = XY$ ~~$XY = YX$~~ ‥ 物理量のかけ算の順序を変えても結果が変わらない

このとき $X+Y$ はどんな値をとりうる？　可換代数 commutative algebra という。

$$(X+Y)^2 = X^2 + XY + YX + Y^2$$
$$= 1 + 2XY + 1 = 2XY + 2$$
$$\cancel{= 2(1+XY)}$$

$$(X+Y)^2 - 4 = 2XY - 2 = 2(XY-1)$$
$$(X+Y)\{(X+Y)^2 - 4\} = 2(X+Y)(XY-1)$$
$$= 2(X^2Y + XY^2 - X - Y)$$
$$= 2(Y + X - X - Y)$$
$$= 0.$$

ゆえに $(X+Y)\{(X+Y)-2\}\cdot\{(X+Y)+2\} = 0$

$X+Y = 0$ または 2 または -2。

これは X, Y の値が ± 1 だけと仮定すれば直観的にもわかる。

$$YX = XY$$

・量子力学では ~~XY = YX~~ とは限らない!!
非可換代数 (noncommutative algebra)

とくに スピン系と呼ばれるシステムでは ~~XY = −YX~~ $YX = -XY$
このことから何が言えるか?

$$(XY)^2 = XYXY$$
$$= -XXYY$$
$$= -(-1)\cdot(-1)$$
$$= -1 \rightsquigarrow XY \text{のとり得る値は} \pm i = \pm\sqrt{-1}.$$

$$(X+Y)^2 = (X+Y)(X+Y)$$
$$= X^2 + XY + YX + Y^2$$
$$= 1 + XY - XY + 1$$
$$= 2. \rightsquigarrow X+Y \text{のとり得る値は} \pm\sqrt{2}$$

!!

X, Y はそれぞれは ±1 の値をとっていたのに!

古典力学の世界 …. 物理量は可換代数 …. 物理量はつねに値で置き換え可能

$$X^2 = 1 \rightsquigarrow X = \pm 1$$
$$Y^2 = 1 \rightsquigarrow Y = \pm 1$$
$$XY = YX \rightsquigarrow X+Y = \pm 2 \text{ または } 0$$

量子力学の世界 … 物理量は非可換代数 … 物理量がつねに値を持っていると考えてはいけない!

$$X^2 = 1 \rightsquigarrow X = \pm 1$$
$$Y^2 = 1 \rightsquigarrow Y = \pm 1$$
$$YX = -XY \rightsquigarrow X+Y = \pm\sqrt{2} \;!!$$

Bell-CHSH の物理量

~~対~~粒子のペア

物理量 A または B を測る ⟵〜〜○○〜〜⟶ 物理量 U または V を測る

代数関係
$A^2 = 1$
$B^2 = 1$
$U^2 = 1$
$V^2 = 1$
$AU = UA$, $AV = VA$, $BU = UB$, $BV = BV$
$BA = -AB$, $VU = -UV$

問題 以下の関係式を証明せよ.

1. $\cancel{(ABUV)^2}$ $(AB)^2 = -1$
2. $(UV)^2 = -1$
3. $(AB\,UV)^2 = 1$
4. $S := AU + AV + BU - BV$ とおくと,

$\cancel{(S^2 = 4)}$ $S^2 = 4 - 4ABUV$

が成り立つことを示せ

5. この式から $S^2 - 8 = -4 - 4ABUV$ となるが

両辺に S をかけ算すると

$$(S^2 - 8)S = -4(1 + ABUV)\cdot S = 0$$

となることを示せ。

このことから $(S - \sqrt{8})(S + \sqrt{8})S = 0$ となり

$(S - 2\sqrt{2})(S + 2\sqrt{2})S = 0$

S のとり得る値は $\pm 2\sqrt{2}$ または 0 であることがわかる。

数学ノート

物理量 A に対して ~~実数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$~~

一般には 複素数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ で

$$A^n + c_1 A^{n-1} + c_2 A^{n-2} + \cdots + c_{n-1} A + c_n = 0 \quad (*)$$

となるような最小の次数 n の多項式を

A の最小多項式という。(minimal polynomial)

複素数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ を用いて $(*)$ が

$$(A - a_1)(A - a_2) \cdots (A - a_n) = 0$$

という形に因数分解できるなら、

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ を A のスペクトル値 (spectral value) という。

量子力学では

物理量 A の測定値はスペクトル値である。

スペクトル値のどれか一つが測定値として得られる。

$\langle S\rangle = \langle AU\rangle + \langle AV\rangle + \langle BU\rangle - \langle BV\rangle$

$= 2\sqrt{2}$ になるのはいったいどういう状態か？

$\langle AU\rangle = \langle AV\rangle = \langle BU\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\langle BV\rangle = \frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

となればよい。

$\langle AU\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$ とはどういうことか？

$\begin{cases} \text{A と U の ~~符号が~~ その測定値が同符号になる確率を } p_1 \\ \text{A と U の測定値が異符号になる確率を } p_2 \end{cases}$ とすると、

$\langle AU\rangle = p_1 - p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ また $p_1 + p_2 = 1$ だから

$2p_1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$p_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.8535\cdots$

$p_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.1464\cdots$

A	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	…	← ~~と~~ Aだけまたは
U	+	−	−	−	+	−	+	+	−	+	+	−	−	…	← Uだけ見ると

↑ ↑ ↑ ↑ ↑

+、−が $\frac{1}{2}$ の確率でランダム

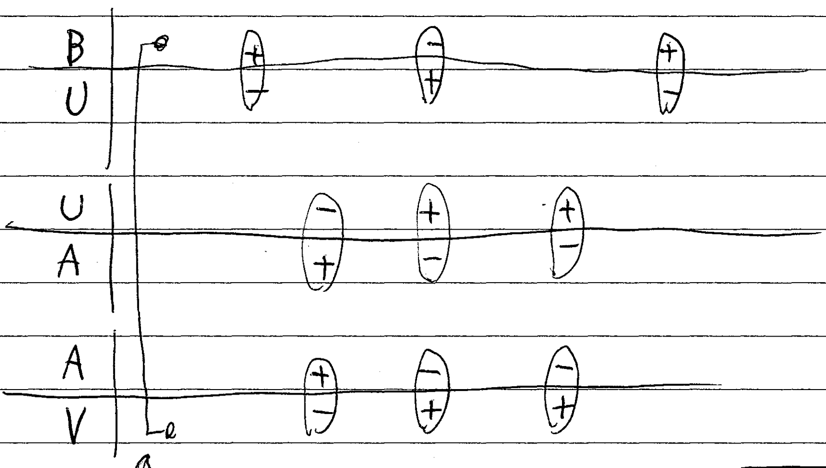
A と U の値を比較すると、85％の確率で同符号
15％の確率で異符号。

同様のことが $\langle AV\rangle$, $\langle BU\rangle$ についても言える

$\langle BV\rangle$ だけは話が逆で
15％の確率で B と V は同符号
85％ 〃 〃 異符号。

B	+	+	−	+	+	−	+	−	−	+	…
V	−	−	+	−	−	−	−	+	+	+	…

表を並べる



15%の確率で異符号

15% 異符号

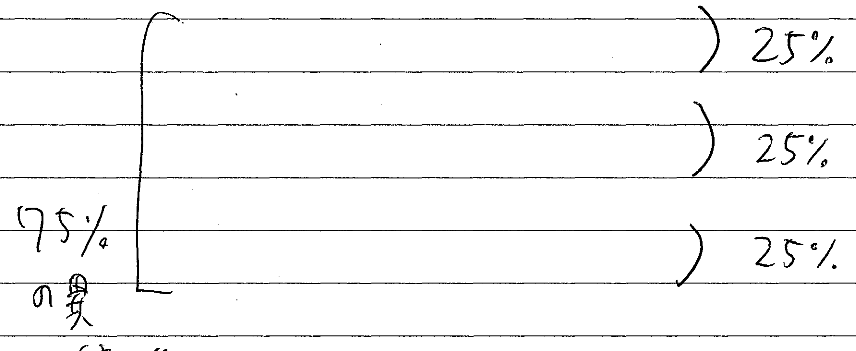
15% 異符号

85%の確率で異符号

どうがんばっても BとVとは高々45%の確率で異符号になるように思える。

これって不思議ではないですか？

問. この分布表がどうして(どういう意味において)不思議なのか、考えて述べよ。



だったら不思議ではない。

この場合 $\langle BU \rangle = +\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = \langle AU \rangle = \langle AV \rangle$

$\langle BV \rangle = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$ となり

$\langle S \rangle = 2$. Bell CHSHの不等式は破れない。