物質情報学5（量子力学），担当 谷村省吾，講義ノート1

複素数

複素数は量子力学にとって最も基本的な道具・言葉である．**複素数は抽象的な記号だが，複素平面という視覚イメージを持つと理解しやすくなるし，たいして難しいものではない．しかし，実際に自分で手を動かして計算したり絵を描いたりしないと，自由に扱えるようにならないし，本当には複素数を理解しないままでいることになる．面倒くさがらずに計算練習をやってほしい．**こういうことをしつこく言っても，試験をしてみると複素数の計算がまったくできない学生が何人かいる．複素数なしには量子力学は理解できないので，何としても自分のものにするつもりで取り組んでほしい．

基本的な数学記号

等号 (equal) として「=」と「:=」という 2 種類の記号を使い分ける．「:」はコロン (colon) という記号である．

「=」は**相等子**と呼ばれ，$A = B$ と書くときは，A も B もすでに別々に定義されている式であり，A と B が等しいかと問うた結果，等しいと判定されたことを表す．例えば

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{1}$$

という式は「左辺と右辺は別々の手順で計算される数式だが結果的に等しい」ことを意味する．例えば，

$$(99+1)^2 = 99^2 + 2\cdot 99\cdot 1 + 1^2 \tag{2}$$

の左辺と右辺は，計算の手間はだいぶ異なるが，結果的に等しい．

「:=」は**定義子**あるいは**代入子**と呼ばれ，$X := A$ と書くときは，X は未定義の記号であり，A はすでに定義された式である．定義済みの A を用いて，未定義だった X を定義しようというのが $X := A$ という式の役割である．例えば，

$$e_1 := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \tag{3}$$

という式は，e_1 という記号の定義を与えている．あるいは，「式 (3) は e_1 という新出の記号の正体を決定している」とも言える．また，

$$e_2 := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{4}$$

という式は，e_2 という文字に値を与えている．こうして e_1 と e_2 は定義済みの記号になったのだが，じつは e_1 と e_2 は等しい：

$$e_1 = e_2 = 2.71828182846\cdots. \tag{5}$$

このように 2 種類のイコール記号「=」,「:=」をなるべく意識的に区別するとよい．

また，「P ならば Q」のことを $P \Rightarrow Q$ と書き，「P は Q を**含意する** (imply)」と言ったり，P は Q の**十分条件** (sufficient condition)，Q は P の**必要条件** (necessary condition) だと言う．例えば，整数 x について次のことが言える：

$$x \text{ が 12 で割り切れる} \Rightarrow x \text{ が 3 で割り切れる} \tag{6}$$

「P ならば Q，かつ，Q ならば P」のことを $P \Leftrightarrow Q$ と書き，P は Q の**必要十分条件** (necessary and sufficient condition) だと言う．例

えば，整数 x について次のことが言える：

$$x\text{が}12\text{で割り切れる} \Leftrightarrow \begin{cases} x\text{が}3\text{で割り切れる}, \\ \text{かつ}, \\ x\text{が}4\text{で割り切れる} \end{cases} \tag{7}$$

一方で，X という命題は A という命題の言い換えに過ぎない場合は $X :\Leftrightarrow A$ と書く．例えば,

$$\begin{aligned} &\text{三角形 ABC は正三角形である} \\ &:\Leftrightarrow \begin{cases} \text{辺 AB の長さ} = \text{辺 BC の長さ}, \\ \text{かつ}, \\ \text{辺 BC の長さ} = \text{辺 CA の長さ} \end{cases} \end{aligned} \tag{8}$$

は，正三角形という概念を定義している．必要十分条件を表す「$\Leftrightarrow$」と，定義を表す「$:\Leftrightarrow$」とを使い分けてほしい．

虚数の導入

実数 (real number) 全体の集合を $\mathbb{R}$ と書く．実数は加減乗除（和差積商）の四則演算ができる（0 で割ることだけはできない）．**実数は二乗すれば必ず正または 0 になる**：

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq 0 \tag{9}$$

ゆえに，**二乗して負になる実数はない．**例えば

$$x^2 = 2 \tag{10}$$

という方程式には

$$x = \pm\sqrt{2} = \pm 1.41421356\cdots \tag{11}$$

という実数根が存在するが,

$$x^2 = -1 \tag{12}$$

という方程式を満たす実数 x はない．それでも形式的に

$$i := \sqrt{-1} \tag{13}$$

という記号を定めれば，$x^2 = -1$ の根は $x = \pm i$ と書ける．i は**虚数単位** (imaginary unit) と呼ばれ，$\boldsymbol{i^2 = -1}$ という式で特徴付けられる．虚数を使えば，例えば

$$x^2 = -4 \tag{14}$$

の根は

$$x^2 = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i \tag{15}$$

と書ける．

問 1. $a \neq 0$ として方程式

$$az^2 + bz + c = 0 \tag{16}$$

の解は,

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{17}$$

で与えられることを示せ（a, b, c が実数で $b^2 - 4ac < 0$ のときの解は虚根と呼ばれ,

$$z = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \tag{18}$$

で与えられる）．

複素数の定義

2 つの実数 x, y に対して

$$z = x + iy \tag{19}$$

と書かれる記号 z を**複素数** (complex number) という．複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ と書く．また，複素数 $z = x + iy$ に対し

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z \tag{20}$$

と書き，x を z の**実部** (real part), y を z の**虚部** (imaginary part) という．

2 つの複素数 z_1, z_2 が与えられたとき，z_1 の実部と z_2 の実部が等しく，かつ z_1 の虚部と z_2

の虚部が等しいとき，z_1 と z_2 は等しいという．つまり，実数 x_1, y_1, x_2, y_2 により

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2 \tag{21}$$

と表されるとき，

$$z_1 = z_2 \;:\Leftrightarrow\; (\, x_1 = x_2 \text{ かつ } y_1 = y_2 \,) \tag{22}$$

である．

複素数の演算

実数 a, b, c, d に対して

$$z = a + ib, \quad w = c + id \tag{23}$$

という 2 つの複素数 z, w を定めると，これらの和差積商は

$$z + w := (a + c) + i(b + d), \tag{24}$$
$$z - w := (a - c) + i(b - d), \tag{25}$$
$$zw := ac - bd + i(ad + bc), \tag{26}$$
$$\frac{z}{w} := \frac{ac + bd + i(-ad + bc)}{c^2 + d^2} \tag{27}$$

で定められる．

$z = a + ib$ の虚部の符号を変えた複素数を

$$\bar{z} = z^* = a - ib \tag{28}$$

と書き，z の**共役複素数** (conjugate) という．また，

$$|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{29}$$

を z の**絶対値** (absolute value) という．$|z|$ は必ず正または 0 の実数である．例えば，

$$|4 + 3i|^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25, \tag{30}$$
$$|4 + 3i| = \sqrt{25} = 5, \tag{31}$$
$$\begin{aligned}(4 + 3i)^2 &= (4 + 3i)(4 + 3i) \\ &= 4^2 + 2 \times 4 \times 3i + (3i)^2 \\ &= 16 + 24i - 9 \\ &= 7 + 24i,\end{aligned} \tag{32}$$
$$\begin{aligned}|(4 + 3i)^2| &= |7 + 24i| \\ &= \sqrt{7^2 + 24^2} \\ &= \sqrt{49 + 576} \\ &= \sqrt{625} = 25\end{aligned} \tag{33}$$

という等式が成り立つ．それぞれ何を計算しているのかよく見てほしい．とくに，$|4+3i|^2 = 25$ と $(4+3i)^2 = 7+24i$ は等しくない．心してほしいことだが，**絶対値は必ず非負の実数になる．絶対値の計算結果に虚数 i が現れることはあり得ない．絶対値が負の数になることもない．**

問 2. 上の式 (27) で定めた $\frac{z}{w}$ に対して

$$\frac{z}{w} \cdot w \;=\; z \tag{34}$$

が成り立つことを確かめよ．つまり，

$$\frac{ac + bd + i(-ad + bc)}{c^2 + d^2} \cdot (c + id) \tag{35}$$

を計算して，これが $a + ib$ になることを確かめよ．

代数学の基本定理

$n = 1, 2, 3, \cdots$ と任意の複素数 $a_1, \cdots, a_n$ に対して，方程式

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0 \tag{36}$$

にあてはまる複素数 z が必ず存在する．解は（重根があれば重複度の分だけ繰り返し数えれば）n 個存在する．

実数係数の代数方程式の実数解は存在するとは限らないが（例えば $x^2+1=0$ の実数解はない），複素数係数の代数方程式には複素数解でよければ必ず解が存在するというのが上の主張である．複素数は 2 次方程式を形式的に解くために導入されたものだが，それだけで 3 次方程式も 4 次方程式も解の存在が保証される．代数方程式の解の存在を保証するという目的に限れば複素数以上の拡張概念は必要ないのである．

問 3. 以下のそれぞれの方程式にあてはまる複素数 z を求めよ（答えは具体的な実数 a,b を使って $a+bi$ の形で書け．解が 2 つ以上ある場合はすべての解を書くこと）．

$$\text{(i)} \quad z^2 = 2i \tag{37}$$

$$\text{(ii)} \quad z^2 = 3+4i \tag{38}$$

$$\text{(iii)} \quad z^2 = -5+12i \tag{39}$$

$$\text{(iv)} \quad z^2 = -15+8i \tag{40}$$

$$\text{(v)} \quad z^3 = -2+2i \tag{41}$$

複素平面

実数 x を横軸の数直線で表し，実数 y を縦軸の数直線で表せば，複素数 $z=x+iy$ は xy 平面上の点で表される．このような平面を**複素平面** (complex plane) といい，x 軸を**実軸** (real axis), y 軸を**虚軸** (imaginary axis) という．

このとき点 z と原点 0 との距離は絶対値

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} \tag{42}$$

に等しい．また，原点 0 から点 z を通る半直線と x 軸のプラス側半直線とがなす角を z の**偏角** (argument) あるいは**位相** (phase) という．ラジアン単位で測った偏角を

$$\arg z \tag{43}$$

と書く．$\arg z = \theta$ とおけば

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{44}$$

が成り立つ．これを複素数の**極表示**ともいう．

問 4. 以下の複素数の位置を複素平面に図示せよ．さらにそれぞれの $|z|$ と $\arg z$ を求めよ．

$$z_1 = 1+i \tag{45}$$

$$z_2 = 1+i\sqrt{3} \tag{46}$$

$$z_3 = \sqrt{3}+i \tag{47}$$

$$z_4 = -1+i\sqrt{3} \tag{48}$$

$$z_5 = -1-i \tag{49}$$

$$z_6 = 1-i \tag{50}$$

指数関数

正の実数 a を底とする指数関数は，掛け算の繰り返しで定義される：

$$a^n := a \times a \times \cdots \times a \quad (n \text{ 個の } a \text{ の積}) \tag{51}$$

この定義から，**指数法則**と呼ばれる性質

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \tag{52}$$

が成り立つことが証明できる．

指数関数の素朴な定義式 (51) によって，x が自然数のときに a^x は定義されるが，x の値が 0 や負の整数や分数や無理数や複素数の場合でも a^x が指数法則を満たすことを要請して a^x の定義域を拡張することができる．つまり，指数関数 $\phi(x)$ は形式的に

$$\phi(x+y) = \phi(x)\cdot\phi(y) \tag{53}$$

を満たすものとする．この要請から，

$$\phi(x) = \phi(x+0) = \phi(x)\cdot\phi(0) \tag{54}$$

なので，$\phi(x) \neq 0$ であれば

$$\phi(0) = 1 \tag{55}$$

がわかる．もしも $\phi(b) = 0$ となるような数 b があれば，任意の x について

$$\phi(x) = \phi(x - b + b) = \phi(x - b) \cdot \phi(b) = 0$$

が言えてしまい，$\phi(x)$ は恒等的にゼロになってしまう．これでは面白い関数とは言えないので，$\phi(b) = 0$ となるような b は存在しないことを要請する．これで $\phi(x) \neq 0$ であることが正当化された．

また，指数関数 $\phi(x)$ の性質を知るために，その微分を調べる：

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dx} &= \lim_{h \to 0} \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\phi(x) \cdot \phi(h) - \phi(x)}{h} \\ &= \left\{ \lim_{h \to 0} \frac{\phi(h) - 1}{h} \right\} \cdot \phi(x) \\ &= c \cdot \phi(x) \end{aligned} \tag{56}$$

つまり，関数 $\phi(x)$ は x で微分しても定数倍になるだけである．とくに $c = 1$ と選んで，微分方程式の初期値問題

$$\frac{d\phi}{dx} = \phi(x), \qquad \phi(0) = 1 \tag{57}$$

の解

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \\ &= 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \cdots \end{aligned} \tag{58}$$

を「自然な指数関数」と呼ぶこともある．この $\phi(x)$ を e^x あるいは $\exp x$ と書く．この形で指数関数を定義しておくと，変数 x に実数でも複素数でも正方行列でも代入することができる．

複素数の指数関数

複素数 z の指数関数 (exponential function) を

$$\begin{aligned} e^z &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \\ &= 1 + z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \cdots \end{aligned} \tag{59}$$

で定義する．当たり前ではないことだが，任意の複素数 z に対して，この無限級数は収束する．$e^z = \exp z$ とも書く．明らかに

$$e^0 = 1 \tag{60}$$

である．複素数 α と実数 t に関して

$$\frac{d}{dt} e^{\alpha t} = \alpha\, e^{\alpha t} \tag{61}$$

が成り立つ．また，任意の複素数 z, w に対して

$$(\exp z)^* = \exp(z^*) \tag{62}$$

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w \tag{63}$$

が成り立つ．実数 θ に対して

$$\begin{aligned} \left| e^{i\theta} \right|^2 &= e^{i\theta} (e^{i\theta})^* = e^{i\theta} e^{-i\theta} \\ &= e^{i\theta - i\theta} = e^0 = 1 \end{aligned} \tag{64}$$

が成り立つので，

$$\left| e^{i\theta} \right| = 1 \tag{65}$$

である．

また，

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta \tag{66}$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i \sin\theta \tag{67}$$

あるいは

$$\cos\theta := \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \tag{68}$$

$$\sin\theta := \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \tag{69}$$

で三角関数 $\cos, \sin$ を定義する．(66) を使うと，複素数の極表示 (44) は

$$z = |z|\, e^{i\theta} \tag{70}$$

とも書ける．

問 5．以下の計算をせよ（計算結果は，具体的な実数 a, b を用いて $a+bi$ の形に書け）．

$$(-2+3i)+(6+5i) \tag{71}$$
$$(-2+3i)-(6+5i) \tag{72}$$
$$(-2+3i)\times(6+5i) \tag{73}$$
$$4i\times(-2+3i) \tag{74}$$
$$(3+4i)^2 \tag{75}$$
$$(3+4i)^3 \tag{76}$$
$$(3+4i)^* \tag{77}$$
$$(3+4i)^*\times(5+2i) \tag{78}$$
$$|3+4i|^2 \tag{79}$$
$$|3+4i| \tag{80}$$

$$\frac{1}{3+4i} \tag{81}$$
$$\left|\frac{1}{3+4i}\right| \tag{82}$$
$$\frac{2+5i}{3+4i} \tag{83}$$

$$\sqrt{i} \tag{84}$$
$$\sqrt{1+i\sqrt{3}} \tag{85}$$
$$e^{i\pi/4} \tag{86}$$
$$e^{i3\pi/4} \tag{87}$$
$$e^{-i\pi/3} \tag{88}$$

問 6．(i) 次の複素数を $a+bi$ の形に表せ．

$$z_1 = e^{i\pi/6}, \quad z_2 = e^{i\pi/3}, \quad z_3 = e^{i\pi/2} \tag{89}$$

(ii) 積 $z_1 z_2$ を (26) のルールどおりに計算して，結果が z_3 と一致することを確かめよ．

問 7．任意の複素数について以下の関係式が成り立つことを証明せよ：

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z+z^*) \tag{90}$$
$$\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z-z^*) \tag{91}$$
$$(z+w)^* = z^* + w^* \tag{92}$$
$$(z-w)^* = z^* - w^* \tag{93}$$
$$(zw)^* = z^* w^* \tag{94}$$
$$\left(\frac{z}{w}\right)^* = \frac{z^*}{w^*} \tag{95}$$

$$|z|^2 = zz^* \tag{96}$$
$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2} \tag{97}$$
$$|zw| = |z|\,|w| \tag{98}$$
$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \tag{99}$$
$$\arg(zw) = \arg z + \arg w \tag{100}$$
$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg z - \arg w \tag{101}$$

問 8．任意の複素数について以下の関係式が成り立つことを証明せよ．また，等号が成り立つための必要十分条件を示せ．

$$|z+w| \leq |z| + |w|, \tag{102}$$
$$|z-w| \geq |z| - |w| \tag{103}$$

問 9．以下のおのおのの関係式を満たす複素数 z, w の例を挙げよ．

$$|z+w|^2 > |z|^2 + |w|^2 \tag{104}$$
$$|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 \tag{105}$$
$$|z+w|^2 < |z|^2 + |w|^2 \tag{106}$$

注：(102), (103) は，いかなる複素数 z, w に対しても必ず成立する関係式である．一方で，(104), (105), (106) の全部がいつでも成り立つわけではない．複素数 z, w の値に応じて (104), (105), (106) のうちのどれか一つだけが成立する．

問 10．次の命題を証明せよ．「複素数 z, w において，$zw=0$ ならば $z=0$ または $w=0$ である．」

問 11. 次の命題を証明せよ.「複素数 z において，$z=0$ ならば $|z|=0$ である．また，$|z|=0$ ならば $z=0$ である.」

問 12. α を任意の複素数，t を実数変数として，指数関数の定義式 (59) から

$$\frac{d}{dt}e^{\alpha t}=\alpha\, e^{\alpha t} \tag{107}$$

を導け.

問 13. (i) 実数 a,b を用いて $\alpha=a+ib$ とおき，t を実数変数とする実数値関数 $u(t),v(t)$ を用いて関数 $\phi(t)=u(t)+iv(t)$ とおくとき，微分方程式

$$\frac{d\phi}{dt}=\alpha\,\phi(t) \tag{108}$$

が連立微分方程式

$$\frac{du}{dt}=au-bv,\quad \frac{dv}{dt}=bu+av \tag{109}$$

と同等であることを示せ.

(ii) 上の方程式から

$$\frac{d}{dt}(u^2+v^2)=2a(u^2+v^2) \tag{110}$$

を導け．この式から，$a=0$ ならば u^2+v^2 は t によらず一定であることがわかる.

(iii) $u(t)=e^{at}\cos bt,\ v(t)=e^{at}\sin bt$ とおけば，(109) が成立することを示せ．また，$u(0)=1, v(t)=0$ であることも示せ.

以上より，初期条件 $\phi(0)=1$ の下での微分方程式 (108) の解は

$$\begin{aligned}\phi(t) &= e^{at}\cos bt+ie^{at}\sin bt\\ &= e^{at}(\cos bt+i\sin bt)\\ &= e^{at}e^{ibt}\\ &= e^{(a+ib)t}\end{aligned} \tag{111}$$

であることがわかる.

問 14. α を任意の複素数，t_1,t_2 を任意の実数として関係式

$$e^{\alpha t_1}\cdot e^{\alpha t_2}=e^{\alpha(t_1+t_2)} \tag{112}$$

を以下の手順に従って証明しよう．2 つの関数

$$f(t_2):=e^{\alpha t_1}\cdot e^{\alpha t_2}, \tag{113}$$

$$g(t_2):=e^{\alpha(t_1+t_2)} \tag{114}$$

を定めておく．次の式が成り立つことを証明せよ：

$$\frac{df}{dt_2}=f(t_2),\qquad f(0)=e^{\alpha t_1}, \tag{115}$$

$$\frac{dg}{dt_2}=g(t_2),\qquad g(0)=e^{\alpha t_1}. \tag{116}$$

従って，$f(t_2)$ と $g(t_2)$ は，同じ微分方程式，同じ初期条件を満たす．微分方程式の解の一意性より（このことは証明なしに認める)，2 つの関数は等しいはずである．よって，$f(t_2)=g(t_2)$ が言える．これは証明したかった等式 (112) に他ならない.

問 15. $\cos,\sin$ の定義式 (68)，(69) から $\cos,\sin$ の無限級数表示

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n}\\ &= 1-\frac{1}{2}\theta^2+\frac{1}{4!}\theta^4-\frac{1}{6!}\theta^6+\cdots\end{aligned} \tag{117}$$

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1}\\ &= \theta-\frac{1}{3!}\theta^3+\frac{1}{5!}\theta^5-\frac{1}{7!}\theta^7+\cdots\end{aligned} \tag{118}$$

を導け.

問 16. $\cos,\sin$ の定義式 (68), (69) から

$$\frac{d}{d\theta}\cos\theta=-\sin\theta \tag{119}$$

$$\frac{d}{d\theta}\sin\theta=\cos\theta \tag{120}$$

を示せ.

問 17. t_1,t_2 を任意の実数とする．指数法則

$$e^{i(t_1+t_2)}=e^{it_1}\cdot e^{it_2} \tag{121}$$

と指数関数と三角関数を結びつける式 (66) から，三角関数の加法定理

$$\cos(t_1+t_2)=\cos t_1\,\cos t_2-\sin t_1\,\sin t_2 \tag{122}$$

$$\sin(t_1+t_2)=\sin t_1\,\cos t_2+\cos t_1\,\sin t_2 \tag{123}$$

を導け.

双曲線関数

複素数 z に対して

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \tag{124}$$

$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \tag{125}$$

で定まる cosh を双曲線余弦関数 (hyperbolic cosine)，sinh を双曲線正弦関数 (hyperbolic sine) という．また，

$$\tanh z = \frac{\cosh z}{\sinh z} \tag{126}$$

を双曲線正接関数 (hyperbolic tangent) という．

問 18. 次の関数のグラフを書け：

$$\text{(i)} \quad y = \cosh x \tag{127}$$

$$\text{(ii)} \quad y = \sinh x \tag{128}$$

$$\text{(iii)} \quad y = \tanh x \tag{129}$$

問 19. 次の式を満たす実数の組 (x, y) のグラフを書け：

$$x^2 - y^2 = 1 \tag{130}$$

問 20. 次の関係式を証明せよ：

$$(\cosh z)^2 - (\sinh z)^2 = 1, \tag{131}$$

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x, \tag{132}$$

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x \tag{133}$$

問 21. t を正の実数とする．xy 座標平面において原点 O$= (0,0)$ とする．直線 $x = 1$ の上に点 A$=(1,0)$，点 P$=(1, t)$ を定める．線分 OA, AP, OP で囲まれる図形の面積を求めよ．

問 22. t を正の実数とする．xy 座標平面において円周 $x^2 + y^2 = 1$ の上に点 A$= (1,0)$，点 P$= (\cos t, \sin t)$ を定める．原点 O$= (0,0)$ とするとき，線分 OA と円弧 AP と線分 OP で囲まれる図形の面積を求めよ．

問 23. t を正の実数とする．xy 座標平面において双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の上に点 A$= (1,0)$ と点 P$= (\cosh t, \sinh t)$ を定める．原点 O$= (0,0)$ とするとき，線分 OA と双曲線の一部分の弧 AP と線分 OP で囲まれる図形の面積を求めよ．

参考文献

[1] 谷村省吾「ゼロから学ぶ数学・物理の方程式」（講談社）．大学の数学に落ちこぼれたと思う人は読んでほしいです.

[2] 洲之内治男・猪股清二「関数論」（サイエンス社）． 複素数の関数についての本です.

[3] ファインマン，レイトン，サンズ「ファインマン物理学 5：量子力学」（岩波書店）．量子力学をはじめて学ぶにはこの本がよいと思います.