物理学基礎II（電磁気学），担当 谷村省吾，平成30年度 講義ノート11

磁場の法則

外積

ベクトルの**内積** (inner product) は，2つのベクトルから1つのスカラー（数）を作る演算であった．ベクトルの**外積** (exterior product) あるいは**ベクトル積**，**クロス積**とも呼ばれる演算は，2つのベクトルから1つのベクトルを作る演算である．

2つの3次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \tag{1}$$

に対して，内積は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= (a_x, a_y, a_z) \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \end{aligned} \tag{2}$$

という1つの数を定める．外積は

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \tag{3}$$

という1つのベクトルを定める．

内積と外積の幾何学意味は以下のとおり．ベクトルの**ノルム** (norm)

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{a}\| &= \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} \\ &= \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2} \end{aligned} \tag{4}$$

はベクトル $\boldsymbol{a}$ の大きさを表している．2つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすると

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\| \, \|\boldsymbol{b}\| \cos\theta \tag{5}$$

が成り立つ．つまり，内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a}$ に射影してできる影の長さに $\boldsymbol{a}$ 自体の長さを掛け算した値である．$\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{b}$ に射影してできる影の長さに $\boldsymbol{b}$ 自体の長さを掛け算した値にも等しい．

外積に関しては，

$$\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\| \, \|\boldsymbol{b}\| \sin\theta \tag{6}$$

が成り立つことが証明できる．また，ベクトル $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の向きは，右ねじを $\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{b}$ に回転させるときにねじが進む向きである．

問1．式 (6) を証明せよ．

問2．任意の単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ と任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ について次の式が成り立つことを証明せよ．また，この式の幾何学的意味を説明せよ．

$$\boldsymbol{e}\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}) + \boldsymbol{e} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{e}) = \boldsymbol{a} \tag{7}$$

磁場とローレンツ力

電場 $\boldsymbol{E}$ と**磁場** (magnetic field)（伝統的な呼び方は，磁束密度）$\boldsymbol{B}$ は，電荷 q を持ち速度 $\boldsymbol{v}$ で動いている点電荷に力

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{8}$$

を及ぼすものとして規定される．とくに磁場が及ぼす力 $q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ を**ローレンツ力** (Lorentz force) という．電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ も磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ も，一般には場所と時刻の関数として変動しうる．場所によらない場を**一様な場** (uniform field) といい，時刻によらない場を**定常場** (static field, stationary field) という．

問3．磁場（磁束密度）$\boldsymbol{B}$ の SI 系の単位は T（テスラ）である．$1\,\mathrm{T} = 1\,\mathrm{N\,A^{-1}\,m^{-1}}$ に換算されることを示せ．

問 4. 3 次元空間の直交座標を (x, y, z) とし，電場はゼロとする．このとき以下の問に答えよ．
(i) z 軸方向を向いた一様な磁場 $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ の中を動く電荷 q，質量 m の荷電粒子の運動方程式を立てて，解け．
(ii) 粒子の初速度が $\boldsymbol{v} = (v, 0, 0)$ だった場合には，粒子は等速円運動することを示し，その周期（1 回転するのに要する時間）T を求めよ．
(iii) T は v の大きさによらないことを示せ．

問 5. 電荷 q を持つ粒子が導線に沿って一様な密度で分布しているとする．荷電粒子は導線の単位長さあたり n 個あるとする．また，この粒子は導線に沿って自由に動けるとする．
(i) 荷電粒子が導線に沿っていっせいに同じ速さ v で動いているとすると，この導線には電流

$$I = qnv \tag{9}$$

が流れることを説明せよ．
(ii) 導線は一様な磁場 $\boldsymbol{B}$ の中にあるとする．電流の向きの単位ベクトルを $\boldsymbol{e}$ とすると，直線的な導線の長さ L の区間は力

$$\boldsymbol{F} = IL\,\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{B} \tag{10}$$

を受けることを説明せよ．

アンペールの法則

ローレンツ力は「磁場が電荷にどのように影響するか」を決める法則だが，一方で，「電流がどのような磁場を生成するか」を決める法則もある．それがいまから述べる**アンペールの法則** (Ampère's law) である．それは，任意の向き付けられた曲面 S について関係式

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 \int_S \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}\,dS \tag{11}$$

が成り立つという法則である．定性的に表現すると，**電流の周りには，電流を軸とするような右回りの渦状の磁場ができる**と言える．ここで μ_0 は**真空の透磁率** (permeability in vacuum) と呼ばれる物理定数で，その値は

$$\mu_0 = \begin{cases} 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N\,A^{-2}} & \text{（2018 年まで）} \\ 12.56637\cdots \times 10^{-7}\,\mathrm{N\,A^{-2}} & \text{（2019 年以降）} \end{cases}$$

である．

問 6. 直線に沿って電流 I が流れているとき，磁場の向きを図示せよ．また，直線電流から距離 r 離れた点における磁場の強さは

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{12}$$

に等しいことを示せ．

磁場のガウスの法則

ベクトル場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ に沿って曲線を描くことができるが，そのような曲線を**磁力線** (line of magnetic force) と呼ぶ．磁場の強さはベクトルのノルム $\|\boldsymbol{B}\|$ に比例するが，これと単位面積あたりの磁力線の本数とが比例するように磁力線を描くことにする．磁場 $\boldsymbol{B}$ と，向き付けられた曲面 S に対して

$$\Phi_{\mathrm{m}}(S) := \int_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,dS \tag{13}$$

を曲面 S を貫く**磁束** (magnetic flux) という．SI 単位系における磁束の単位は Wb（ウェーバ）である．

3 次元空間の任意の領域 V に対して次の関係式が成り立つ：

$$\Phi_{\mathrm{m}}(\partial V) = \int_{\partial V} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = 0 \tag{14}$$

これを**磁場のガウスの法則** (Gauss' law of magnetic field) というつまり，任意の**閉曲面**を貫く正味の磁束はつねにゼロである（閉ではない曲面を貫く磁束はゼロではないのが普通である）．

この法則は電場に関するガウスの法則

$$\varPhi_{\mathrm{e}}(\partial V) = \int_{\partial V} \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_V \rho\,dv = Q(V) \tag{15}$$

と対比される．この式は，3 次元領域 V の中の全電荷 $Q(V)$ に等しい分だけの電束が V の表面 ∂V を通って湧き出してくる，ことを表している．言い換えると，**正電荷からは電気力線が湧き出し，負電荷には電気力線が吸い込まれる．**

そうしてみると，磁場のガウスの法則 (14) は，**磁力線は，どこかから湧き出すことはないし，どこかに吸い込まれるもない**ことを意味していることがわかる．電場の湧き出し口としての電荷は存在するが，磁場に対する**磁荷**ないし**磁気単極子** (magnetic monopole) は存在しないのである．

問 7. ソレノイドコイルとは，電流の流れやすい金属をアクリル樹脂などの絶縁体で被覆した導線を円筒状に巻き付けたものである．円筒の半径が a で，長さは非常に長く，単位長さあたりのコイルの巻き回数が N であるソレノイドコイルに電流 I を流している状況を考えて，以下の問に答えよ．

(i) 磁力線の概略図を描け．

(ii) コイルの外では磁場は非常に弱い．なぜか?

(iii) コイルが無限に長い極限では，コイル内の磁場の強さは

$$B = \mu_0 N I \tag{16}$$

に等しいことを示せ．

(iv) 巻き密度 $N = 1000$ 回 m^{-1} のソレノイドコイルに $I = 1\mathrm{A}$ の電流を流したときの磁場（磁束密度）の大きさを求めよ．ちなみに地磁気の強さは，場所や時刻によって異なるが，だいたい 4×10^{-5} T（テスラ） くらいである．

時間変動する電磁場

ここまでは電場も磁場も時間的には変動しない状況を扱ってきた．さらには電場も磁場も時間的に変動する状況を考えるべきで，そのような電磁場の性質・法則を調べることは大いに意味のあることである．時間変化する電磁場の法則は**マクスウェル方程式** (Maxwell's equation) と呼ばれる連立方程式である．残念ながら，この講義はマクスウェル方程式の説明には至らなかった．

マクスウェル方程式の研究から**電磁波** (electromagnetic wave）の存在が 1864 年に理論的に予測され，1887 年に実験で確かめられた．電磁波とは，おおざっぱに言えば，電場と磁場の振動が波動となって空間を伝わる現象である．電波・赤外線・光・紫外線・X 線・ガンマ線は，すべて電磁波である．これらは波長（周波数）が異なっているだけである．

問 8. 電磁波の性質を知り，電磁波を操ることができるようになったおかげで人類はいろいろなことができるようになった．電磁波の恩恵と言える事例を 3 つ挙げよ．

参考文献

[1] 筒井泉「講座：電磁気現象にみる古典と量子の交叉点」パリティ（丸善出版）2018 年 4 月号以降に連載．電磁気学の歴史についての興味深い解説．