

電場と電荷

電気と磁気

電気は英語で electricity といい, この言葉は「琥珀(木の樹脂の化石)」を意味するギリシア語の $\eta\lambda\epsilon\kappa\tau\rho\nu$ (エレクトロン) に由来する。いまから 2 千年以上前, 古代ギリシャで, 毛皮でこすった琥珀が羽根などの軽いものをひきつけることが発見され, このことから静電気を表す言葉として, この名前がつけられたらしい。

乾燥した日にドアノブに触れたときに「ぴりっ」と感じることもあるが, あれは, 歩いているときに床と靴がこすれて生じた静電気が体にたまり, 金属物に触れたときに静電気が逃げる現象である。レーザープリンタは, トナー(黒い顔料の粉)が静電気の力でくっつくことを応用した機器である。

磁気は英語で magnetism という。天然に産出する鉄鉱石は磁石になっていることが多い。数千年前の石器時代から, 互いに引きつけ合ったり反発したりする天然磁石の存在は知られていた。ギリシャで磁鉄鉱を産出した地域の地名がマグネシアだったので, 磁石が magnet と呼ばれるようになったという説もある。中国では昔, 磁石のことを「慈石」と書いた。鉄を磁石が引きつけるさまが, 我が子を慈しむ母の姿を連想させるところから, 「慈石」と呼ばれたらしい。また, 中国・河北省にある磁県は, かつて慈州と呼ばれ, 天然磁石を多く産出した。この慈州で採れる石だから慈石と名づけられたという説もある。

磁石の応用としては羅針盤(コンパス)が最も初歩的だが, モーター・発電機・電磁石・スピーカー・マイク・ハードディスクなども磁気

の応用機器である。

電気の量は電荷(charge)と呼ばれ, 電荷にはプラスとマイナスがある。すべての物質は原子(atom)が集まってできており, 原子はプラスの電荷を持つ原子核(nucleus)とマイナスの電荷を持つ電子(electron)からできている。プラスとマイナスの電荷が引き合い, プラス同士, マイナス同士では反発することによって, 原子が集まったり離れたりする。従って, 物質のしくみを理解するためには電磁気学の知識が欠かせない。ものが燃えるとか, 水に塩が溶けるとか, 眼の網膜の細胞が光を受け止めるとか, 神経に沿って信号が伝わるとか, 植物が光合成するとか, DNA から遺伝情報を読み出すといった現象も, プラス・マイナスの電荷を持つ原子と電気の力が関わっている。

20 世紀に入ってから量子力学ができて, 原子のようなミクロのスケールの物理現象の理解が進み, 物質をコントロールするテクノロジーが急速に発展した。電気・磁気と物質構造が理解できたおかげで実現した機器は, トランジスター・発光ダイオード・蛍光灯・レーザー・液晶・ラジオ・テレビ・レーダー・携帯電話・電子レンジ・コンピュータ・GPS 用の精密時計など数えきれないほどある。現代文明は電気・磁気なしには成り立たないと言ってよい。

クーロンの法則

これはキャヴェンディッシュが 1773 年に発見し(存命中に発表しなかった), クーロンが 1785 年に再発見した法則である。

真空中に2つの点電荷があるとする。それぞれの電荷量は Q_1, Q_2 とし、それぞれの位置ベクトルを r_1, r_2 とする。このとき r_1 を始点とし、 r_2 を終点とするベクトルを $R = (x, y, z) = r_2 - r_1$ とおき、その長さを $R = \|R\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ($\|R\|$ を、ベクトル R のノルムあるいはベクトル R の大きさという) とおくと、電荷 Q_2 は

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{R^2} \frac{R}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{\|r_2 - r_1\|^2} \frac{r_2 - r_1}{\|r_2 - r_1\|} \quad (1)$$

の力を受ける。すなわち、点電荷は互いに斥力(反発力)または引力を及ぼし合う。電荷の符号が同じなら斥力、電荷の符号が逆なら引力を及ぼし合う。力の向きは2つの点電荷を結ぶ直線に沿っている。力の大きさは、それぞれの電荷量に比例し、電荷間の距離の2乗に反比例する。これをクーロンの法則(Coulomb's law)という。

電荷 Q はクーロン(C)という単位で測る。力の大きさはニュートン(N)という単位で測る。長さの単位はメートル(m)である。 ϵ_0 は真空の誘電率と呼ばれる定数で、

$$\epsilon_0 = 8.854187817 \dots \times 10^{-12} \text{ N}^{-1} \text{ C}^2 \text{ m}^{-2} \quad (2)$$

である。また、

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.987552 \dots \times 10^9 \text{ NC}^{-2} \text{ m}^2 \quad (3)$$

はクーロン定数と呼ばれる。

問1. プラスチック板をこすって静電気をためたら、静電気で紙片を吸い上げることができた。紙片に働く重力に逆らって紙片を持ち上げたことから、プラスチックにたまっている電荷量を推定せよ。

問2. クーロンの法則を対称性の観点から分析せよ。

場の導入

クーロンの法則は2つの電荷の間に働く力についての法則だが、考え方を次のように変える。位置 r_1 に置かれた電荷 Q_1 が、その周りの場所 r ごとに電場(electric field) $E(r)$ というものを作り、位置 r_2 に置かれた電荷 Q_2 は

$$F = Q_2 E(r_2) \quad (4)$$

の力を受ける、と考える。そのためには位置 r での電場は

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{\|r - r_1\|^2} \frac{r - r_1}{\|r - r_1\|} \quad (5)$$

でなくてはならない。いましたことは、(1)という一つの式を、電場を仲立ちにして(4)と(5)という二段階の式に分けて書いただけである。考え方としては、(5)は電荷 Q_1 がどんな電場を作るか決める式であり、(4)は電場が電荷 Q_2 にどんな影響を及ぼすか決める式である。詳しく言うと、位置 r_1 に置かれた電荷 Q_1 が r の位置に作る電場 $E(r)$ が(5)で与えられる。 r の場所に電荷 Q_2 を置いていなくてもそこには電場 $E(r)$ ができていると考えるのがミソである。

場と近接作用

電磁気学では、空間中に場(field)と呼ばれる物理量が散りばめられているという考え方をする。物体は場を変化させることがあるし、逆に物体が場から力を受けることもある、遠く離れた物体同士が直接に力を及ぼすのではなく、まず一方の物体が場の変化を引き起こし、そうしてできた場が、別の物体に力を及ぼすという考え方をする。つまり、遠く離れた物体に直接、力が及ぶのではなく、空間中に媒介物があって力が伝わると考える。これを近接作用(action through medium)の理論という。

それに対して、遠く離れた物体が、途中に何の媒介物もなしに、直接、力を及ぼし合うとい

う考え方を、遠隔作用 (action at a distance) の理論という。

例えば、重力 (万有引力) とは、質量を持った物体同士が引き合う力だが、近接作用の考え方では、一方の物体が、その周りに重力場という空間のひずみのような状態を作り出し、別の物体が重力場から力を受けると考える。

3次元空間中の位置 (座標) を $r = (x, y, z)$ で表し、時刻を t で表すと、場は $f(r, t)$ という関数で表される。これは、時刻 t に空間の点 r という位置に $f(r, t)$ という値の物理量がある、ということを表している。ただし、場が時間的に変化しない場合や、時刻を止めて考える場合には、 $f(r)$ と書く。

場にはスカラー場とベクトル場の2種類がある。スカラー場は一つの実数で値を表せる場であり、例えば $\phi(r, t)$ と書かれる。気体の温度や圧力や密度などがスカラー場の例である。

ベクトル場は3次元ベクトルで値を表せる場であり、例えば $A(r, t)$ と書かれる。ここで $A = (A_x, A_y, A_z)$ も3次元ベクトルである。例えば、気体や液体の流れは、流速ベクトル場を定める。また、重力場は、空間の各点における重力加速度ベクトルで特徴づけられるので、ベクトル場 $g(r)$ である。

電荷

電荷 (electric charge) というものがあることは認めてもらう。ものの重さ・質量があるように、「電荷量」という「電気的量」がある。ただし、質量にはプラスの質量だけがあって、マイナスの質量はないが、電荷にはプラスの量もマイナスの量もある。質量は kg (キログラム) という単位で測られる約束になっているが、電荷は C (クーロン) という単位で測られる。

電荷の「ありよう」はさまざまである。空間

中にぼつりぼつりと点状に浮いている電荷もあるし、平面的なプラスチックのシートにくっついていて電荷もある。人間の体にたまっている静電気もある。車のバッテリーのような液体の中に存在している電荷もある。ともかく、電荷は空間中のどこかにある。電荷の分布の仕方には濃淡があり、「単位体積あたりの電荷量」という概念を定義することができる。これを電荷密度 (charge density) といい、 ρ という記号で表すことが多い。電荷密度の単位は $C \cdot m^{-3}$ である。定義から言って、

$$\text{電荷密度} \times \text{体積} = \text{電荷} \quad (6)$$

という関係が成り立つ。

曲面の上に分布した電荷に対しては、「電荷面密度 = 単位面積あたりの電荷量」という概念が定義できる。電荷面密度の単位は $C \cdot m^{-2}$ である。当然のことながら、

$$\text{電荷面密度} \times \text{面積} = \text{電荷} \quad (7)$$

という関係が成り立つ。

曲線上に分布した電荷に対しては、「電荷線密度 = 単位長さあたりの電荷量」という概念が定義できる。電荷線密度の単位は $C \cdot m^{-1}$ である。

$$\text{電荷線密度} \times \text{長さ} = \text{電荷} \quad (8)$$

という関係が成り立つ。

電荷の加法則

電荷については二つの法則性がある。一つは加法性という法則。電荷 Q_1 と電荷 Q_2 があれば全体の電荷は

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad (9)$$

になる。「足し算できるのは当たり前ではないか?」と思われるかもしれない。しかし、温度について

$$10 + 20 = 30 \quad ? \quad (10)$$

という足し算はあまり意味がない。10 の水と 20 の水を混ぜたら 30 の水ができるわけではない。つまりこの足し算は現実世界の出来事に対応していない。人間が扱う量には、足し算に意味がある量と、形式的に足しても意味のない量がある。電荷の加法則は「電荷は足し算に意味のある量だ」ということを積極的に主張している。

電荷の保存則

電荷に関しては電荷保存則 (conservation of charge) という法則もある。ある時刻に電荷が散らばっていて、それらの合計電荷は

$$Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = Q \quad (11)$$

であるとする。しばらく時間が経って、いろいろな現象、例えば、電池でモーターを動かすとか、静電気がパチパチと音を立てて火花を散らすとか、原子核が分裂するなどの現象が起きたとしても、電荷の総量を測るとさっきの Q に等しい、というのが電荷保存則である。

電荷保存則はエネルギー保存則に並ぶ物理の基本法則である。これまでにどんな実験をやっても電荷を増やすことも減らすこともできなかった、という経験事実を積み重ねた主張が電荷保存則である。今後も永久に電荷保存則は正しいという保証は、ない。しかし、現在の電磁気学の理論から電荷保存則は数学的に導ける。ということは、もしも電荷保存則が成り立たないような実験事実が一つでも見つかったら、電磁気学の理論は破綻してしまう。

他にもいくつかの理論的根拠があって、「もしも電荷保存則が間違っていたら今までやっていた物理学が総崩れになってしまう」と言えるくらい電荷保存則は根幹的な法則になっている。

電場と磁場の定義

2個の点電荷に限らず、まったく一般的な状況でも使える電場と磁場の定義と述べよう。

時刻 t に 3次元空間のある点 r に、速度ゼロの点電荷 q を置いたとき、点電荷は力

$$F = qE(r, t) \quad (12)$$

を受ける。これは時刻 t 、場所 r における電場 $E(r, t)$ の定義式でもある。力の単位を N (ニュートン)、電荷の単位を C (クーロン) とすれば、電場の単位は $N \cdot C^{-1}$ である。点電荷 q は電場を測るために、試しに置く電荷であり、そのような電荷を試験電荷 (test charge) と呼ぶ。

上の文章で、点電荷に「速度ゼロの」という修飾語を付けたのは、点電荷がゼロでない速度で動いていたとしたら、受ける力が変わるからである。電場 E と磁場 B がある場所を点電荷 q が速度 v で通過するときは、点電荷は

$$F = qE + qv \times B \quad (13)$$

という力を受ける。これをローレンツ力 (Lorentz force) という。ベクトルの掛け算 $v \times B$ は外積とかベクトル積と呼ばれる。ただし、この B は、いま「磁場」と呼んだが、正式には「磁束密度」と呼ばれる。また、物理学の本では「電場」と「磁場」と書かれ、工学系の本では「電界」と「磁界」と書かれることが多い。磁束密度 B の単位は $N \cdot C^{-1} \cdot m^{-1} \cdot s$ であるが、T (テスラ) や $Wb \cdot m^{-2}$ (ウェーバー毎平方メートル) も使われる。

静電場の理論の範囲では、電荷が動かず、電場は時間変化しないケースだけを扱うので、電

場を記述するのに時刻を指定する必要はなく、電場は $E(\mathbf{r})$ と書かれる。また、静電場だけを考えると、さしあたって磁場 B はゼロとする。

重ね合わせの原理

電場は電荷に力を及ぼすというのが電気力の法則 (12) だが、逆に、電荷はその周囲に電場を作る。電荷の配置しだいでさまざまな電場ができる。例えば、地面も大気も雲も電荷を帯びており、地球の周囲には複雑な電場ができていいる。しかしどのような複雑な電荷配置・複雑な電場でも共通して成り立つ単純な法則として、重ね合わせの原理 (principle of superposition) がある。

ある電荷配置 (Ω_1 と呼ぼう。それは点電荷でなくてもよい。雲のような複雑な形の、電気を帯びた物体でもよい) が空間中の点 r に作る電場を $E_1(\mathbf{r})$ とする。また、電荷配置 Ω_1 はなくなって、別の電荷配置 Ω_2 があつたときに点 r にできる電場を $E_2(\mathbf{r})$ とする。それでは、電荷配置 Ω_1 と Ω_2 が同時に存在したら、点 r にはどんな電場 $E(\mathbf{r})$ ができるか？ 経験事実によれば、

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \mathbf{E} \quad (14)$$

が成り立つ。これを重ね合わせの原理という。

さらに、電荷配置 $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ が多数多様にあつた場合も、それぞれの電荷が作る電場を E_1, E_2, \dots, E_n とすると、すべての電荷があるときにできる電場は

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n = \mathbf{E} \quad (15)$$

に等しい。

電場のクーロンの法則

電場 E がある場所に電荷 q を置けば、この電荷は $F = qE$ の力を受けるというのが電場の定義であつた。このこととクーロンの法則 (1) から、動かない点電荷 Q_1 が位置 r_1 にあつた場合、位置 r にできる電場は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\|} \quad (16)$$

に等しい。

クーロンの法則と重ね合わせの原理を組み合わせると、点電荷 Q_1, Q_2, \dots, Q_n がそれぞれ位置 r_1, r_2, \dots, r_n にあつたとき、位置 r にできる電場は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|} \quad (17)$$

に等しいことがわかる。

また、電荷密度 $\rho(\mathbf{r})$ で電荷が分布しているとき位置 r にできる電場は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dv' \quad (18)$$

に等しい。

なお、クーロンの法則においては電場の源となる電荷が動いていないことは本質的な前提である。電場の源である電荷 Q_i や ρ が動いている場合にできる電場は (17) や (18) 式のとおりではない。

さまざまな電荷分布による電場

問3. 以下のそれぞれの電荷分布に対する電場ベクトル場を定性的に正しく図示せよ。

(0) 3次元空間中に正の点電荷 Q が置かれている。

(0') 3次元空間中に負の点電荷 $-Q$ が置かれている。

(1) 正の点電荷 Q と負の点電荷 $-Q$ が一定の距離離れて置かれている。

(2) 点電荷 $3Q$ と点電荷 $-Q$ が一定の距離、離れている。

(3) 正方形の頂点に点電荷が置かれている。電荷量は、辺に沿って一周するとき、 $+Q, -Q, +Q, -Q$ であるとする。

(4) 無限に長い直線に沿って一様な線密度で正電荷が分布している。

(5) 無限に広い平面上に一様な面密度で正電荷が分布している。

(6) 球の表面に一様な面密度で正電荷が分布している。球の外部と内部の電場も図示せよ。

(7) 球体の内部に一様な密度で正電荷が分布している。球の外部と内部の電場も図示せよ。

(8) 2枚の互いに平行な無限に広い平面があるとす。一方の平面には一様な面密度で正電荷が分布しており、他方の平面には一様な面密度で負電荷が分布している。2枚の平面の電荷面密度の絶対値は等しいとする。

(9) 同心で半径の異なる2枚の球面があるとす。半径の大きい方の球面には正電荷 Q が一様な面密度で分布しており、半径の小さい方の球面には負電荷 $-Q$ が一様な面密度で分布している。

参考文献

[1] パーセル「パークレー物理学コース2：電磁気」(丸善)。以前は上下2巻に分かれていたが、2013年に1冊に合本された。非常に丁寧に書かれている。

[2] ファインマン、レイトン、サンズ(宮島龍興訳)「ファインマン物理学3：電磁気学」(岩波書店)。ファインマンらしい物理的洞察が随所に見られる。

[3] 長岡洋介「電磁気学1,2」(岩波書店, 物理入門コース)。基本的な事項が書かれている。

[4] 砂川重信「電磁気学」(岩波書店, 物理テキストシリーズ4)。きっちり勉強したいときに読むとよい。

[5] 北野正雄「マクスウェル方程式」(サイエンス社)。一通り電磁気学を勉強した後でこの本を読むと、ああ、こういうことだったのか、と思う。

[6] 今井功「電磁気学を考える」(サイエンス社)。著者は流体力学の有名な研究者。流体のアナロジーで電磁場を捉えるという独特の視点が面白い。

[7] 太田浩一「電磁気学の基礎1,2」(東京大学出版会)。すべての発見について第一発見者が書いた文献を調査するという態度が貫かれている。