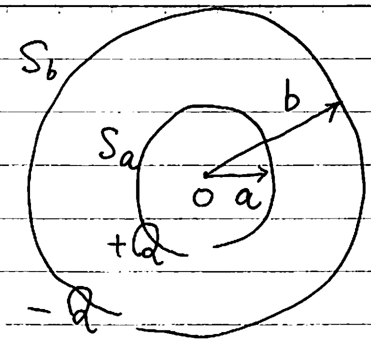
物理学基礎Ⅱ　ノート10 問3, 4 解答例

No. ・ ・ (　　)

問3



導体でできている

半径 a の球殻 S_a に 電荷 $+Q$

b 　　S_b に 　$-Q$

(i) ガウスの法則 (ノート7) 式(13) $\varepsilon_0 \int_{\partial V} \mathbb{E} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \int_V \rho\, dv$ 　(＊)

対称性から $\mathbb{E}(\boldsymbol{r}) = E(r)\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ の形。

O を中心とする半径 r の球体を領域 V とすると

$r \leq a$ のとき、(＊)は $\varepsilon_0 E \cdot 4\pi r^2 = 0$.

$a < r < b$ のとき、(＊)は $\varepsilon_0 E \cdot 4\pi r^2 = Q$

$b < r$ のとき (＊)は $\varepsilon_0 E \cdot 4\pi r^2 = 0$.

よって $\mathbb{E}(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r} & (a < r < b) \\ 0 & (0 \leq r < a \text{ または } b < r) \end{cases}$ ■

(ii) 電位差 $\Delta\phi = \int_A^B \mathbb{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_A^B \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r}}{r} = \int_a^b \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{r\,dr}{r}$

$= \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \dfrac{dr}{r^2} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)$ ■

(iii) $\Delta\phi = \int_A^B \mathbb{E} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_O^B \mathbb{E} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_A^O \mathbb{E} \cdot d\boldsymbol{r}$

$= -\left(-\int_O^B \mathbb{E} \cdot d\boldsymbol{r}\right) - \int_O^A \mathbb{E} \cdot d\boldsymbol{r}$

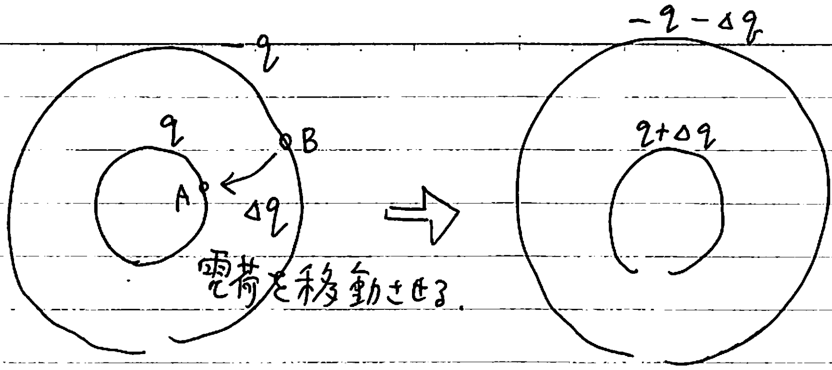
$= -\phi(B) + \phi(A)$ ■

(iv) (ii)より $Q = 4\pi\varepsilon_0\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)^{-1} \cdot \Delta\phi = C \cdot \Delta\phi$

$\therefore\ C = 4\pi\varepsilon_0\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)^{-1}$ ■

No.

問4



(i) Δq 電荷を運ぶのに要する仕事 $\Delta W = -\Delta q \int_B^A \mathbb{E}\cdot d\mathbb{r} = \Delta q \cdot \int_A^B \mathbb{E}\cdot d\mathbb{r}$

$$= \Delta q \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^B \frac{1}{r^2}\frac{\mathbb{r}}{r}\cdot d\mathbb{r}$$

$$= \Delta q \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{1}{r^2}\frac{r}{r}\,dr$$

$$= \Delta q \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

電荷量 $q=0$ から $q=Q$ の状態にするまでに要する仕事

$$W = \int dW = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\int_0^Q q\,dq = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\cdot\frac{1}{2}Q^2$$

(ii)

$$W = \frac{1}{2}\frac{1}{C}Q^2 = \frac{1}{2}Q\cdot\Delta\phi$$

(iii) $a<r<b$ のとき $\mathbb{E}(\mathbb{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\mathbb{r}}{r}$ で他では $\mathbb{E}=0$

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int E^2 dv = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int_a^b\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{1}{r^4}\cdot 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b\frac{1}{r^2}dr = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

(iv) $U = \frac{1}{2C}Q^2$ に等しいので $U=W$