物質情報学１（解析力学），担当 谷村省吾，講義ノート８

ハミルトニアンとポアソン括弧

理論の定式化

言葉や記号の使い方を明瞭に決めて，まぎれなく考えを進めることができるような言葉のしくみや規則を作ることを，理論を**定式化** (formulate) するという．科学の理論は，特別な能力や特殊な思想を持っている人だけが使えるのではなく，その理論の規則に従えば誰でも同じように使えるように定式化されなくてはならない．また，理論の定式化は唯一絶対のものではなく，結果的には同じことを説明したり予測したりするが，見かけの異なる複数の理論定式化が存在することもある．

力学は物体の運動を記述し予測するための理論であり，その中でも数学的に洗練された部分を解析力学という．解析力学の定式化には何通りか流儀があり，とくにラグランジュの流儀とハミルトンの流儀が代表的である．

ここでは，前回導入したルジャンドル変換を用いて，ラグランジュ流の力学定式化からハミルトンへ流の力学定式化へ移行する．

ルジャンドル変換

前回導入したルジャンドル変換は，微分可能な凸関数 $f(x)$ に対して，

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} \tag{1}$$

を独立変数とする新たな関数

$$f^*(p) := f(x) - px \tag{2}$$

を定めることであった．

今回は，ルジャンドル変換の符号を変えて

$$g(p) := px - f(x) \tag{3}$$

を定め，改めてこれを $f(x)$ のルジャンドル変換と呼ぶことにする．こうしておくと，

$$f(x) + g(p) = px \tag{4}$$

が成り立ち，f のルジャンドル変換は g であり，g のルジャンドル変換は f である，という双対な関係が成り立つ．

ハミルトニアン

自由度が１の力学系を考える．この系の状態は一般化座標 $q(t)$ とその時間微分 $\dot{q}(t)$ で記述される．$\dot{q} = v$ と書くことにする．ラグランジアンは $L(q, v, t)$ という関数である．たいていの系のラグランジアンは「運動エネルギー引く位置エネルギー」，つまり

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - U(q) \tag{5}$$

という形であり，v の関数としては L は下に凸な関数になっている．従って変数 v に関して L をルジャンドル変換してよい．そこで，

$$p := \frac{\partial L(q, v, t)}{\partial v} \tag{6}$$

を新たな独立変数と定め，p を**正準運動量** (canonical momentum) と名づける．この式を v について解いて

$$v = \psi(q, p, t) \tag{7}$$

という形に直す．(3) のルジャンドル変換

$$H(q, p, t) := pv - L \tag{8}$$

によって定まる関数 H を**ハミルトニアン** (Hamiltonian) と名づける．ラグランジアン $L(q,v,t)$ においては q と v を独立変数として扱うが，ハミルトニアン $H(q,p,t)$ においては q と p を独立変数として扱う．だから，

$$\frac{\partial p}{\partial q} = 0 \tag{9}$$

である．ハミルトニアンの微分がどうなるか調べてみよう．(7) を通して v は p に依存していることに注意すると，$H = pv - L$ と (6) から

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p} &= \frac{\partial}{\partial p}\Big(pv - L(q,v,t)\Big) \\ &= v + p\,\frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial L}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial p} \\ &= v + p\,\frac{\partial v}{\partial p} - p\,\frac{\partial v}{\partial p} \\ &= v \end{aligned} \tag{10}$$

が成り立つ．また，(7) を通して v は q に依存していることに注意して，

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial q} &= \frac{\partial}{\partial q}\Big(pv - L(q,v,t)\Big) \\ &= p\,\frac{\partial v}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial q} \\ &= p\,\frac{\partial v}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial q} - p\,\frac{\partial v}{\partial q} \\ &= -\frac{\partial L}{\partial q} \end{aligned} \tag{11}$$

が成り立つ．一方で，オイラー・ラグランジュ方程式は

$$v = \dot{q}, \tag{12}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{13}$$

という連立方程式の形に書ける．(12), (13) と正準運動量の定義式 (6) をあわせると，(10) と (11) は

$$\frac{\partial H}{\partial p} = v = \frac{dq}{dt} \tag{14}$$

と

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right) = -\frac{dp}{dt} \tag{15}$$

と書き換えられる．つまり，ハミルトニアン $H(q,p,t)$ が与えられれば，$q(t)$ および $p(t)$ の時間変化が

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \tag{16}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{17}$$

で定まる．(16), (17) を**ハミルトンの運動方程式** (Hamilton's equation of motion) あるいは**正準運動方程式** (canonical equation of motion) という．

問 1. 運動エネルギー引く位置エネルギーの形のラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - U(q) \tag{18}$$

を持つ系を**自然力学系**という．このラグランジアンに対して (6) に従って正準運動量を求めよ．また，v を p の式で表せ．(8) に従ってハミルトニアンを求めよ．また，ハミルトンの運動方程式 (16), (17) を具体的に書け．

問 2. 自由度が n の系のラグランジアン

$$L(q_1, \cdots, q_n, v_1, \cdots, v_n, t) \tag{19}$$

に対しては n 個の正準運動量

$$p_i := \frac{\partial L(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}, t)}{\partial v_i} \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{20}$$

が定められる．これらの式を各 v_i について解いて

$$v_i = \psi_i(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) \tag{21}$$

のように $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t$ の関数で表す．そして，ハミルトニアン

$$H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) := \sum_{j=1}^{n} p_j v_j - L \tag{22}$$

を $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t$ の関数として定める．このとき，$q(t)$ がオイラー・ラグランジュ方程式

$$v_i = \dot{q}_i, \tag{23}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \ \ (i = 1, \cdots, n) \tag{24}$$

を満たすならば，$q_i(t)$ および $p_i(t)$ は

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \ (i = 1, \cdots, n) \tag{25}$$

を満たすことを証明せよ．(25) もまた**ハミルトン運動方程式**あるいは**正準運動方程式**と呼ばれる．オイラー・ラグランジュ方程式 (24) は n 個の変数 $q_i(t)$ に対する 2 階の微分方程式であったが，ハミルトンの運動方程式 (25) は $2n$ 個の変数 $p_i(t)$, $q_i(t)$ に対する 1 階の微分方程式である．

問 3．3 次元空間中の質点の直交座標を $\boldsymbol{q} = (x, y, z)$ として自然力学系のラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(\boldsymbol{q}) \tag{26}$$

に対して (20) と同様に

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \tag{27}$$

に従って正準運動量を求めよ．$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ を p_x, p_y, p_z の式で表せ．(22) に従ってハミルトニアン $H(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$ を求めよ．また，この場合，ハミルトン運動方程式 (25) は

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_x}, \qquad \frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{28}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_y}, \qquad \frac{dp_y}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \tag{29}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_z}, \qquad \frac{dp_z}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z} \tag{30}$$

であるが，これらの方程式の右辺を具体的に書き下せ．

問 4．(i) 2 次元平面上の質点のラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(x, y) \tag{31}$$

から正準運動量

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \tag{32}$$

を求めよ．

(ii) (22) に従って

$$H = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} - L \tag{33}$$

よりハミルトニアン $H(x, y, p_x, p_y)$ を求めよ．

(iii) 上で求めた H についてハミルトン運動方程式 (25) を具体的に書き下せ．

(iv) 直交座標 (x, y) から極座標 (r, ϕ) への変換を

$$\begin{cases} x = r\,\cos\phi, \\ y = r\,\sin\phi \end{cases} \tag{34}$$

で定める．この式の両辺を t で微分して $\dot{x}, \dot{y}$ を $r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}$ の関数で表せ．

(v) 逆に，$\dot{r}, \dot{\phi}$ を $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ の関数で表せ．

(vi) ラグランジアン (31) を変数 $r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}$ の関数 $L(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi})$ として書き表せ．

(vii) (20) と同様に

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}, \quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \tag{35}$$

に従って正準運動量を求めよ．

(viii) この式を解いて $\dot{r}, \dot{\phi}$ を r, ϕ, p_r, p_ϕ の式で表せ．

(ix) p_x, p_y を r, ϕ, p_r, p_ϕ の関数で表せ．

(x) 逆に，p_r, p_ϕ を x, y, p_x, p_y の関数で表せ．

(xi) (22) に従って

$$H = p_r\dot{r} + p_\phi\dot{\phi} - L \tag{36}$$

よりハミルトニアン $H(r, \phi, p_r, p_\phi)$ を求めよ．

(xii) 正準座標 r, ϕ, p_r, p_ϕ についてのハミルト

ン運動方程式

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \qquad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r}, \tag{37}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi}, \qquad \frac{dp_\phi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} \tag{38}$$

の右辺を具体的に書き下せ．

(xiii) とくに，位置エネルギー U が r だけの関数になっている（U が ϕ に依存しない）場合，ハミルトンの運動方程式はどうなるか．

(xiv) 次の等式が成り立つことを確認せよ：

$$p_x\dot{x} + p_y\dot{y} = p_r\dot{r} + p_\phi\dot{\phi} \tag{39}$$

問 5．3 次元空間中の質点の直交座標 $\boldsymbol{q} = (x, y, z)$ から極座標 (r, θ, ϕ) への変換を

$$\begin{cases} x = r\,\sin\theta\,\cos\phi, \\ y = r\,\sin\theta\,\sin\phi, \\ z = r\,\cos\theta \end{cases} \tag{40}$$

で定める．このとき，ラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(\boldsymbol{q}) \tag{41}$$

を変数 $(r, \theta, \phi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$ の関数として書き表せ．また，(20) と同様に

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}, \quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \tag{42}$$

に従って正準運動量を求めて，(22) に従ってハミルトニアンを求めよ．また，ハミルトンの運動方程式 (25) を書き下せ．とくに，位置エネルギー U が r だけの関数になっている（U が θ と ϕ に依存しない）場合，ハミルトンの運動方程式はどうなるか．

相流

ハミルトン形式の力学では $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = (q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n)$ という $2n$ 個の変数を用いて力学系の状態を指定する．これらの変数を**正準座標** (canonical coordinates) といい，ペアになる q_i と p_i を**正準共役** (canonical conjugate) という．正準座標で張られる $2n$ 次元の空間を**相空間** (phase space) あるいは**状態空間** (state space) という．

先ほどの節ではラグランジアンからハミルトニアンを作ったが，ハミルトン形式の力学を独立した理論とみなす立場を採ることもできる．この立場では，ラグランジアンを知らなくても，ハミルトニアン $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ という関数を所与のものとして認め，運動方程式

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{43}$$

で力学系の状態変化は決まると考える．

ハミルトン方程式 (43) は相空間上のベクトル場を定めるが，これを**ハミルトンベクトル場** (Hamiltonian vector field) という．ハミルトン方程式は 1 階の微分方程式なので，任意の時刻 $t = t_0$ における初期条件 $(\boldsymbol{q}(t_0), \boldsymbol{p}(t_0))$ が与えられれば方程式 (43) の解 $(\boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{p}(t))$ は一意的に決まる．変数 t の値を動かすと，相空間上の点 $(\boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{p}(t))$ は相空間中に曲線を描くが，この曲線を**解曲線**とか**軌跡** (trajectory) という．時刻 t_0, t_1 を固定すれば，時刻 t_0 における相空間上の点 $(\boldsymbol{q}(t_0), \boldsymbol{p}(t_0))$ に時刻 $t = t_1$ における解軌道上の点 $(\boldsymbol{q}(t_1), \boldsymbol{p}(t_1))$ を対応させる写像

$$\varPi(t_1, t_0) : (\boldsymbol{q}(t_0), \boldsymbol{p}(t_0)) \mapsto (\boldsymbol{q}(t_1), \boldsymbol{p}(t_1)) \tag{44}$$

が定まる．$\varPi(t_1, t_0)$ を**時間発展写像** (time-evolution map) とか**時間推進写像**と呼ぶ．明らかに

$$\varPi(t_2, t_1) \circ \varPi(t_1, t_0) = \varPi(t_2, t_0) \tag{45}$$

が成り立つ．

とくに，ハミルトニアン $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 自体が陽に時間 t に依存していない場合が重要である．そのような系を**自律系** (autonomous system) と

いう．自律系に対しては任意の時刻 t_0, t_1 と任意の時間 τ に対して

$$\varPi(t_1+\tau, t_0+\tau) = \varPi(t_1, t_0) \tag{46}$$

が成り立つ．この性質を時間発展の**時間並進不変性** (time-translation invariance) という．この性質のため，

$$\varPi(t_1, t_0) = \varPi(t_1 - t_0, 0) \tag{47}$$

が成り立つ．そうすると，時間 t の分だけ時間発展を進める写像

$$\sigma(t) := \varPi(t, 0) \tag{48}$$

を定めるのが自然であり，

$$\sigma(t_2) \circ \sigma(t_1) = \sigma(t_2 + t_1) \tag{49}$$

が成り立つ．さまざまな初期条件に対して解曲線を描いた図を**相流** (phase flow) という（厳密には，写像の族 $\{\sigma(t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ のことを相流というが，ここでは図形的・視覚的役割を強調して，解曲線の束そのもののことを相流と呼ぶことにした）．**自律系の場合，相流は，時間変化しないベクトル場に沿った流れになる．**非自律系の場合は，ベクトル場そのものが時間的に変化していくので，一枚の絵にベクトル場と相流を描くことはあまり意味をなさない（アニメーションとして描くなら意味がある）．

ハミルトン形式の力学は運動方程式が相空間上の1階の微分方程式なので，相空間上の一点を選ぶごとにそれを初期条件とする解曲線が一意的に決まり，力学系の振る舞いがすべて相空間中の相流という幾何学的図として捉えられる．つまり，ハミルトン流の力学は，力学系の振る舞いの全体像を把握するのに便利である．

問 6．質量 m とばね定数 k は正の数とし，(x, p) を正準座標とする．ハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} k x^2 \tag{50}$$

に関して，ハミルトン運動方程式を書け．(x, p) 平面において，この方程式が定めるハミルトンベクトル場を描け．運動方程式の解を求めよ．相流も描け．

物理量の時間変化と保存量

系の状態が決まれば値が決まるような関数のことを**物理量** (observable) という．例えば，物体の位置や運動量や運動エネルギーや角運動量は物理量である．相空間の点 $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ は力学系の状態を一意的に指定している．ということは，物理量は相空間上の関数 $A(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ に他ならない．その意味ではハミルトニアン $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ も物理量の一種である．

系の状態が時間変化すれば，それに伴って物理量の値 $A(\boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{p}(t))$ も変化する．その変化の仕方は，ハミルトン運動方程式 (43) により

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \end{aligned} \tag{51}$$

を満たす．この式の右辺はまとまりがよいので，

$$\{A, H\}_{\mathrm{P}} := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \tag{52}$$

と書き，$\{A, H\}_{\mathrm{P}}$ を A と H の**ポアソン括弧** (Poisson bracket) という．

$\{A, H\}_{\mathrm{P}} = 0$ であれば，A の値は時間変化しない，つまり A は保存量になる．

ただし，一般的には，時間 t にあからさまに依存した関数 $A(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ も物理量とみなすことができる．このような関数の時間変化は

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &= \{A, H\}_{\mathrm{P}} + \frac{\partial A}{\partial t} \end{aligned} \tag{53}$$

に従う．

どのようなハミルトニアン H に対しても $\{H, H\}_{\mathrm{P}} = 0$ なので，自律系であれば H 自体が保存量である．実数 E に対して

$$H^{-1}(E) := \{\,(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \,|\, H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = E\,\} \tag{54}$$

は，一般に，相空間内の $(2n-1)$ 次元曲面を定める．これをエネルギー E の**等エネルギー面** (constant-energy surface) という．従って，解曲線は初期条件で決まる等エネルギー面上を動く．もちろん，相空間が 2 次元の場合は等エネルギー面は 1 次元であり，その意味では等エネルギー曲線と呼ぶのがふさわしい．また，等エネルギー面は一つよりも，いろいろなエネルギー値に対する面の族を考えた方が解曲線の族の振る舞いがわかりやすい．

問 7. 問 6 で扱ったハミルトニアンについてエネルギーの値 E をいろいろ変えて (x, p) 平面内に等エネルギー曲線を描け．

問 8. (x, p) を正準座標として，ハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2m} p^2 \tag{55}$$

に関して (x, p) 平面において等エネルギー曲線の族を描け．ハミルトン運動方程式を書け．この方程式が定めるハミルトンベクトル場を描け．運動方程式の解を求めよ．相流も描け．

問 9. 質量 m の物体が重力加速度 g の場の中にあり，鉛直平面内を動くとする．(x, y) を一般化座標として，この系のラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \tag{56}$$

で与えられる．この系は拘束条件

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (a > 0) \tag{57}$$

に縛られているとする．そこで，ϕ を独立変数として

$$x = a \sin\phi, \quad y = -a\cos\phi \tag{58}$$

で座標変換する．

(i) L を $\phi, \dot{\phi}$ の関数で表せ．

(ii) 座標 ϕ に対して共役な正準運動量

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \tag{59}$$

を求めよ．

(iii) (ϕ, p_ϕ) を正準座標としてハミルトニアン $H(\phi, p_\phi)$ を求めよ．

(iv) ハミルトン運動方程式を求めよ．

(v) (ϕ, p_ϕ) を座標とする相空間においてハミルトンベクトル場・等エネルギー面・相流を描け．

(vi) 周期的運動と非周期的運動の境目の条件式を求めよ．

問 10. 質量 m とばね定数 k は正の数とし，(x, p) を正準座標とする．ハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2m} p^2 - \frac{1}{2} k x^2 \tag{60}$$

に関して，ハミルトン運動方程式を書け．相空間内に等エネルギー面を描け．この方程式が定めるハミルトンベクトル場を描け．運動方程式の解を求めよ．相流も描け．

問 11. (i) **円錐曲線** (conic section) と呼ばれる曲線を定義する．平面上に定点 O を定め，点 O を通らない直線 ℓ を定める．平面上の点 P から ℓ に下ろした垂線の足を H とすると，OP と PH の長さの比

$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}} = \varepsilon \tag{61}$$

が一定値であるような点 P の軌跡が円錐曲線である．$\varepsilon = \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, 1, \frac{5}{4}$ として，この定義どおり円錐曲線を作図してみよ．この定数 ε は**離心率** (eccentricity) と呼ばれ，点 O は**焦点** (focus) と呼ばれる．点 P の軌跡は $0 < \varepsilon < 1$ の場合は円錐曲線は**楕円** (ellipse), $\varepsilon = 1$ の場合は**放物線** (parabola), $\varepsilon > 1$ の場合は**双曲線** (hyperbola) になる．$\varepsilon = 0$ の場合をどう考えるべきか，よ

く考える必要があるが，結果的には円になる．
(ii) 点 O から ℓ に下ろした垂線の足を D として，$\mathrm{OP} = r$, $\mathrm{OD} = \lambda$, $\angle\mathrm{DOP} = \theta$, $\varepsilon\lambda = \rho$ とおくと，

$$\mathrm{PH} = \lambda - r\cos\theta \tag{62}$$

となることを示せ．また，

$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}} = \frac{r}{\lambda - r\cos\theta} = \varepsilon \tag{63}$$

から

$$r = \frac{\varepsilon\lambda}{1+\varepsilon\cos\theta} = \frac{\rho}{1+\varepsilon\cos\theta} \tag{64}$$

を導け．これは円錐曲線の方程式と呼ばれる．$\theta = 0$ のとき距離 r は最も短くなるが，惑星が太陽に最も近づく点という意味でこの点は**近日点** (perihelion) と呼ばれる．離心率 ε が 1 より小さいか大きいかによって場合分けして，角度 θ のとり得る値の範囲を考えよ．直交座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を代入すると，

$$\begin{aligned} r &= \varepsilon(\lambda - r\cos\theta) \\ \sqrt{x^2+y^2} &= \rho - \varepsilon x \\ (1-\varepsilon^2)x^2 + y^2 + 2\varepsilon\rho x &= \rho^2 \end{aligned} \tag{65}$$

となる．この式の方が，ε の値に応じて楕円・放物線・双曲線になることがわかりやすい．

問 12. 問 4 (31) の U が万有引力の位置エネルギー

$$U = -\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{k}{r} \tag{66}$$

で与えられる場合を考える．ここで $GMm = k$ とおいた．(r, ϕ, p_r, p_ϕ) を正準座標とする．
(i) 万有引力の下で動く質点のハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2m}p_r^2 + \frac{1}{2mr^2}p_\phi^2 - \frac{k}{r} \tag{67}$$

に関して，ハミルトン運動方程式を書け．
(ii) p_ϕ が保存量であることを示せ．このことから，この質点は，(r, p_r) だけを正準変数とし，p_ϕ は定数として位置エネルギー

$$V(r) = \frac{p_\phi^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} \tag{68}$$

の場の中を動く質点ともみなせる．
(iii) エネルギー値が $E < 0$, $E = 0$, $E > 0$ の場合に分けて，解軌道の振る舞いを分析せよ．
(iv) 2 つの物理量

$$R_x := \left(\frac{p_\phi}{r}\cos\phi + p_r\sin\phi\right)p_\phi - mk\cos\phi \tag{69}$$

$$R_y := \left(\frac{p_\phi}{r}\sin\phi - p_r\cos\phi\right)p_\phi - mk\sin\phi \tag{70}$$

を定義する．(i) で導いたハミルトン運動方程式を用いて

$$\frac{dR_x}{dt} = 0, \quad \frac{dR_y}{dt} = 0 \tag{71}$$

となることを示せ．つまり R_x, R_y は保存量である．$\boldsymbol{R} = (R_x, R_y)$ を**ラプラス・ルンゲ・レンツベクトル** (Laplace-Runge-Lenz vector) という．
(v) ベクトル $\boldsymbol{R} = (R_x, R_y)$ と $\boldsymbol{r} = (x, y) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$ の大きさをそれぞれ R, r とし，これら 2 つのベクトルがなす角を θ とすると，内積の定義と性質から

$$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r} = R_x x + R_y y = Rr\cos\theta \tag{72}$$

が成り立つが，さらに

$$R_x x + R_y y = p_\phi^2 - mkr \tag{73}$$

が成り立つことを示せ．
(vi) 上の式 (72), (73) から

$$r = \frac{p_\phi^2}{mk + R\cos\theta} = \frac{\frac{p_\phi^2}{mk}}{1 + \frac{R}{mk}\cos\theta} \tag{74}$$

を導け．この式を (64) と見比べると，質点の軌道は離心率

$$\varepsilon = \frac{R}{mk} \tag{75}$$

（$R \geq 0$ だから $\varepsilon \geq 0$）の円錐曲線であることがわかる．(74) からラプラスベクトル $\boldsymbol{R}$ は焦

点から近日点の方向を向いていることがわかる．

(vii) (69), (70) と (67) から

$$R^2 := R_x^2 + R_y^2 = 2m\,p_\phi^2\,H + m^2k^2 \qquad (76)$$

となることを示せ．ラプラスベクトル $\boldsymbol{R}$ は保存量であり，その大きさ R はたしかに保存量 p_ϕ, H だけの関数になっている．また，(75), (76) から

$$\varepsilon \;=\; \sqrt{1 + \frac{2p_\phi^2}{mk^2}H} \qquad (77)$$

となることを示せ．H の値はエネルギーであることに注意．$H < 0$ ならば $0 \leq \varepsilon < 1$ であり，質点の軌跡は楕円になる．$H = 0$ ならば $\varepsilon = 1$ であり軌跡は放物線になる．$H > 0$ ならば $\varepsilon > 1$ であり軌跡は双曲線になる．

(viii) $k > 0$ の場合 (66) は力の大きさが距離の 2 乗に反比例する引力を表しているが，$k < 0$ とするとこれは斥力の場になる．$k < 0$ の場合，質点の軌道は必ず双曲線になることを示せ．

問 13. A, B, C を正準座標 $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ の関数とする．c を任意の実数定数とする．ポアソン括弧 (52) について以下の関係式を証明せよ：

$$\{cA, B\}_{\mathrm{P}} = \{A, cB\}_{\mathrm{P}} = c\{A, B\}_{\mathrm{P}} \qquad (78)$$

$$\{A + B, C\}_{\mathrm{P}} = \{A, C\}_{\mathrm{P}} + \{B, C\}_{\mathrm{P}} \qquad (79)$$

$$\{A, B + C\}_{\mathrm{P}} = \{A, B\}_{\mathrm{P}} + \{A, C\}_{\mathrm{P}} \qquad (80)$$

$$\{B, A\}_{\mathrm{P}} = -\{A, B\}_{\mathrm{P}} \qquad (81)$$

$$\{A, BC\}_{\mathrm{P}} = \{A, B\}_{\mathrm{P}}C + B\{A, C\}_{\mathrm{P}} \qquad (82)$$

$$\{AB, C\}_{\mathrm{P}} = \{A, C\}_{\mathrm{P}}B + A\{B, C\}_{\mathrm{P}} \qquad (83)$$

$$\{A, \{B, C\}_{\mathrm{P}}\}_{\mathrm{P}} + \{B, \{C, A\}_{\mathrm{P}}\}_{\mathrm{P}} + \{C, \{A, B\}_{\mathrm{P}}\}_{\mathrm{P}} = 0 \qquad (84)$$

(78), (79), (80) の性質を**線形性**という．(81) を**反対称性**という．(82), (83) を**ライプニッツ則** (Leibniz rule) という．(84) を**ヤコビ恒等式** (Jabobi identity) という．

問 14. 時間に陽に依存しない物理量 A, B, C が保存量ならば，それらをスカラー倍したり足し算したり掛け算したりして得られる関数も保存量であることを証明せよ．保存量同士のポアソン括弧で得られる関数 $\{A, B\}_{\mathrm{P}}$ もまた保存量であることを証明せよ．

問 15. (x, y, z, p_x, p_y, p_z) を正準座標とする系において

$$L_x := yp_z - zp_y \qquad (85)$$

$$L_y := zp_x - xp_z \qquad (86)$$

$$L_z := xp_y - yp_x \qquad (87)$$

で定められる物理量 L_x, L_y, L_z に関して以下のポアソン括弧を求めよ：

$$\{L_x, L_y\}_{\mathrm{P}}, \quad \{L_y, L_z\}_{\mathrm{P}}, \quad \{L_z, L_x\}_{\mathrm{P}}. \qquad (88)$$

【コメント】ラプラス・ルンゲ・レンツベクトル (69), (70) のような複雑な式をどうやって思いついたか不思議に思われるだろうが，3 次元のベクトル $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z)$, $\boldsymbol{L} = (L_x, L_y, L_z)$ を使うとラプラス・ルンゲ・レンツベクトルは

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} - mk\frac{\boldsymbol{r}}{r} \qquad (89)$$

というまとまりのよい形に書ける．

力学の進歩

解析力学は以上で終わりではなく，今もなお進化している．正準変換，ポアソン括弧と対称性の理論，ハミルトン・ヤコビの理論，可積分系，カオス，剛体の力学，流体力学，場の解析力学，制御理論，拘束系の力学，シンプレクティック幾何学などの諸概念・諸理論が，ラグランジュとハミルトンの解析力学の後に展開している．これらの理論は，エレベーター・ロボット・加速器・ロケット・人工衛星・天気予報などさまざまな物体の運動の予測や制御に役立っている．とくに近年はコンピュータの発達に伴って力学の応用範囲はますます広がっている．