物質情報学1（解析力学），担当 谷村省吾，講義ノート6

保存則の使い方

対称性・保存量があると何かいいことがあるのか？

1. 運動方程式を解かなくても（書かなくても）対称性からただちに保存量の存在を見抜くことができる．2. 保存量を使って力学変数の個数を減らすことができる．うまくすると，保存量を使って運動方程式を完全に解くこともできる（そういう系は可積分系と呼ばれる）．3. 運動方程式を解かなくても，保存量を使って系の運動の様子を定性的に分析することができる．

いろいろな問題設定で対称性と保存量を見つけよう

ネーターの定理を利用して，2次元空間，あるいは3次元空間中の質点のラグランジアンの対称性から保存量を見つけよう．保存量の関数形も決定しよう．ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(x, y) \tag{1}$$

または

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z) \tag{2}$$

である．具体的な問題設定は板書で説明する．

角運動量保存則を使って力学変数の個数を減らす

2次元平面上の質点の位置エネルギーが**回転不変**だとしよう．つまり，回転変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \\ \sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3}$$

を施したとき，任意の座標値 (x, y) と任意の回転角 ε に対して，位置エネルギー $V(x, y)$ が

$$V(\tilde{x}, \tilde{y}) = V(x, y) \tag{4}$$

を満たすとする．極座標

$$\begin{cases} x = r\,\cos\phi, \\ y = r\,\sin\phi \end{cases} \tag{5}$$

を使うと，$V(x, y)$ を (r, ϕ) の関数として表すことができる．変数 r を**動径**，変数 ϕ を**偏角**という．

問 1. 変換 (3) により

$$\begin{cases} \tilde{x} = r\,\cos(\phi + \varepsilon), \\ \tilde{y} = r\,\sin(\phi + \varepsilon) \end{cases} \tag{6}$$

となることを確かめよ．

ゆえに，変換 (3) は

$$(r, \phi) \mapsto (\tilde{r}, \tilde{\phi}) = (r, \phi + \varepsilon) \tag{7}$$

と同義である．V を (r, ϕ) の関数とみなすと，(4) は

$$V(r, \phi + \varepsilon) = V(r, \phi) \tag{8}$$

を意味する．ε の値は任意なので，$\varepsilon = -\phi$ と選んでもよく，そうすると

$$V(r, 0) = V(r, \phi) \tag{9}$$

を得る．つまり，**回転不変な V は変数 r だけに依存する関数だと言える．**

2 次元空間中の質点のラグランジアンを極座標で表すと，

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-V(x,y) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2)-V(r) \end{aligned} \tag{10}$$

となる．**この L は変数 ϕ に依存しない．よって，L は回転不変であり，ϕ は循環座標である．** このとき，ϕ に対するオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right)=\frac{\partial L}{\partial \phi}=0 \tag{11}$$

となる．したがって，

$$J:=\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}=mr^2\dot{\phi} \tag{12}$$

とおくと，

$$\frac{dJ}{dt}=0 \tag{13}$$

が成り立ち，J は時間変化しない量であることがわかる．つまり J は**保存量**である．

問 2. 極座標 (5) を用いて (12) の J は

$$J=m(x\dot{y}-y\dot{x}) \tag{14}$$

に等しいことを示せ．この J は**軌道角運動量** (orbital angular momentum) と呼ばれる．

J の定義式 (12) から

$$\dot{\phi}=\frac{J}{mr^2} \tag{15}$$

が言える．

(10) から r に対するオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) &= \frac{\partial L}{\partial r} \\ \frac{d}{dt}(m\dot{r}) &= mr\dot{\phi}^2-\frac{\partial V}{\partial r} \end{aligned} \tag{16}$$

であり，(15) を用いて $\dot{\phi}$ を消去すると

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{J^2}{mr^3} \tag{17}$$

となる．こうして**変数 $r(t)$ だけに対する運動方程式が得られた．** この方程式を解いて，$r(t)$ を求めれば，あとはそれを (15) に代入して両辺を t について積分すれば $\phi(t)$ も求められる．

ここで

$$F(r):=-\frac{\partial V}{\partial r} \tag{18}$$

は質点に働く**中心力**（原点と質点をむすぶ直線に沿う向きに働く，力の大きさが原点からの距離だけに依存する力のこと）を表している．$F>0$ なら斥力，$F<0$ なら引力である．方程式 (17) は，質点は中心力 F の他に，距離の 3 乗に反比例する**遠心力**を受けて運動することを意味している．

方程式 (17) は

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(V(r)+\frac{J^2}{2mr^2}\right) \tag{19}$$

と書ける．つまり，角運動量 J を持っている質点の動径座標 $r(t)$ は，あたかも

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r)+\frac{J^2}{2mr^2} \tag{20}$$

という位置エネルギーのもとでの 1 次元空間の質点のように動く．この V_{eff} を**有効ポテンシャル** (effective potential) という．

問 3. 運動方程式 (17) において

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2+V(r)+\frac{J^2}{2mr^2} \tag{21}$$

は保存量であること（$\frac{dE}{dt}=0$）を示せ．

問 4. 具体的な中心力として，**重力（万有引力）** を扱う．2 つの質点間の万有引力は，それぞれの質量に比例し，距離の 2 乗に反比例し，

$$F(r)=-\frac{GMm}{r^2}=-\frac{\partial V}{\partial r} \tag{22}$$

で表される．例えば，質量 M の太陽と質量 m の惑星の間に働く力がこの式に従う．重力の位置エネルギーは

$$V(r)=-\frac{GMm}{r} \tag{23}$$

であり，重力中の質点の運動方程式 (17) は

$$m\ddot{r} \;=\; -\frac{GMm}{r^2}+\frac{J^2}{mr^3} \qquad (24)$$

となる．(i) $J\neq 0$ として，(23) の重力位置エネルギーについて (20) の有効ポテンシャル $V_{\text{eff}}(r)$ のグラフを描け．(ii) (a) $E<0$, (b) $E=0$, (c) $E>0$ の場合に分けて，質点の運動を定性的に予測せよ．

問 5．距離の 3 乗に反比例する引力

$$F=-\frac{k}{r^3} \qquad (25)$$

があったとしたら，その位置エネルギーは

$$V=-\frac{k}{2r^2} \qquad (26)$$

である．

$$a:=-k+\frac{J^2}{m} \qquad (27)$$

とおき，(i) $a<0$, (ii) $a=0$, (iii) $a>0$ の場合に分けて有効ポテンシャル $V_{\text{eff}}(r)$ のグラフを描け．また，質点の運動を予測せよ．

問 6．距離の 4 乗に反比例する引力

$$F=-\frac{k}{r^4} \qquad (28)$$

に対する位置エネルギー $V(r)$ を求めよ．また，適切に場合分けして質点の運動を予測せよ．

問 7．万有引力を受ける質点の運動方程式 (24) を解いて惑星の軌道を求めよう．変数 u を

$$u:=\frac{1}{r},\qquad r=\frac{1}{u} \qquad (29)$$

で定めると都合がよい．動径座標 $r(t)$ は時刻 t の関数なのだが，これを偏角 ϕ の関数 $r(\phi)$ とみなすこともできる．そうすると，(29) で定めた u も ϕ の関数 $u(\phi)$ とみなせる．そのように考えて，$r(t)$ のついての方程式 (24) を $u(\phi)$ についての方程式に書き換えることを考える．定義式 (29) を t について微分して，(15) を用いて

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}\\ &= -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\phi}\frac{d\phi}{dt}\\ &= -r^2\frac{du}{d\phi}\frac{J}{mr^2}\\ &= -\frac{J}{m}\frac{du}{d\phi}\end{aligned} \qquad (30)$$

がわかる．さらに

$$\begin{aligned}\frac{d^2r}{dt^2} &= -\frac{J}{m}\frac{d^2u}{d\phi^2}\frac{d\phi}{dt}\\ &= -\frac{J}{m}\frac{d^2u}{d\phi^2}\frac{J}{mr^2}\\ &= -\frac{J^2}{m^2}u^2\frac{d^2u}{d\phi^2}\end{aligned} \qquad (31)$$

がわかる．(i) (29), (30), (31) を用いて (24) が

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} \;=\; \frac{GMm^2}{J^2}-u \qquad (32)$$

となることを示せ．(ii) 方程式 (32) の一般解が

$$u(\phi)=u_0\cos(\phi-\phi_0)+\frac{GMm^2}{J^2} \qquad (33)$$

で与えられることを確かめよ．ただし u_0, ϕ_0 は定数．(iii) $\phi_0=0$ と選ぶと，(29) から

$$r(\phi)=\frac{r_0}{1+\varepsilon\cos\phi} \qquad (34)$$

が求められる．ここで

$$r_0:=\frac{J^2}{GMm^2},\qquad \varepsilon:=\frac{u_0J^2}{GMm^2} \qquad (35)$$

とおいた．(a) $\varepsilon<1$, (b) $\varepsilon=1$, (c) $\varepsilon>1$ の場合に応じて (34) が (a) 楕円，(b) 放物線，(c) 双曲線になることを証明せよ．(iv) また，(21) に定めた E が ϕ によらない定数になることを確かめよ．(v) さらに，ε の大小に応じて (a) $E<0$, (b) $E=0$, (c) $E>0$ となることを示せ．

簡約ラグランジアン

循環座標がある場合，一般化座標の個数を減らして循環座標なしのラグランジアンを定めることができる．

いま，座標 $(q_1, \cdots, q_{n-1}, q_n)$ のうち q_n が循環座標になっていたとする．$(q_1, \cdots, q_{n-1}) = \boldsymbol{q}$ と書き，$q_n = \phi$ と書く．ラグランジアンが $L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\phi}, t)$ という関数形だとする．ϕ が循環座標であるということは，$L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\phi}, t)$ が ϕ には依存していないということである．このとき，

$$J := \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\phi}, t) \tag{36}$$

は保存量である．この式は J を $\dot{\phi}$ の関数として表しているが，この式を $\dot{\phi}$ について解いて

$$\dot{\phi} = f(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, J, t) \tag{37}$$

とする．**簡約ラグランジアン** (reduced Lagrangian) なるものを

$$L_{\mathrm{red}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, J, t) := \Big[L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\phi}, t) - J\dot{\phi} \Big]_{\dot{\phi}=f} \tag{38}$$

で定める．ここで $[\cdots]_{\dot{\phi}=f}$ は,「関係式 (37) を用いて $\dot{\phi}$ を J で表して $\dot{\phi}$ を消去する」という操作を表す．簡約ラグランジアンを作る操作は部分的ルジャンドル変換とも呼ばれる．

L_{red} の引数としては J は定数とする．簡約ラグランジアンから，どのようなオイラーラグランジュ方程式が得られるか調べる．関係式 (37) のせいで $\dot{\phi}$ が q_i や $\dot{q}_i$ の関数になっていることに注意し，(36) を用いると

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{\mathrm{red}}}{\partial q_i} &= \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial q_i} - J\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial q_i} \\ &= \frac{\partial L}{\partial q_i} + J\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial q_i} - J\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial q_i} \\ &= \frac{\partial L}{\partial q_i} \end{aligned} \tag{39}$$

および

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{\mathrm{red}}}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \dot{q}_i} - J\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \dot{q}_i} \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + J\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \dot{q}_i} - J\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \dot{q}_i} \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \end{aligned} \tag{40}$$

となるので，q_i $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ に関しては L_{red} が与えるオイラーラグランジュ方程式と L が与えるオイラーラグランジュ方程式は一致する：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_{\mathrm{red}}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L_{\mathrm{red}}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \tag{41}$$

だから，循環座標をなくした残りの変数については簡約ラグランジアンを使って運動方程式を立てればよい．

問 8. ラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r) \tag{42}$$

において ϕ は循環座標になっている．(i) 循環座標に伴う保存量を求めよ．(ii) 簡約ラグランジアンを求めよ．(iii) 簡約ラグランジアンから r についてのオイラーラグランジュ方程式を求めよ．結果は (17) と一致するはずである．

問 9. 簡約ラグランジアンの定義式 (38) の $-J\dot{\phi}$ という項は必要だろうか．保存量を使って $\dot{\phi}$ を消去するというのであれば,

$$L'_{\mathrm{red}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, J, t) := \Big[L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\phi}, t) \Big]_{\dot{\phi}=f} \tag{43}$$

とおく方が素直であるような気がする．(42) のラグランジアンについて $L'_{\mathrm{red}}(r, \dot{r}, J)$ を求めよ．(当然のことながら，L'_{red} は前問の L_{red} とは一致せず，間違ったオイラーラグランジュ方程式を導いてしまう．)

参考書

循環座標と簡約ラグランジアンについては

・大貫義郎『解析力学』(岩波書店)

に書かれている．

力の大きさが距離の 3 乗に反比例する中心力場での質点の運動は

・山内恭彦『一般力学』(岩波書店)

で論じられている．