ベクトル代数

スカラー量

大きさはあるが，空間的な向きのない量を**スカラー** (scalar) 量という．同種のスカラー量 a, b は足し算 $a+b$ ができるし，任意の実数 λ による実数倍 λa を定めることができる．また，一般にスカラー量は正にも負にもなることができる．質量・電荷・エネルギーなどはスカラー量である．

スカラー量は，単位量の何倍かということで数値表現できる．例えば，質量の単位を kg（キログラム）と定めれば，$M = 50\text{kg}$ というのは,「M はキログラムの 50 倍」という意味である．$1\text{kg} = 1000\text{g}$ なので単位を換えると $M = 50\text{kg} = 50\times 1000\text{g} = 5\times 10^4\text{g}$ と換算できる．なお，$M = 50[\text{kg}]$ のように，単位に括弧 [ ] を付けて書く流儀もあるが，括弧なしに $M = 50\text{kg}$ と書く方がよい．

ベクトル量

大きさと空間的な向きのある量を**ベクトル** (vector) 量という．3 次元空間なら 3 つの単位ベクトル $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\}$ を定めれば，任意のベクトルは 3 つの実数で表現できる．例えば，$\boldsymbol{e}_x$ は東方向の長さ 1m（メートル）のベクトル，$\boldsymbol{e}_y$ は北方向の長さ 1m のベクトル，$\boldsymbol{e}_z$ は高さ方向の長さ 1m のベクトルとする．3 次元空間中の任意の変位ベクトル $\boldsymbol{r}$ は 3 つの実数の組 (r_x, r_y, r_z) を用いて

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= r_x \boldsymbol{e}_x + r_y \boldsymbol{e}_y + r_z \boldsymbol{e}_z \\ &= (\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z) \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1}$$

と表される．このような単位ベクトルの組 $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\}$ を**基底** (basis) ともいう．また，$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ の向きが，互いに「東・北・上」の関係になっている場合，あるいは，右手の 3 本指を互いに直角に伸ばしたときの「親指・人指し指・中指」の関係になっている場合，$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ は**右手系** (right-handed frame) であるという．

いま扱っている基底が明らかな場合は，$(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ を省略して

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \tag{2}$$

と書いてもよい．

ベクトル代数

ベクトルの演算にはスカラー倍・和・内積・ノルム・外積がある．スカラー倍・和・内積・ノルムは何次元空間でも定義できるが，外積は 3 次元空間だけで定義できる．

スカラー量の集合を S，ベクトル量の集合を V とする．以下では，基底 $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ は単位長さ（1m とか 1cm とか）の，互いに直交し，右手系をなすベクトルの組とする．

スカラー倍 (scalar multiplication)：$\lambda \in S$, $\boldsymbol{a} \in V$ に対して

$$\lambda \boldsymbol{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \\ \lambda a_z \end{pmatrix} \in V \tag{3}$$

和 (addition)：$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対して

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix} \in V \tag{4}$$

ベクトルの成分を横に並べて書いてもよいのだが，そうするとベクトルの和は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} &= (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) \\ &= (a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z) \qquad (5)\end{aligned}$$

と書かれる．私は (4) のようにベクトルの成分を縦に並べた書く方がわかりやすいと思う．

内積 (inner product)：$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対して

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= (a_x, a_y, a_z)\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \ \in S \qquad (6)\end{aligned}$$

でスカラーを定める．2 つのベクトルの内積がゼロであることと，ベクトルが直交することは同値である．

ノルム (norm)：$\boldsymbol{a} \in V$ に対して非負の実数

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{a}\| &= \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}} \\ &= \sqrt{(a_x)^2+(a_y)^2+(a_z)^2} \ \in S \qquad (7)\end{aligned}$$

を $\boldsymbol{a}$ のノルムという．

外積 (exterior product)：$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対して

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \in V \qquad (8)$$

を定める．外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の両方に直交し，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の順に右手系をなす．

ヌルベクトル (null vector) 成分がすべて 0 であるベクトル

$$\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V \qquad (9)$$

をヌルベクトルとか零ベクトルと呼ぶ．スカラーの 0 とヌルベクトル $\boldsymbol{0}$ を区別して用いる．

$\boldsymbol{0}$ の特徴として，任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{a} \qquad (10)$$

が成り立つ．また，任意のスカラー λ に対して

$$\lambda\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \qquad (11)$$

が成り立つ．

ベクトル代数の公式：

$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}, \qquad (12)$$

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}, \qquad (13)$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}, \qquad (14)$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}, \qquad (15)$$

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = 0, \qquad (16)$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a}\|^2\,\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2, \qquad (17)$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}, \qquad (18)$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}, \qquad (19)$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}), \qquad (20)$$

$$\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\| \geq |\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|, \qquad (21)$$

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\| \qquad (22)$$

記号

便利な記号としてクロネッカー (Kronecker) のデルタと，レヴィチヴィタ (Levi-Civita) のイプシロンを導入しておく．

クロネッカーのデルタは，整数の添字 i, j を付けられた記号で

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases} \qquad (23)$$

で定義される．

レヴィチヴィタのイプシロンは，3 次元空間に対しては 3 つの添字を持つ記号で

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & ((ijk) \text{ が } (123) \text{ の偶置換のとき}) \\ -1 & ((ijk) \text{ が } (123) \text{ の奇置換のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases} \qquad (24)$$

である．これらの記号を用いると，右手系の規格直交基底 $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ が満たす関係式を

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}, \qquad (25)$$

$$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j = \sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k \qquad (26)$$

と書くことができる．これらの記号を使うと，内積や外積は

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \boldsymbol{e}_i \tag{27}$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i \tag{28}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_i b_j \boldsymbol{e}_k \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{e}_i a_j b_k \end{aligned} \tag{29}$$

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k \tag{30}$$

などと書ける．

問 1. 関係式

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ipq} = \delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{kp} \tag{31}$$

を証明せよ．

問 2. 公式 (12)-(22) を証明せよ．

問 3. 2 次元平面上のベクトル $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y)$ と $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y)$ を辺とする平行四辺形の面積は $a_x b_y - a_y b_x$ に等しいことを証明せよ．

問 4. 3 次元空間中のベクトル $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ と $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$ を辺とする平行四辺形の面積は $\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|$ に等しいことを証明せよ．