物質情報学1（解析力学），担当 谷村省吾，講義ノート1

力学と変分法

力学

力学は，物体に働く力と物体の運動を分析する物理学の分野である．力学の第一任務は，物体の運動を**記述** (describe) し**予測** (predict) することである．さらに，力学では，人が望むとおりの運動を物体にさせるためには物体にどういう力を作用させればよいのかという問題を立てて解くこともある．所望の運動を効率よく実現する方法を求めよという課題を**制御問題** (control problem) という．また，物体の運動の予測だけでなく，力がつりあって物体が静止するための条件を求めたり，力による物体の変形を予測することも力学の課題になる．また，質点のように小さな物体だけではなく，大きくて固い物体・変形する物体・水や空気のように流れる物体なども力学の対象になる．また，エンジンのように燃料を燃やして動力を得るしくみが発明されると，熱と運動の関係も力学の研究対象になってきた．こうして，**静力学・剛体の力学・変形体の力学・流体力学・熱力学**といった分野が派生してきた．

人間は，自分自身の身体を動かすし，他の物体を動かしたり，動きを観察することができる．走る，登る，ものを持ち上げる，運ぶ，投げる，水を流す，風をあおぐ，月や惑星の動きを眺める，機械を組み立てる，機械に仕事をさせる，建物を作る，水に船を浮かべるなどといった動作はすべて物体の運動に関わっている．太古の昔から人類にとって力と物体の運動は非常に身近な関心事であったと思われる．アルキメデス（紀元前287-212年頃）は，てこのつりあいの法則や浮力の法則を見い出したことで有名である．また，物体の落下や惑星の運動は規則正しく見える運動の典型例であり，これらの運動の法則を数学的に明らかにしようとしてガリレオ（1564-1642年）やニュートン（1642-1727年）が研究したことが力学の本格的な始まりになった．彼らが創始した力学は，物理学の一分野であるだけでなく，「数学の言葉で語られる厳密科学」のお手本としてその後の科学のありように大きな影響を及ぼした．

ニュートンが作った力学は，幾何学的作図法によって物体の運動を分析する理論であり，複雑な問題を解くのには向いていなかった．そこで，力学の問題を微分方程式で表し，計算で解く，というスタイルの理論が，オイラー，ラグランジュ，ラプラス，ポアソン，ハミルトンなど，ニュートンより後の時代の人たちによって発展させられた．そのように数学的に洗練された力学は**解析力学** (analytical dynamics) と呼ばれる．この場合の「解析」という言葉は，「幾何学」と対比される言葉であり，図形的方法に頼らずに数式だけで問題を解くという意味をこめて「解析力学」という名前が付けられている．

解析力学が発展したおかげで，複雑な力学の問題を，数式を用いて，ときにはエレガントに見通しよく，ときには力技（ちからわざ）で解くことができるようになった．しかも，解析力学は，**統計力学**や**量子力学**といった新しい理論への橋渡し役も果たしている．

いまでは，力学は，**古典力学** (classical mechanics) と**量子力学** (quantum mechanics) という二つの分野に大別されている．古典力学が，ボールや車など，目に見え手に触れるマクロス

ケールの物体の運動を扱うのに対して，量子力学は，原子や電子など直接的には見えないミクロスケールの物体の運動を扱う．

解析力学にもいろいろな流儀があるが，主流は二通りあり，**ラグランジュ形式の力学**と**ハミルトン形式の力学**と呼ばれる．この講義では，この二通りの解析力学を解説する．そして，どちらの力学形式も**変分法**という数学的方法に基づいて展開される．

変分法

変分法 (variational method, calculus of variations) は**変分原理** (variational principle) とも呼ばれる．一つの目標を達成するのにいろいろな経路やペース配分がありえて，やり方によって道のりや所要時間や燃料代などのコスト（費用）が変わるような状況を考える．**変分法は，コストを最小化するような経路を見つけ出すための数学的方法である．**あるいは，やり方次第でプロダクト（生産量）が多くなったり少なくなったりする状況においてプロダクトを最大化するようなやり方を見つけよ，という問題設定において変分法を使ってもよい．

いまでは，変分法は，その考え方からして，力学以外の問題に応用されることが多い．しかし，もとをたどれば，オイラーやラグランジュは力学法則を数学的に表す方法として変分法を発明した．それゆえに，変分法は力学のおおもとの原理とも言える．

以下では，変分法を徐々に解説しよう．

所要時間を最短にする経路

馬や自動車で移動する状況を考える．砂漠のように走りにくい場所と，草原のように走りやすい場所があり，両者は直線で仕切られているとする．砂漠の中の A 地点から草原の中の B 地点に達する最短時間の経路を見つけよ．

もっと正確に問題を立てると，平面上に直線があり，直線で仕切られた一方の半平面（砂漠）に点 A があり, 他方の半平面（草原）に点 B がある．A 地点から境界線に下した垂線 AM の長さを a，B 地点から境界線に下した垂線 BN の長さを b，MN 間の距離を ℓ とする．砂漠の中の移動速度は v_1，草原の中の移動速度は v_2 とする．$v_1 < v_2$ と仮定する．このとき，A, B を結ぶ所要時間最短の経路を求めよ．

ちょっと考えると，最短時間経路は線分をつなげた折れ線であることはわかる．では，屈折点はどこだろう？ 屈折角はどういう規則で決まるだろう？

要点となる数式だけを書いておく．境界線上に点 X を定め，線分 MX の長さを x とする．線分 AX と XB をつないだ折れ線を経路とする．この経路を通過する所要時間は

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (\ell - x)^2}}{v_2} \tag{1}$$

となる．最短経路を見つけよという問題は，関数 $T(x)$ の値を最小にする x の値を求めよという問題に言い換えられる．関数 $T(x)$ が最小になるような x の値を x_0 とする．このような x_0 を関数 $T(x)$ の**最小点**といい，そのときの $T(x_0)$ を**最小値**という．関数 $T(x)$ を微分すると

$$\frac{dT}{dx} = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{-(\ell - x)}{v_2\sqrt{b^2 + (\ell - x)^2}} \tag{2}$$

となる．$x = x_0$ のとき $T(x)$ が最小になるなら，そこで微分はゼロであり，

$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=x_0} = \frac{x_0}{v_1\sqrt{a^2 + x_0^2}} - \frac{\ell - x_0}{v_2\sqrt{b^2 + (\ell - x_0)^2}} = 0 \tag{3}$$

でなくてはならない．この式を x_0 について解けば，所望の経路が求められたことになる．

問 1. 方程式 (3) を解いて x_0 を求めよ．

方程式 (3) を解かずに，式を書き換えてみる．変数 θ_1, θ_2 を

$$\sin\theta_1 = \frac{x_0}{\sqrt{a^2 + x_0^2}}, \tag{4}$$

$$\sin\theta_2 = \frac{\ell - x_0}{\sqrt{b^2 + (\ell - x_0)^2}} \tag{5}$$

で定める．そうすると最短時間経路の方程式 (3) は

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{v_2}{v_1} \tag{6}$$

という形に書き換えられる．

いま，馬や車で地面を走る問題を想定したが，水中を進む光の速さを v_1, 空気中を進む光の速さを v_2 とおくと，所要時間最短の経路を探す問題は光の道筋を決めるフェルマーの原理になり，(6) は光の屈折角の法則（スネルの法則）になる．

極値と停留

集合 X から集合 Y への写像 φ を $\varphi: X \to Y$ と書く．元 $x \in X$ に $\varphi(x) \in Y$ が対応することを $x \mapsto \varphi(x)$ と書く．実数全体の集合を $\mathbb{R}$ と書く．

微分可能な関数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の最大点や最小点を求めるために，関数 f の微分 $f'(x)$ がゼロになる点 x を求めるのは常套手段である．

しかし，よく考えてみると，「関数値が最大または最小になる点で微分はゼロだ」は正しいが，逆に，微分がゼロだからといって最大 (maximum) または最小 (minimum) だとは言い切れない．極大 (maximal) や極小 (minimal) かもしれないし，どちらでもないかもしれない．関数の微分値がゼロになるような変数値を**停留点** (stationary point) といい，そこでの関数値を**停留値** (stationary value) という

数学的に厳密に言えば停留値にすぎないものを，物理学では雑に最小値と言ったり最大値と言ったりすることがあるので，注意が必要である．

問 2. ∀（すべての，任意の），∃（ある，存在する）といった記号を用いて関数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の最大点，最小点，極大点，極小点の厳密な定義を述べよ．

極小曲面の問題

すべての液体には**表面張力**という性質がある．液体が空気中にあると，液体と空気が触れる表面ができるが，液体の表面積をできるだけ小さくしようとする力が働く．これが表面張力である．水にせっけんを溶かすと水の表面張力は弱くなる．そのおかげで，せっけん水の膜は，水だけの膜よりも破れにくく，せっけん水でシャボン玉を作ることができる．

シャボン玉の膜も表面張力によってできるだけ面積を小さくしようとしている．膜の一部分を固定したり，膜に閉じ込めらえた空気の量を一定にすると，シャボン膜は，その条件のもとで面積が最小になる形に落ち着く．そのような形を**極小曲面**という．

x 軸が 2 枚の円板の中心を垂直に貫いているとする．それぞれの円板の半径を r_1, r_2 とし，円板の中心同士の距離を ℓ とする．それぞれの円周を C_1, C_2 とする．C_1 と C_2 を縁とするシャボン膜はどのような形になるだろうか？

よく考えると，この条件の下での極小曲面は，x 軸について回転対称な形でなくてはならないことがわかる．では，どのような回転曲面だろうか？

要点となる式だけを書いておく．関数 $y = f(x)$ のグラフを x 軸の周りを回転させてできる図形の面積は

$$S = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \tag{7}$$

で与えられる．問題は，$y = f(x)$ としたとき，

$$f(x_1) = r_1, \quad f(x_2) = r_2 \tag{8}$$

という条件を満たす関数 $f(x)$ で S の値を最小にするようなものを求めよ，という形に述べることができる．

問 3．回転体の側面積が式 (7) で与えられることを説明せよ．

オイラー・ラグランジュ方程式

極小曲面の問題をさらに一般化した問題を考えよう．

写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ によって $y = f(x)$ が定まると書くべきだが，これをたんに関数 $y(x)$ と書くこともある．関数 $y(x)$ の導関数（微分）を

$$y' = \frac{dy}{dx} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y'(x) \tag{9}$$

と書く．また，3 つの実数の組全体の集合を

$$\mathbb{R}^3 = \{(u, v, x) \,|\, u, v, x \in \mathbb{R}\,\} \tag{10}$$

と書く．3 変数関数

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (u, v, x) \mapsto F(u, v, x) \tag{11}$$

に $u = y(x)$ と $v = y'(x)$ を入力して x について積分することにより実数値

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(y(x), y'(x), x)\, dx \tag{12}$$

を定める．関数 $y(x)$ を入力すると実数値 J が定まるという意味で，J は「関数の関数」であり，このような J を**汎関数** (functional) という．前節の汎関数 (7) を与える被積分関数は

$$F(u, v, x) = 2\pi u\sqrt{1 + v^2} \tag{13}$$

に相当する．

さて，ここで次のような問題を設定する．定数 x_1, x_2, y_1, y_2 があり，関数 $y(x)$ は**境界条件** (boundary condition)

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2 \tag{14}$$

を満たすとする．この条件を満たす関数 $y(x)$ は無数にあるが，それらのうち汎関数 J の値を**停留** (stationary) にするようなものを求めよ．この問題を，汎関数の停留値問題とか**変分問題** (variational problem) という．

汎関数の停留という概念は以下のように定義される．ε を実数変数とする．また，微分可能な関数 $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で条件

$$\eta(x_1) = 0, \quad \eta(x_2) = 0 \tag{15}$$

を満たすものを変分関数という．このとき

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \varepsilon\, \eta(x) \tag{16}$$

を変分パラメータ ε と変分関数 $\eta(x)$ で変形された関数という．なお，$\tilde{y}$ に付けた波線はチルダ (tilder) と読む．$y(x)$ が境界条件 (14) を満たすなら，$\tilde{y}(x)$ も

$$\tilde{y}(x_1) = y_1, \quad \tilde{y}(x_2) = y_2 \tag{17}$$

を満たす．この変形された関数を汎関数に入力して得られる値

$$J(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F(y(x) + \varepsilon\eta(x), y'(x) + \varepsilon\eta'(x), x) \tag{18}$$

は ε の関数とみなせる．もしも，任意の変分関数 $\eta(x)$ に対して，$J(\varepsilon)$ の微分が $\varepsilon = 0$ でゼロになるならば，関数 $y(x)$ は汎関数 J の**停留曲線** (stationary curve) だという

定理： 関数 $y(x)$ が汎関数 J の停留曲線ならば，$F(y, y', x)$ について

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{19}$$

が成り立つ．この式 (19) を**オイラー・ラグランジュ方程式** (Euler-Lagrange equation) という．

定理の証明：(18) の $J(\varepsilon)$ を ε について微分すると，

$$\begin{aligned}\frac{dJ}{d\varepsilon} &= \int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial F}{\partial y}\frac{d(y+\varepsilon\eta)}{d\varepsilon}\right.\\ &\qquad\left.+\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{d(y'+\varepsilon\eta')}{d\varepsilon}\right\}dx\\ &= \int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right\}dx \qquad (20)\end{aligned}$$

となり，最後の式の第 2 項は

$$\begin{aligned}&\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\,dx\\ =\ &\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{d\eta}{dx}\,dx\\ =\ &\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\eta\right)-\eta\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right\}dx\\ =\ &\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\eta(x)\right]_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\eta\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)dx\\ =\ &0-\int_{x_1}^{x_2}\eta\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)dx \qquad (21)\end{aligned}$$

となる．3 行目から 4 行目に進むときに微積分の基本定理を使った．また，4 行目から最後の行への式変形では変分関数の境界条件 (15) を使った．以上より，(20) は

$$\frac{dJ}{d\varepsilon}=\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right\}\eta(x)dx \qquad (22)$$

となる．ここで F の引数は $F(y(x)+\varepsilon\eta(x), y'(x)+\varepsilon\eta'(x), x)$ になっていることに注意．さらに，汎関数の停留という要請から，$\varepsilon=0$ とおいたときにこの式が 0 になっていなければならない：

$$\begin{aligned}\left.\frac{dJ}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} &= \int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right\}\eta(x)dx\\ &= 0 \qquad (23)\end{aligned}$$

となる．ここでの F の引数は $F(y(x), y'(x), x)$ である．汎関数の停留値問題は，任意の変分関数 $\eta(x)$ に対して上の式が 0 であることを要請する．そうすると，被積分関数そのものが 0 でなくてはならない．つまり，

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \qquad (24)$$

を結論する．こうして (19) が導かれた．

問 4.（変分問題の基本補題）関数 $G(x)$ は連続関数とし，$\eta(x)$ は条件 (15) を満たす変分関数とする．もしも

$$\int_{x_1}^{x_2}G(x)\eta(x)dx=0 \qquad (25)$$

が任意の変分関数 $\eta(x)$ について成り立つならば，$x_1 \leq x \leq x_2$ である任意の x について $G(x)=0$ であることを証明せよ．

極小曲面を求める

オイラー・ラグランジュ方程式を用いて極小曲面の問題を解こう．もう一度，極小曲面の問題を述べると，関数 $y(x)$ は $x_1 \leq x \leq x_2$ の範囲で定義された連続関数であり，境界条件

$$y(x_1)=r_1, \quad y(x_2)=r_2 \qquad (26)$$

を課せられている．この条件を満たす関数 $y(x)$ で汎関数

$$S=\int_{x_1}^{x_2}2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx \qquad (27)$$

の値を最小にするものを求めよ，というのが問題であった．この変分問題は被積分関数

$$F=2\pi y\sqrt{1+(y')^2} \qquad (28)$$

に関するオイラー・ラグランジュ方程式に帰着される．この方程式を立てるためにちょっと計算して

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2\pi\sqrt{1+(y')^2} \qquad (29)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=2\pi\frac{yy'}{\sqrt{1+(y')^2}} \qquad (30)$$

これらを (24) に代入して，定数 2π で割ると

$$\sqrt{1+(y')^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{yy'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right) = 0 \quad (31)$$

を得る．これがいまから解くべきオイラー・ラグランジュ方程式である．この式の両辺に y' を掛けたものは

$$\begin{aligned} & y'\sqrt{1+(y')^2} - y'\frac{d}{dx}\left(\frac{yy'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right) \\ = & \frac{d}{dx}\left(y\sqrt{1+(y')^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1+(y')^2}}\right) \quad (32) \end{aligned}$$

に等しい．これが 0 に等しいということは，

$$y\sqrt{1+(y')^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1+(y')^2}} = a \quad (33)$$

が定数であることを意味する．この式から

$$y = a\sqrt{1+(y')^2} \quad (34)$$

を導くことができるし，さらに，

$$\left(\frac{y}{a}\right)^2 - (y')^2 = 1 \quad (35)$$

と書き換えることができる．また，

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1} \quad (36)$$

も導かれる．方程式 (35) を満たす関数は

$$y = a\,\cosh\left(\frac{x}{a} + b\right) \quad (37)$$

しかない．ただし b は任意の実数定数である．双曲線関数 cosh をよく知らない人は次節を読んでほしい．

問 5. 等式 (32) を証明せよ．

問 6. (37) は (35) を満たすことを確認せよ．

問 7. 関数 (37) のグラフを描け．また，このグラフを x 軸の周りを回転させてできる図形の概形を描け．

指数関数から派生する関数

指数関数 (exponential function) e^x は $\exp x$ とも書かれ，

$$\begin{aligned} e^x &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots \quad (38) \end{aligned}$$

で定められる．逆に，$x = e^y$ となっていれば $y = \log x$ と書き，$\log x$ を**対数関数** (logarithmic function) という．

問 8. 任意の実数 x に対して無限級数 (38) は収束することを証明せよ（やや難）．

問 9. 以下の式を証明せよ．ただし c は任意の定数．

$$e^0 = 1 \quad (39)$$

$$\frac{d}{dx}\,e^x = e^x \quad (40)$$

$$\frac{d}{dx}\,e^{cx} = c\,e^{cx} \quad (41)$$

問 10. 任意の実数 x_1, x_2 について以下の式が成り立つことを証明せよ（やや難）．

$$e^{x_1}\,e^{x_2} = e^{x_1+x_2} \quad (42)$$

問 11. 以下の式が成り立つことを証明せよ．

$$e^x > 0 \quad (43)$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = \infty \quad (44)$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad (45)$$

問 12. 関数 $y = e^x$ のグラフを描け．また，$y = \log x$ のグラフを描け．

指数関数を使っていろいろな関数が定義される．**双曲線関数** (hyperbolic function) と呼ばれ

る関数を

$$\begin{aligned}\cosh x &:= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \cdots \quad (46) \\ \sinh x &:= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \cdots \quad (47) \\ \tanh x &:= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (48)\end{aligned}$$

で定義する．cosh は hyperbolic cosine, sinh は hyperbolic sine, tanh は hyperbolic tangent と読む．$(\cosh x)^2 = \cosh^2 x$, $(\sinh x)^2 = \sinh^2 x$ と書く．

問 13. 以下の関係式が成り立つことを示せ．

$$\cosh(-x) = \cosh x \quad (49)$$

$$\sinh(-x) = -\sinh x \quad (50)$$

$$\tanh(-x) = -\tanh x \quad (51)$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad (52)$$

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x \quad (53)$$

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x \quad (54)$$

問 14. 関数 $y = \cosh x$, $y = \sinh x$, $y = \tanh x$ のグラフを描け．

問 15. 関数 $x = \cosh t$, $y = \sinh t$ が与えられ，変数 t が実数全体を動くとき，平面上の点 $\mathrm{P} = (x, y)$ の軌跡を描け．また，点 $\mathrm{O} = (0, 0)$, 点 $\mathrm{A} = (1, 0)$ とすると，軌跡の一部分である弧 AP と線分 OA と線分 OP で囲まれる図形の面積は $\frac{1}{2}t$ に等しいことを示せ．

本来，指数関数 e^x の x は実数と考えられているが，これを複素数に拡張しよう．虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ は形式的に

$$i^2 = -1 \quad (55)$$

を満たす記号として定義される．これを指数関数の定義式 (38) にそのままあてはめると

$$\begin{aligned}e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} x^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + i\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}\end{aligned} \quad (56)$$

となる．ここで

$$\begin{aligned}\cos x &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots \quad (57) \\ \sin x &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots \quad (58) \\ \tan x &:= \frac{\sin x}{\cos x} \quad (59)\end{aligned}$$

で**三角関数** (trigonometric function) と呼ばれる $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$ を定義する．そうすると，

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (60)$$

が成り立つ．

問 16. 以下の関係式が成り立つことを示せ.

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x \tag{61}$$
$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \tag{62}$$
$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \tag{63}$$
$$\cos(-x) = \cos x \tag{64}$$
$$\sin(-x) = -\sin x \tag{65}$$
$$\tan(-x) = -\tan x \tag{66}$$
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \tag{67}$$
$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \tag{68}$$
$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \tag{69}$$

問 17. z_1, z_2 が複素数であっても指数関数の性質 $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\,e^{z_2}$ が成り立つことが証明できる（証明は難しいが）. このことを利用して以下の式が成り立つことを示せ.

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{70}$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \tag{71}$$
$$\cosh(\alpha+\beta) = \cosh\alpha\cosh\beta + \sinh\alpha\sinh\beta \tag{72}$$
$$\sinh(\alpha+\beta) = \sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta \tag{73}$$

問 18. 関数 $x = \cos t$, $y = \sin t$ が与えられ, 変数 t が実数全体を動くとき, 平面上の点 $\mathrm{P} = (x, y)$ の軌跡を描け. また, $0 \geq t \geq \pi$ であれば, 点 $\mathrm{O} = (0, 0)$, 点 $\mathrm{A} = (1, 0)$ とすると, 軌跡の一部分である弧 AP と線分 OA と線分 OP で囲まれる図形の面積は $\frac{1}{2}t$ に等しいことを示せ.

問 19. (i) c を任意の定数とし, 関数 $y(x)$ を

$$y(x) = \cos(x+c) \tag{74}$$

とおくと,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 1 \tag{75}$$

が成り立つことを示せ.
(ii) 定数 ω と a について

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \omega^2 u^2 = \omega^2 a^2 \tag{76}$$

を満たす関数 $u(t)$ は

$$u(t) = a\,\cos(\omega t + c) \tag{77}$$

で与えられることを示せ.

問 20. (i) c を任意の定数とし, 関数 $y(x)$ を

$$y(x) = \cosh(x+c) \tag{78}$$

とおくと,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y^2 = -1 \tag{79}$$

が成り立つことを示せ.
(ii) 定数 ω と a について

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - \omega^2 u^2 = -\omega^2 a^2 \tag{80}$$

を満たす関数 $u(t)$ は

$$u(t) = a\,\cosh(\omega t + c) \tag{81}$$

で与えられることを示せ.

問 21. (i) c を任意の定数とし, 関数 $y(x)$ を

$$y(x) = \sinh(x+c) \tag{82}$$

とおくと,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y^2 = 1 \tag{83}$$

が成り立つことを示せ.
(ii) 定数 ω と a について

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - \omega^2 u^2 = \omega^2 a^2 \tag{84}$$

を満たす関数 $u(t)$ は

$$u(t) = a\,\sinh(\omega t + c) \tag{85}$$

で与えられることを示せ.

問 22. 定数 ω について

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - \omega^2 u^2 = 0 \tag{86}$$

を満たす関数 $u(t)$ は

$$u(t) = a\,e^{\omega t + c} \tag{87}$$

と

$$u(t) = a\,e^{-\omega t + c} \tag{88}$$

で与えられることを示せ.

偏微分の復習

写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を考える．これは n 個の実数変数を持つ，実数値の関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ に他ならない．n 個の変数 $(x_1, \cdots, x_n)$ のうち，i 番目の変数だけについての微分を

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_n)\\ := \ &\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\Big\{ f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i + \varepsilon, x_{i+1}, \cdots, x_n)\\ &\qquad -f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)\Big\}\end{aligned} \tag{89}$$

で定める．これを変数 x_i についての**偏微分** (partial derivative) という．同様に，変数 x_i, x_j について逐次，偏微分を施した結果を

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \tag{90}$$

と書く．

問 23. 次の関数

$$f(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \tag{91}$$

について次の偏導関数を求めよ：

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \tag{92}$$

さらに，$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

問 24. 多変数関数

$$f(x_1, \cdots, x_n) \tag{93}$$

に n 個の関数

$$x_1 = \varphi_1(t), \ \cdots, \ x_n = \varphi_n(t) \tag{94}$$

を代入して 1 変数関数

$$g(t) = f(\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)) \tag{95}$$

を定める．これを t について微分したものは

$$\frac{d}{dt} f(\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} \tag{96}$$

に等しいことを証明せよ．この式を多変数関数の**鎖則** (chain rule) という．

問 25. x, y, u, v が t の関数であり，

$$\frac{dx}{dt} = u \tag{97}$$

$$\frac{dy}{dt} = v \tag{98}$$

$$\frac{du}{dt} = x \cdot F(x^2 + y^2) \tag{99}$$

$$\frac{dv}{dt} = y \cdot F(x^2 + y^2) \tag{100}$$

という関係式を満たしているとする．ここで $F(r)$ は微分可能な関数であり，具体形は特定しない．このとき，関数

$$f(x, y, u, v) := xv - yu \tag{101}$$

について

$$\frac{df}{dt} \tag{102}$$

を求めよ．

最短曲線は直線である

直交座標系 (x, y) を持つ平面上の 2 点 $\mathrm{P}_1 = (x_1, y_1)$，$\mathrm{P}_2 = (x_2, y_2)$ を結ぶ，最短曲線を求めよう．答えは P_1 と P_2 を結ぶ線分であることは直観的には明らかだが，この問題を変分法を使って厳密に解いてみよう．

関数 $y(x)$ のグラフで 2 点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ を連結させるとすると，この関数は境界条件

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2 \tag{103}$$

を満たさなければならない．また，曲線の長さは

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \tag{104}$$

で与えられる.

問 26. (i) 関数 $y(x)$ のグラフの長さが式 (104) で与えられることを説明せよ.
(ii) 汎関数 (104) の変分問題に対するオイラー・ラグランジュ方程式を求めよ.
(iii) このオイラー・ラグランジュ方程式を解き,解が直線になっていることを示せ.

参考書

自分は数学の知識が足りないと思ったら,シラバスを見たり,図書館にある本を眺めたりして,自分に合う本を見つけて勉強して下さい.
微分・積分に関して自信のない人は,
・齋藤正彦『微分積分学』(東京図書)
を読むとよいです.
複素関数については
・L. V. アールフォルス(笠原乾吉 訳)『複素解析』(現代数学社)
・高橋礼司『複素解析』(東京大学出版会)
などが昔から有名です.
解析力学の教科書としては
・大貫義郎『解析力学』(岩波書店)
・江沢 洋『解析力学』(培風館)
・山本義隆,中村孔一『解析力学 1, 2 巻』(朝倉書店)
・ゴールドスタイン『古典力学 上・下巻』(吉岡書店)
などが優れた本だと思います.
力学の歴史については
・山本義隆『古典力学の形成—ニュートンからラグランジュへ』(日本評論社)
が非常に面白いです.
光の進み方を決める問題は変分法と深く関わっています.光学と力学の関係について書かれたものとして,これも山本義隆氏の本ですが
・山本義隆『幾何光学の正準理論』(数学書房)
は内容に特徴があります.