クーロンの法則を用いて電場を求める

クーロン法則と重ね合わせ原理

ある地点 $\boldsymbol{r}$ に電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ があり，そこに点電荷 q が静止していれば，この電荷は力

$$\boldsymbol{F} = q\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \tag{1}$$

を受ける，というのが**電場の定義**であった．

クーロンの法則によれば，点電荷 Q_1 が位置 $\boldsymbol{r}_1$ に静止している場合，位置 $\boldsymbol{r}$ には電場

$$\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0\,\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1\|^2}\,\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1\|} \tag{2}$$

ができる．

また，**重ね合わせの原理**によれば，ある電荷分布 Ω_1 が作る電場を $\boldsymbol{E}_1$, 別の電荷分布 Ω_2 が作る電場を $\boldsymbol{E}_2$ とすると，電荷分布 Ω_1 と Ω_2 が共存しているときにできる電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}) \tag{3}$$

に等しい．

クーロンの法則と重ね合わせの原理を組み合わせると，さまざまな電荷分布に対して電場を求められる．

ベクトル場の図と電気力線

ベクトル場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は空間の各点 $\boldsymbol{r}$ にベクトル $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を定めるものであり，空間中に矢印を散りばめた図で表現される．しかし，紙面では 3 次元のベクトル場を表現するのは難しいし，現実にはすべての点についてベクトルを描き尽くすことはできない．点電荷が作る電場については，距離が 10 分の 1 に近づけば電場の大きさは 100 倍になるので，ベクトルの大きさを忠実に表現すると，かえって図が見にくくなる．そこで，平面上にまばらなベクトルを描いて，だいたいの様子を表示することが多い．それでも，電荷分布の近くや遠くで電場がどのようになっているのか特徴を捉えるような図を描くことが望ましい．

各地点の電場ベクトルの方向に沿う曲線を無数に描くことができるが，このような曲線を数学では**ベクトル場の積分曲線**と言い、物理学では**電気力線** (line of electric force, electrical flux line) と言う．

点電荷が作る電場

点電荷 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ がそれぞれ位置 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n$ に静止しているときに位置 $\boldsymbol{r}$ にできる電場は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r}) \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i\|^2}\,\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i\|} \qquad (4)\end{aligned}$$

に等しい．

問 1．平面の直交座標を (x, y) とする．点 $(0, a)$ と点 $(0, -a)$ に電荷 Q があるときの電場 $\boldsymbol{E} = (E_x, E_y)$ を (x, y) の関数として求め，電場ベクトルの様子を図に描け．電気力線もなるべくたくさん描け．また，x 軸上で電場が最も強い場所を求めよ．

電場の計算式を書くときは，(4) 式で $\boldsymbol{r} = (x, y)$, $\boldsymbol{r}_1 = (0, a)$, $Q_1 = Q$, $\boldsymbol{r}_1 = (0, -a)$,

$Q_2 = Q$, とおいて

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{Q_1}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1\|^3}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1) + \frac{Q_2}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2\|^3}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2)\right.$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{Q}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1\|^3}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}\right) + \frac{Q}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2\|^3}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix}\right)\right.$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{Q}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1\|^3}\begin{pmatrix} x \\ y-a \end{pmatrix} + \frac{Q}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2\|^3}\begin{pmatrix} x \\ y+a \end{pmatrix}\right.$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{Q}{(x^2+(y-a)^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} x \\ y-a \end{pmatrix} + \frac{Q}{(x^2+(y+a)^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} x \\ y+a \end{pmatrix}\right. \quad (5)$$

のようにベクトルの成分を縦に並べた式を書いておいてから，各成分の式

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{x}{(x^2+(y-a)^2)^{3/2}} + \frac{x}{(x^2+(y+a)^2)^{3/2}}\right\},$$
$$E_y = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{y-a}{(x^2+(y-a)^2)^{3/2}} + \frac{y+a}{(x^2+(y+a)^2)^{3/2}}\right\} \quad (6)$$

を書くと，いま自分が何を計算しているのか見失わずに済む．x 軸上の点は $y=0$ の点である．

問 2．3 次元空間の直交座標を (x,y,z) とする．点 $(0,0,a)$ に電荷 Q があり，点 $(0,0,-a)$ に電荷 $-Q$ があるときの電場 $\boldsymbol{E}=(E_x,E_y,E_z)$ を (x,y,z) の関数として求めよ．また，電場ベクトルと電気力線の概要を図示せよ．

問 3．話を簡単にするため，3 次元空間のうち $z=0$ で与えられる平面上の電場を求めることにする．平面の座標を (x,y) とする．点 $(a,0)$ と $(-a,0)$ に電荷 Q があり，点 $(0,a)$ と $(0,-a)$ に電荷 $-Q$ があるときの電場 $\boldsymbol{E}=(E_x,E_y)$ を (x,y) の関数として求めよ．また，電場の強さが 0 になる場所を求めよ．電場ベクトルと電気力線の概要を図示せよ．

線電荷が作る電場

1 次元的な曲線に沿って電荷が分布しているものを線電荷という．電荷の分布には濃淡がありえるので，**曲線の単位長さあたりの電荷量** λ を考えるのが便利である．この λ は (電荷) × (長さ)$^{-1}$ の次元を持ち，その単位は $\mathrm{C\,m^{-1}}$ である．長さ $d\ell$ の微小な曲線の断片（線要素という）にある電荷は

$$dQ = \lambda\, d\ell \quad (7)$$

である．曲線 C 上の点 $\boldsymbol{r}'$ の**電荷線密度**を $\lambda(\boldsymbol{r}')$ とすると，位置 $\boldsymbol{r}$ にできる電場は (4) の自然な拡張として

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_C \frac{dQ(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_C \frac{\lambda(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}d\ell' \quad (8)$$

に等しい．

例題：平面の直交座標 (x,y) において，点 $(-a,0)$ と $(a,0)$ を両端とする線分上に一定の線密度 λ の電荷が分布しているとき，点 $(0,h)$ にできる電場を求めよ．

答：微小な線要素 dx に載っている電荷は $dQ=\lambda\,dx$ である．この場合，(8) 式は

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot \int_{-a}^{a}\frac{\lambda\,dx}{\|(0,h)-(x,0)\|^3}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{\lambda\,dx}{(x^2+h^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} -x \\ h \end{pmatrix} \quad (9)$$

となる．成分 E_x の式

$$
\begin{aligned}
E_x &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{-\lambda\,x\,dx}{(x^2+h^2)^{3/2}} \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{10}
$$

は奇関数の対称な積分なので 0 になる．E_y の式は

$$
E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{\lambda\,h\,dx}{(x^2+h^2)^{3/2}} \tag{11}
$$

となるが，積分を計算するために $x = h\tan\theta$ と変数変換し，$a = h\tan\alpha$ とおけば，

$$
dx = \frac{dx}{d\theta}\,d\theta = \frac{h}{\cos^2\theta}\,d\theta \tag{12}
$$

$$
x^2+h^2 = h^2(\tan^2\theta+1) = \frac{h^2}{\cos^2\theta} \tag{13}
$$

$$
(x^2+h^2)^{-3/2} = \frac{\cos^3\theta}{h^3} \tag{14}
$$

だから，

$$
\begin{aligned}
E_y &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{\lambda\,h\,dx}{(x^2+h^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{1}{h}\,\cos\theta\,d\theta \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 h}\cdot 2\sin\alpha \\
&= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 h}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}} \quad \blacksquare
\end{aligned}
\tag{15}
$$

問 4．上の例題で，$a \to \infty$ とした場合の電場を求めよ．

問 5．上の例題で，任意の点 (x, y) における電場 (E_x, E_y) を求めよ．

問 6．上の例題の状況では線分上の全電荷 $Q = 2a\lambda$ だが，このことを使って解答 (8) の式から λ を消去せよ．さらに，$a \to 0$ の極限における電場 E_y を求めよ．

問 7．平面の直交座標 (x, y) において，点 $(-a, 0)$ と $(a, 0)$ を両端とする線分上に一定の線密度 λ の電荷が分布しているとき，点 $(h, 0)$ にできる電場を求めよ．また，$Q = 2a\lambda$ とおいて電場の式から λ を消去せよ．

例題：空間座標を (x, y, z) として，$z = 0$ の平面上に，原点 $(0, 0, 0)$ を中心とする半径 r の円周があるとする．この円周上に一定の線密度 λ で電荷が分布しているとき，点 $(0, 0, h)$ にできる電場を求めよ．

答：対称性から $E_x = E_y = 0$ は明らか．平面極座標 $x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi$ を用いると，微小角 $d\phi$ に対する微小円弧上の電荷が $dQ = \lambda r\,d\phi$ であることに注意すると，

$$
\begin{aligned}
E_z &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dQ}{(r^2+h^2)}\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{\lambda\,h\,r\,d\phi}{(r^2+h^2)^{3/2}} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,h\,r\,2\pi}{(r^2+h^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\lambda\,h\,r}{2\varepsilon_0(r^2+h^2)^{3/2}} \quad \blacksquare
\end{aligned}
\tag{16}
$$

問 8．円周の全電荷が $Q = 2\pi r\lambda$ であることから，電場の式 (17) を λ の代わりに Q で表すと

$$
E_z = \frac{hQ}{4\pi\varepsilon_0(r^2+h^2)^{3/2}} \tag{17}
$$

となることを確認せよ．また，h と E_z の関係をグラフで表せ．E_z が最大となるような h と E_z の最大値を求めよ．

面電荷が作る電場

2 次元的な曲面上に電荷が分布しているものを面電荷という．電荷の分布には濃淡がありえるので，**曲面の単位面積あたりの電荷量** σ を考えるのが便利である．**電荷面密度** σ は (電荷) $\times$ (長さ)$^{-2}$ の次元を持ち，その単位は $\mathrm{C\,m^{-2}}$ である．面積 dA の微小な曲面の断片（面積要素という）にある電荷は $dQ = \sigma\,dA$ である．曲

面 S 上の点 $\boldsymbol{r}'$ に電荷面密度 $\sigma(\boldsymbol{r}')$ の電荷が分布しているとき，位置 $\boldsymbol{r}$ にできる電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^2}\,\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}dA' \tag{18}$$

に等しい．

例題：空間直交座標を (x, y, z) として，$z = 0$ の平面上に，原点 $(0, 0, 0)$ を中心とする半径 a の円板があるとする．この円板上に一定の面密度 σ で電荷が分布しているとき，点 $(0, 0, h)$ にできる電場を求めよ．

答：対称性から $E_x = E_y = 0$ は明らか．円板を無限に細い環に分割して，それぞれの環が作る電場を積分（総和）して電場を求める．前の例題で求めた，環が作る電場の式 (17) で環が持っている電荷 Q を $dQ = \sigma\cdot 2\pi r\,dr$ で置き換えて，環の半径について積分すればよい：

$$\begin{aligned} E_z &= \int_0^a \frac{h\cdot\sigma\cdot 2\pi r\,dr}{4\pi\varepsilon_0(r^2+h^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\sigma h}{2\varepsilon_0}\int_0^a \frac{r}{(r^2+h^2)^{3/2}}\,dr \\ &= \frac{\sigma h}{2\varepsilon_0}\Big(-\frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}+\frac{1}{h}\Big) \quad \blacksquare \end{aligned} \tag{19}$$

また，円板全体の電荷を $Q = \sigma\cdot\pi a^2$ とおけば

$$E_z = \frac{Qh}{2\pi\varepsilon_0\,a^2}\Big(-\frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}+\frac{1}{h}\Big) \tag{20}$$

となる．

問 9．上の例題の結果 (19) で，円板の半径 $a\to\infty$ とした場合の電場 E_z を求めよ．

問 10．$0 < a < b$ として，$z = 0$ の平面上に原点 $(0, 0, 0)$ を中心として，半径 a の円周と半径 b の円周にはさまれた環状の図形の表面に一定の面密度 σ で電荷が分布しているとする．このとき点 $(0, 0, h)$ における電場を求めよ．

例題：空間座標を (x, y, z) として，原点 $(0, 0, 0)$ を中心とする半径 r の球面上に一定の面密度 σ で電荷が分布しているとき，点 $(0, 0, h)$ にできる電場を求めよ．ただし，$h > r$ とする．

答：対称性から $E_x = E_y = 0$ は明らか．球面極座標を導入し，角度 θ を刻むことによって球面を細い円環に分割すると，それぞれの環は電荷

$$dQ = \sigma\cdot 2\pi r\sin\theta\cdot r\,d\theta \tag{21}$$

を持っている．球面上の点の直交座標を (x, y, z) とすると，円周電荷が作る電場の式 (17) は，いまの場合，

$$\begin{aligned} dE_z &= \frac{(h-z)\,dQ}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+(h-z)^2)^{3/2}} \\ &= \frac{(h-z)\,dQ}{4\pi\varepsilon_0(r^2-z^2+(h-z)^2)^{3/2}} \end{aligned} \tag{22}$$

で置き換えられ，求めるべき電場は

$$E_z = \int_0^\pi \frac{(h-z)\,\sigma\cdot 2\pi r^2\sin\theta\,d\theta}{4\pi\varepsilon_0\{r^2-z^2+(h-z)^2\}^{3/2}} \tag{23}$$

である．変数変換

$$z = r\cos\theta, \tag{24}$$

$$dz = \frac{dz}{d\theta}\,d\theta = -r\sin\theta\,d\theta \tag{25}$$

を施すと，(23) は

$$E_z = -\frac{\sigma r}{2\varepsilon_0}\int_r^{-r}\frac{(h-z)}{(h^2+r^2-2hz)^{3/2}}\,dz \tag{26}$$

となる．さらに変数変換

$$t = (h^2+r^2-2hz)^{1/2} \tag{27}$$

によって積分変数を z から t に換えると，

$$\begin{aligned} t^2 &= h^2+r^2-2hz \\ z &= \frac{h^2+r^2-t^2}{2h} \\ dz &= \frac{dz}{dt}\,dt = -\frac{1}{h}\,t\,dt \\ h-z &= h-\frac{h^2+r^2-t^2}{2h} = \frac{h^2-r^2+t^2}{2h} \end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{aligned}
E_z &= -\frac{\sigma r}{2\varepsilon_0}\int_r^{-r}\frac{(h-z)}{(h^2+r^2-2hz)^{3/2}}\,dz \\
&= \frac{\sigma r}{2\varepsilon_0}\int_{z=r}^{z=-r}\frac{h^2-r^2+t^2}{2h}\cdot\frac{1}{t^3}\cdot\frac{1}{h}\,t\,dt \\
&= \frac{\sigma r}{4\varepsilon_0 h^2}\int_{z=r}^{z=-r}\frac{h^2-r^2+t^2}{t^2}\,dt \\
&= \frac{\sigma r}{4\varepsilon_0 h^2}\int_{z=r}^{z=-r}\Big(\frac{h^2-r^2}{t^2}+1\Big)dt \qquad (28)
\end{aligned}$$

を得る．$z=-r$ のとき $t=(h^2+r^2+2hr)^{1/2}=h+r$ であり，$z=r$ のとき $t=(h^2+r^2-2hr)^{1/2}=|h-r|$ となる．$h>r$ を仮定すると $|h-r|=h-r$ となることに注意して定積分を求めると，

$$\begin{aligned}
E_z &= \frac{\sigma r}{4\varepsilon_0 h^2}\Big[-\frac{h^2-r^2}{t}+t\Big]_{t=|h-r|}^{t=h+r} \\
&= \frac{\sigma r}{4\varepsilon_0 h^2}\Big\{-\frac{h^2-r^2}{h+r}+(h+r) \\
&\qquad +\frac{h^2-r^2}{|h-r|}-|h-r|\Big\} \\
&= \frac{\sigma r}{4\varepsilon_0 h^2}\Big\{-(h-r)+(h+r) \\
&\qquad +(h+r)-(h-r)\Big\} \\
&= \frac{\sigma r}{4\varepsilon_0 h^2}\cdot(2r+2r) \\
&= \frac{4\pi r^2\sigma}{4\pi\varepsilon_0 h^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 h^2} \qquad (29)
\end{aligned}$$

となる．ここで改めて球面の全電荷を $Q=4\pi r^2\sigma$ とおいた．この式は，球面電荷を，原点の点電荷 Q で置き換えたときの電場に等しい ■

問 11．空間座標を (x,y,z) として，原点 $(0,0,0)$ を中心とする半径 r の球面上に一定の面密度 σ で電荷が分布しているとき，点 $(0,0,h)$ にできる電場を求めよ．ただし，$h<r$ とする．式 (28) までの計算結果は利用してよい．

問 12．上の問題のように半径 r の球面があるとき，微小な長さ dz に対し，高さ z と $z+dz$ の 2 平面にはさまれた球面の一部分の面積は

$$dA = 2\pi r\,dz \qquad (30)$$

に等しいことを示せ．

問 13．変数 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ として，関数 $\rho=f(z)$ で形が決まる回転体があったとき，$z=z_1$ から $z=z_2$ までの回転体の側面積は

$$A = 2\pi\int_{z_1}^{z_2} f(z)\sqrt{1+\left(\frac{df}{dz}\right)^2}\,dz \qquad (31)$$

で与えられることを示せ．

空間電荷が作る電場

3 次元空間に電荷が分布しているものを空間電荷という．電荷の分布には濃淡がありえるので，**単位体積あたりの電荷量** ρ を考えるのが便利である．**電荷体積面密度**（たんに**電荷密度**ということが多い）ρ は (電荷)$\times$(長さ)$^{-3}$ の次元を持ち，その単位は $\mathrm{C\,m^{-3}}$ である．体積 dv の微小な体積の断片（体積要素という）にある電荷は $dQ=\rho\,dv$ である．空間領域 V 中に電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r}')$ で電荷が分布しているとき，位置 $\boldsymbol{r}$ にできる電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^2}\,\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}dv' \qquad (32)$$

に等しい．

問 14．空間座標を (x,y,z) として，原点 $(0,0,0)$ を中心とする半径 a の球体内部に一定の体積密度 ρ で電荷が分布しているとき，点 $(0,0,h)$ にできる電場を求めよ．ただし，$h>a$ の場合と $h<a$ の場合を分けて答えよ．