物理学基礎II（電磁気学），担当 谷村省吾，平成30年度 講義ノート10

コンデンサと誘電体

コンデンサ

condense（コンデンス）は「濃縮する，凝縮する，濃くする」という意味の動詞である．con-は「共(とも)に」という意味の接頭辞であり，dense は「密度の高い，密集した」という意味の形容詞である．果物の汁から水分を蒸発させて濃くすることが condense の例である．density は「濃度，密度」の意味の名詞である．condenser（コンデンサ）は「濃縮するもの，凝縮するもの」という意味の名詞になる．例えば，水蒸気を冷やして液化する装置は condenser と呼ばれる．

電気に関してコンデンサと言えば，電荷をためる装置を指し,「蓄電器」と訳される．昔，電気の正体がよくわかっていなかった時代には，電気は流体・液体のようなものだと思われていて（「電流」とか「電圧」という言葉はその名残(なごり)である），電荷をためることは，電気流体を濃縮することだと思われていたので，コンデンサ（電気濃縮器）という名前が付けられた．いまでは，たんなる電気の器(うつわ)という意味でキャパシタ（capacitor）とも呼ばれている．

電荷をためると言っても，プラスの電荷だけ，あるいはマイナスの電荷だけを大量にためると，同符号の電荷の間に大きな反発力が生じて電荷が飛散してしまうので，片方の符号の電荷だけをためることは難しい．実際には，2枚の導体板（金属膜）を近づけて置いて，1枚にはプラスの電荷をため，もう1枚にはマイナスの電荷をためて，プラス・マイナスの電荷が引き合う形にして電荷をためる．そのような装置がコンデンサである．

電池のような一定電圧の電源にコンデンサをつなげると，しばらくは電流が流れて，コンデンサに電荷がたまるが，ある程度電荷がたまると，電流は流れなくなる．コンデンサに電荷をためることを**充電**または**蓄電**という．逆に，コンデンサにたまった電荷を逃がすことを**放電**という．

コンデンサの2枚の極板にたまっている電荷量をそれぞれ $\pm Q$ とし，極板間の電位差を $\Delta\phi$ とすると，Q は $\Delta\phi$ に比例する．その比例係数を C と書くと

$$Q = C\Delta\phi \tag{1}$$

という関係が成立する．C は**電気容量** (electric capacity) あるいは**静電容量**と呼ばれる．

電荷の単位をC（クーロン），電位の単位をV（ボルト）とすると電気容量の単位はC/Vだが，これを**F（farad）**= C/V と定める．farad は，ファラドあるいはファラッドと読まれ，人名Faraday（ファラデイ）にちなんでいる．電気容量を表す C と電荷の単位のC（クーロン）が紛らわしいので注意．

現実のコンデンサでは1ボルトの電位差でたまる電荷は 10^{-6} クーロンとか 10^{-12} クーロンのような微少量である．そのため電気容量の単位として

$$\mathrm{mF}\,（ミリファラド）= 10^{-3}\,\mathrm{F}$$
$$\mu\mathrm{F}\,（マイクロファラド）= 10^{-6}\,\mathrm{F}$$
$$\mathrm{nF}\,（ナノファラド）= 10^{-9}\,\mathrm{F}$$
$$\mathrm{pF}\,（ピコファラド）= 10^{-12}\,\mathrm{F}$$

などが用いられる．

導体板だけで作られたコンデンサ

一番単純なコンデンサは，アルミ箔のような薄い金属板（膜）2 枚を，わずかな隙間（すきま）をあけて重ねたものである．2 枚の金属板の面積が等しく S で，2 枚の板は平行であるとし，板の間の距離は ℓ，板の間は真空だとすると，このコンデンサの電気容量は

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{\ell} \tag{2}$$

に等しい．

問 1. 式 (2) を以下の手順で証明せよ．

(i) 導体板の間にできる電場の大きさは

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \tag{3}$$

に等しいことを示せ．

(ii) 導体板間の電位差は

$$\Delta\phi = \frac{Q\ell}{\varepsilon_0 S} \tag{4}$$

に等しいことを示せ．

(iii) 式 (4) と電気容量の定義式 (1) から簡単に (2) を導ける．

問 2. 真空の誘電率 ε_0 の単位が $\mathrm{F\,m^{-1}}$ であることを説明せよ．

問 3. 半径 a と b（$a < b$）の同心の 2 つの導体球殻からなるコンデンサの電気容量が

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^{-1} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a} \tag{5}$$

で与えられること以下の手順で証明せよ．

(i) 原点からの位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とし，その大きさを $\|\boldsymbol{r}\| = r$ と書く．原点を中心とする半径 a の導体球殻を S_a と呼び，半径 b の導体球殻を S_b と呼ぶことにする．S_a に電荷 Q が一様な密度で分布し，S_b に電荷 $-Q$ が一様な密度で分布しているときにできる電場は，$a < r < b$ では

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{6}$$

となり，$0 \le r < a$ または $b < r$ では

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{7}$$

となることをガウスの法則を用いて示せ．

(ii) 球殻 S_a の任意の点を A とし，球殻 S_b の任意の点を B とするとき，

$$\Delta\phi := \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \tag{8}$$

が成り立つことを示せ．

(iii) 点 A の電位を $\phi(\mathrm{A})$ と書くと

$$\Delta\phi = \phi(\mathrm{A}) - \phi(\mathrm{B}) \tag{9}$$

が成り立つことを示せ．

(iv) 式 (1) と (8) から (5) を導け．

電荷の位置エネルギー

n 個の点電荷 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ が互いに無限に離れている状態からスタートして，各電荷を $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n$ の位置にまで動かすのに要する仕事を求めよう．番号 1, 2, $\cdots$ の順に点電荷を無限遠方から $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots$ の位置に運ぶとすると，i 番目の電荷を運ぶとき点電荷 i は

$$Q_i \boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r}) = \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{Q_j}{\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j\|^2}\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j}{\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j\|} \tag{10}$$

の力を電場から受ける．従って点電荷 i を所定の位置 $\mathrm{P}_i = \boldsymbol{r}_i$ まで移動させるのに要する仕事は

$$W_i = -\int_{\infty}^{\mathrm{P}_i} Q_i \boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{Q_j}{\|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j\|} \tag{11}$$

となる．すべての電荷を所定の位置にまで移動させるのに要する全仕事は

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{Q_i Q_j}{\|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j\|} \tag{12}$$

に等しい．これは

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i \neq j}^{n} \frac{Q_i Q_j}{\|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j\|} \tag{13}$$

とも書ける．ただし，ここに現れた級数は $i \neq j$ であるようなすべての $i, j = 1, \cdots, n$ の組についての和である．W は**全電荷の位置エネルギー**とも言える．“i 番目の点電荷以外の電荷が作る電位” を

$$\phi_i(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1,\cdots,n}^{j \neq i} \frac{Q_j}{\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j\|} \tag{14}$$

と定めれば，(13) は

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} Q_i \phi_i(\boldsymbol{r}_i) \tag{15}$$

とも書ける．ただし現実には，多数の電荷があるときには「この電場はどの電荷が作ったものか？」という区別はできないので，“i 番目の点電荷以外の電荷が作る電場” や “i 番目の点電荷以外の電荷が作る電位” という概念は数学的な虚構であることに気をつけてほしい．

点電荷ではなく連続的に分布した電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ が与えられたとき，無限遠方でゼロになるような電位場 $\phi(\boldsymbol{r})$ が定められるならば，電荷の配置の位置エネルギーは

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\boldsymbol{r}) \phi(\boldsymbol{r})\, dv \tag{16}$$

で定められる．微分形のガウスの法則

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \tag{17}$$

と電場と電位の関係式

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \phi \tag{18}$$

を用いると，(16) は

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}\, dv \tag{19}$$

と書ける．

コンデンサのエネルギー

コンデンサは電荷をためるだけでなく，エネルギーもためる．コンデンサが蓄えているエネルギーを計算しよう．そのために，コンデンサを充電するのに要する仕事を求めよう．話を簡単にするため，平行導体板コンデンサを考える．いま，2 枚の導体板にはそれぞれ正電荷 q と負電荷 $-q$ がたまっているとする．負の電極から微小電荷 Δq を取って正の電極に運ぶのに要する仕事は

$$\begin{aligned} \Delta W &= E \cdot \Delta q \cdot \ell \\ &= \frac{q}{\varepsilon_0 S} \cdot \Delta q \cdot \ell = \frac{\ell}{\varepsilon_0 S} \cdot q\, \Delta q \end{aligned} \tag{20}$$

に等しい．導体板にたまっている電荷 q が 0 から Q になるまでに要する仕事は

$$\begin{aligned} W = \int dW &= \int_0^Q \frac{\ell}{\varepsilon_0 S} \cdot q\, dq \\ &= \frac{\ell}{\varepsilon_0 S} \cdot \frac{1}{2} Q^2 \end{aligned} \tag{21}$$

である．(4) や (2) を用いると，これは

$$W = \frac{1}{2} Q\, \Delta\phi = \frac{1}{2C} Q^2 \tag{22}$$

と書ける．これが充電に要する仕事であり，充電されたコンデンサにはこれだけのエネルギーがたまっている．また，(3) を用いると

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \cdot S\ell \tag{23}$$

とも書ける．$S\ell$ はコンデンサの導体板で挟まれた柱状の領域の体積に等しい．**コンデンサを充電するのに費やした仕事は電場のエネルギーとして蓄えられている**とすると，電場は単位体積あたり

$$\frac{W}{S\ell} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E} \tag{24}$$

のエネルギーを持っていることになる.

問 4. (i) 半径 a と b（$a<b$）の同心の 2 つの導体球殻からなるコンデンサに電荷 0 から $\pm Q$ の状態にまで充電するのに要する仕事 W を求めよ.
(ii) 2 つの球殻間の電位差を $\Delta\phi$ とすると W は

$$W = \frac{1}{2} Q\,\Delta\phi = \frac{1}{2C} Q^2 \tag{25}$$

を満たすことを示せ.
(iii) 電場の全エネルギー

$$U = \int \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2\, dv \tag{26}$$

を求めよ．ただし全空間にわたって積分する.
(iv) $W=U$ であることを確認せよ.

誘電体と分極場

前回，誘電分極を起こす誘電体という物質があることを述べた．復習すると，電場中に物質を置いたとき，物質を構成する分子の中で電子が移動し電荷分布が偏るために，分子の一部が正電荷を帯び，別の部分が負電荷を帯びることを物質の**誘電分極**と言った．誘電分極を起こしやすい物質を**誘電体**と呼んだ．プラスチック，セラミックス，油，液晶などが代表的な誘電体である.

コンデンサの電荷 Q，電位差 $\Delta\phi$，電気容量 C の間にはつねに $Q = C\Delta\phi$ という関係が成立する．**コンデンサの導体板の隙間に誘電体を入れると電気容量が大きくなる．**つまり，誘電体がない場合よりもある場合の方が，同じ電位差でより多くの電荷がたまるか，同じ電荷をためるのに小さな電位差で済む．どうしてそのようなことが起こるか考えてみよう.

誘電分極は数学的には**分極場 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$** というベクトル場で記述される．物質中の，単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ で向き付けられた面積要素 $\boldsymbol{n}\Delta S$ が与えられたとき，誘電分極によって，この面を通り抜けた電荷の量が

$$\Delta Q = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}\,\Delta S \tag{27}$$

に等しくなるように $\boldsymbol{P}$ を定める．従って $\boldsymbol{P}$ の単位は $\mathrm{C\,m^{-2}}$ である.

分極場が一定であれば誘電体の内部は電気的に中性だが，誘電体の表面にはゼロでない電荷が現れる．誘電体の表面の単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすると，誘電体の表面には面密度

$$\sigma_{\mathrm{p}} = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n} \tag{28}$$

の電荷が現れる．これを**分極電荷**という.

平行な 2 枚の導体板の間に誘電体を挿入して，導体板に正負の電荷を充電すると，正の電極に近い側の誘電体表面には負の分極電荷が現れ，負の電極に近い側の誘電体表面には正の分極電荷が現れる．**分極電荷は，コンデンサの電極板の電荷の一部を打ち消すので，結果的に誘電体内部の電場は弱くなる．**従って 2 枚の導体板の電位差は小さくなる．これがコンデンサの電気容量が大きくなったように見えるしくみである.

平行導体板コンデンサに誘電体を挿入した場合について電場の大きさを計算してみよう．もともと導体板には面密度 σ の電荷があったので，コンデンサ内には電束密度 $D=\sigma$ の電気力線がある．しかし誘電体が入ると，正味の電荷面密度は $\sigma' = \sigma - \sigma_{\mathrm{p}}$ に減る．そのためコンデンサ内の電場は

$$E = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma - \sigma_{\mathrm{p}}}{\varepsilon_0} = \frac{D}{\varepsilon_0} - \frac{P}{\varepsilon_0} \tag{29}$$

になる．この式は

$$\varepsilon_0 \boldsymbol{E} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{P} \tag{30}$$

とも書かれる．誘電体の内と外では電束密度 $\boldsymbol{D}$ は変わらないが，電場 $\boldsymbol{E}$ は誘電体内部では分極場 $\boldsymbol{P}$ の分だけ弱くなる.

線形応答物質

物質の誘電分極の発生のしかたは，分子の形，分子の配列のしかた，物質の形状や温度・圧力にも依存していて，複雑である．

すべての物質に通用する誘電分極の法則はない．ただ，一部の物質では，とくに電場が弱いときは，分極場は電場に比例するという経験則

$$\boldsymbol{P} = \chi_{\mathrm{e}}\,\varepsilon_0 \boldsymbol{E} \tag{31}$$

が近似的に成り立つ．この式 (31) が成り立つ物質を**線形応答系**という．χ_{e} は物質の**電気感受率** (electric susceptibility) と呼ばれ，物質の種類や温度によって変化し得る．係数 χ_{e} は無次元であることに注意してほしい．誘電分極の線形法則 (31) が成り立つならば (30) は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \\ &= \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \chi_{\mathrm{e}}\,\varepsilon_0 \boldsymbol{E} \\ &= \varepsilon \boldsymbol{E} \end{aligned} \tag{32}$$

と書ける．ここで

$$\varepsilon := (1 + \chi_{\mathrm{e}})\varepsilon_0 \tag{33}$$

で定められる ε を物質の**誘電率** (permittivity) という．式 (32) は，むしろ

$$\frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} \tag{34}$$

と書くべきで，物質中では $\varepsilon > \varepsilon_0$ であるために，真空中と同じ電束密度でも物質中では電場が弱くなることがわかる．

問 5. 平行導体板コンデンサの隙間に誘電体を入れたとき，コンデンサの電気容量は

$$C = \frac{\varepsilon S}{\ell} \tag{35}$$

になることを証明せよ．