いろいろな座標系

三角関数

直角をはさむ二辺の長さが x, y，斜辺の長さが r であるような直角三角形について

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{1}$$

という関係式が成り立つ．(1) を**ピタゴラスの定理**あるいは**三平方の定理**という．長さ x の辺と r の辺ではさまれた角の大きさを θ とする．このとき，

$$\cos\theta := \frac{x}{r}, \quad \sin\theta := \frac{y}{r}, \quad \tan\theta := \frac{y}{x} \tag{2}$$

で三角関数コサイン，サイン，タンジェントを定める．

問 1．ピタゴラスの定理 (1) の証明方法を 3 とおり考えよ．

問 2．これら (2) が三角形の大きさに無関係で，角度 θ だけの関数になっているとどうして言えるのか，説明せよ．

問 3．以下の関係式を証明せよ．

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \tag{3}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \tag{4}$$

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}. \tag{5}$$

問 4．角度の単位としてのラジアン (rad) の定義を説明せよ．

問 5．角度 θ をラジアンの単位で測るとき，以下の関係式が成り立つことを説明せよ：

$$\text{(i)}\ \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \tag{6}$$

$$\text{(ii)}\ \lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta} = 1 \tag{7}$$

平面上の斜交座標

平面上で 2 本の直線 ℓ, m が一点Oで交わっているとする．点 O は直線 ℓ を二つの半直線に分けるが，一方の半直線 ℓ_+ を「正の向き」に選ぶ．残りの半直線 ℓ_- を「負の向き」という．同様に，直線 m が点 O に分けられてできる二つの半直線を m_+ と m_- と名付ける．このように向きを付けた直線 ℓ, m をそれぞれ x 軸，y 軸と呼ぶ．

平面上の任意の点 P に対して，直線 ℓ 上の点 Q と直線 m 上の点 R を，OQPR が平行四辺形になるように定める．点 Q が ℓ_+ 上にあれば，OQ の長さを x の値とし，点 Q が ℓ_- 上にあれば，OQ の長さに負号をつけたものを x の値とする．点 R が m_+ 上にあれば，OR の長さを y の値とし，点 R が m_- 上にあれば，OR の長さに負号をつけたものを y の値とする．このように数の組 (x, y) を与える規則を**ベクトル型斜交座標系**，あるいは，たんに**斜交座標系**という．

平面上の余斜交座標

平面上で 2 本の直線 ℓ, m が一点Oで交わっているとし，先ほどと同様に，直線 ℓ を二つの半直線 ℓ_+，ℓ_- に分け，直線 m を二つの半直線 m_+，m_- に分けて，直線 ℓ, m をそれぞれ x 軸，y 軸と呼ぶ．

平面上の任意の点 P に対して，直線 ℓ 上の点 L と直線 m 上の点 M を，直線 OL と PL が直交し，直線 OM と PM が直交するように定める．点 L が ℓ_+ 上にあれば，OL の長さを x' の値とし，点 L が ℓ_- 上にあれば，OL の長さに負号

をつけたものを x' の値とする．点 M が m_+ 上にあれば，OM の長さを y' の値とし，点 M が m_- 上にあれば，OM の長さに負号をつけたものを y' の値とする．このように数の組 (x', y') を与える規則を**コベクトル型斜交座標系**あるいは**余斜交座標系**という．

とくに 2 直線 ℓ, m が**垂直に交わっていれば**，ベクトル型斜交座標 (x, y) とコベクトル型斜交座標 (x', y') は一致する．この場合の座標系を**直交座標系** (rectangular coordinate system, orthogonal coordinate system) あるいは**デカルト座標系** (Cartesian coordinate system) と呼ぶ．

平面の極座標

平面上に直交座標系を設けてあるとする．任意の点 P の直交座標値 (x, y) に対して関係式

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi \tag{8}$$

によって実数 r と ϕ を定める．このとき

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{9}$$

が成り立つ．$r \geq 0$ を要請すると

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{10}$$

である．実数 ϕ が上の式 (8) を満たすなら，任意の整数 n について ϕ を $\phi + 2\pi n$ で置き換えても (8) が成立する．$0 \leq \phi < 2\pi$ または $-\pi \leq \phi < \pi$ の範囲に ϕ の値を選ぶことが多い．このような数の組 (r, ϕ) を与える規則を 2 次元の**極座標系** (polar coordinate system) という．

問 6．動径長さ r を角度 ϕ の関数 $r(\phi)$ として与えてさまざまな曲線を描くことができる．以下の関数が定める曲線を描け．ただし $e^x = \exp x$ は指数関数．

(i) $r = 2 + \dfrac{1}{2\pi}\phi \ \ (-2\pi \leq \phi \leq 2\pi)$

(ii) $r = e^{\phi} \quad (-\infty \leq \phi \leq +\infty)$

(iii) $r = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}\cos\phi}$

(iv) $r = \dfrac{1}{1 + \cos\phi} \ \ (-\pi < \phi < \pi)$

(v) $r = \dfrac{1}{1 + 2\cos\phi} \ \ (-\dfrac{2}{3}\pi < \phi < \dfrac{2}{3}\pi)$

問 7．放物線座標とはどのようなものか，調べて，説明せよ．

問 8．直角双曲線座標とはどのようなものか，調べて，説明せよ．

空間の直交座標

3 次元空間中で 3 本の直線 ℓ, m, k が一点 O で互いに垂直に交わっているとする．直線 ℓ, m, k は，点 O でそれぞれ二つの半直線 ℓ_+ と ℓ_-, m_+ と m_-, k_+ と k_- に分けられる．この場合，ベクトル型，または，コベクトル型のどちらの方法でも 3 次元の**直交座標系**が定義できる．

円柱座標

3 次元空間内に直交座標系を設けてあるとする．任意の点 P の直交座標値 (x, y, z) に対して関係式

$$x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi, \quad z = z \tag{11}$$

によって実数の組 (ρ, ϕ, z) を定める．このとき

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \tag{12}$$

が成り立つ．通常，$\rho \geq 0$ となる値を選ぶ．このような数の組 (ρ, ϕ, z) を与える規則を**円柱座標系** (cylindrical coordinate system) という．

空間の極座標

3 次元空間内に直交座標系を設けてあるとする．任意の点 P の直交座標値 (x, y, z) に対して関係式

$$x = r \sin\theta \cos\phi, \tag{13}$$
$$y = r \sin\theta \sin\phi, \tag{14}$$
$$z = r \cos\theta \tag{15}$$

によって実数の組 (r, θ, ϕ) を定める．このとき

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \tag{16}$$

が成り立つ．通常，

$$r \geq 0, \tag{17}$$
$$0 \leq \theta \leq \pi, \tag{18}$$
$$0 \leq \phi < 2\pi \text{ または } -\pi \leq \phi < \pi \tag{19}$$

の範囲に座標値を選ぶ．このような数の組 (r, θ, ϕ) を与える規則を 3 次元空間の**極座標系**という．

線要素・面積要素・体積要素

変数 x の無限に小さな変化を dx と書く．平面上の曲線に沿って dx, dy を定めたとき，

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{20}$$

は**長さの要素**と呼ばれる．平面の直交座標系に関して

$$dx\,dy \tag{21}$$

は**面積要素**と呼ばれる．3 次元空間の直交座標系に関して

$$dx\,dy\,dz \tag{22}$$

は**体積要素**と呼ばれる．

平面の極座標に関して

$$dr, \qquad r\,d\phi \tag{23}$$

はそれぞれ**動径方向の線要素**と**角度方向の線要素**と呼ばれる．また，

$$r\,dr\,d\phi \tag{24}$$

は平面の極座標に関する**面積要素**と呼ばれる．

3 次元空間の極座標に関して

$$dr, \qquad r\,d\theta \qquad r\,\sin\theta\,d\phi \tag{25}$$

はどのような**線要素**か考えよ．また，

$$r^2 \sin\theta\,d\theta\,d\phi \tag{26}$$

は**球面の面積要素**と呼ばれる．

$$r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi \tag{27}$$

は**球の体積要素**と呼ばれる．

問 9．関数 $y = f(x)$ で与えられるグラフの長さが

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \tag{28}$$

で与えられることを示せ．

問 10．関数 $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ のグラフの概形を描け．a を正の実数として，変数 x が $0 \leq x \leq a$ の範囲を動くとき，この関数が定めるグラフの長さを求めよ．

問 11．半径 r の円周の長さが

$$\ell = 2\pi r \tag{29}$$

に等しいことを示せ．

問 12．半径 a, 中心角 θ の扇形の面積が

$$S = \frac{1}{2}a^2\theta \tag{30}$$

に等しいことを示せ．

問 13．半径 a の円の面積が

$$S = \pi a^2 \tag{31}$$

に等しいことを示せ.

問 14. 半径 r の球面の面積が

$$S = 4\pi r^2 \tag{32}$$

に等しいことを示せ.

問 15. 半径 a の球の体積が

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3 \tag{33}$$

に等しいことを示せ.

問 16. 底面積S，高さ h の錐体（三角錐や円錐など）の体積は

$$V = \frac{1}{3}Sh \tag{34}$$

に等しいことを証明せよ.

参考文献

[1] 森下四郎「ピタゴラスの定理 100 の証明法—幾何の散歩道」（プレアデス出版）．タイトルどおり，ピタゴラスの定理を 100 とおりのやり方で証明しています.

[2] 和達三樹「物理のための数学」物理入門コース（岩波書店）．昔からある本ですが，物理学や工学で使う数学の基本の相当部分が，これ一冊でカバーされています.

[3] 千葉逸人「これならわかる工学部で学ぶ数学」（プレアデス出版）．評判はいろいろあるようですが，良い本だと思います.