電場のガウスの法則

電気力線の本数としての電束

空間の各点のベクトル場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ に沿う曲線を**電気力線** (line of electric force, electrical flux line) と呼ぶ．数学的には，電気力線は無数に描くことができる．

電場の強さを，電場ベクトル $\boldsymbol{E}$ の大きさで表現するのではなく，**電気力線の密集度**で表現することもできる．つまり，**単位面積を通過する電気力線の本数が，電場の強さに比例するように電気力線を描くことにする．**

以下に説明するように，電気力線の総本数（電気力線の束（たば））に相当する概念が**電束** (electric flux) であり，単位面積あたりの電気力線の本数に相当する概念が**電束密度** (electric flux density) である．

電気力線の本数をどう数えたらよいか考えるためにクーロンの法則に立ち帰ろう．原点に電荷 Q があるとき，原点から距離 r 離れた点での電場の強さ（大きさ）は

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2} \tag{1}$$

であった．いま，原点を中心とする半径 r の球面を考えると，電場は球面を垂直に貫いており，電場の強さは球面上で一定である．球の表面積は $S = 4\pi r^2$ である．**単位面積あたりの電気力線の本数は電場の強さに比例する**と仮定すると，球面全体を貫く電気力線の総本数は

$$E(r)\cdot S = E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{2}$$

に比例する．注目すべきは，(i) この値は距離 r に依らないことと，(ii) 電荷 Q に比例することである．つまり，電荷から湧き出す電気力線の総本数は電荷の量 Q に比例し，その総数は電荷からの距離に依らず一定，つまり，**電荷のないところで電気力線が湧き出したり途切れたりすることはない．**そこで，いっそのこと両辺に真空の誘電率 ε_0 を掛けて，

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \varepsilon_0 E(r)\cdot S = Q \tag{3}$$

を電気力線の総本数，すなわち電束と定める．従って，電束の単位は，電荷の単位と同じ C（クーロン）である．言い換えると，**+1 クーロンの電荷からは 1 クーロンの電束が湧き出す．**ベクトルの向きに注意すると，**−1 クーロンの電荷からは 1 クーロンの電束が吸い込まれる**と言える．

一般の場合

前節では点電荷が作り出すクーロン電場の電束を調べたが，次に，一般の電場の電束を調べよう．

3 次元空間中の曲面（平面でもよい）に裏・表を定めたとき，曲面に始点を持ち，曲面に垂直で，裏から表に突き抜ける向きのベクトルを**法線ベクトル** (normal vector) という．とくにノルム（大きさ）が 1 の法線ベクトルを**単位法線ベクトル**という．

面積 S の平らで小さな図形（三角形や長方形，平行四辺形，台形，円板など）の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を定めたとき，ベクトル

$$\boldsymbol{S} = S\boldsymbol{n} \tag{4}$$

を**向き付けられた面積**という．$\boldsymbol{S}$ は長さの 2 乗

の次元を持つ．一様な電場 $\boldsymbol{E}$ があれば，

$$\Phi_{\mathrm{e}} := \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{S} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} S \tag{5}$$

で面 $\boldsymbol{S}$ を貫く**電束**を定める．電束は電荷と同じ物理次元を持ち，電束の単位は C（クーロン）である．

電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ が場所 $\boldsymbol{r}$ ごとに変化する場合，

$$\boldsymbol{D} := \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \tag{6}$$

もまたベクトル場になるが，$\boldsymbol{D}$ を**電束密度**という．電束密度の単位は $\mathrm{C\,m^{-2}}$ である．

問 1．流量の面積密度という考え方に慣れるために次の問題を考えよう．太陽は，あらゆる方向にほぼまんべんなく，時間的にもほぼ一定の割合でエネルギーを放出している（太陽の表面でときどき局所的な爆発現象も起こるので，多少は方向に依存した変化も起きている）．地球に届くエネルギーの流れの密度は，$1370\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$ である．ここで W（ワット）は仕事率の単位であり，$\mathrm{W = J{\cdot}s^{-1}}$ に等しい．太陽と地球の距離が約 1 億 5 千万 km であることから，太陽が単位時間あたりに放射するエネルギーをワットの単位で求めよ．大型の火力発電所の発電量は 100 万 kW（キロワット）程度であるが，エネルギー源としての太陽は火力発電所の何倍に相当するか．

問 2．地球の北半球では北極に近づくほど寒くなる．それはなぜか，説明せよ．また，地球上では 1 年間で夏と冬という季節変化があるのはなぜか説明せよ．

面積分と体積積分

キーワード：曲面，閉曲面，曲面の法線ベクトル，向き付け可能な曲面，向き付け不可能な曲面，面積要素，立体領域，体積要素，立体領域の境界面，面積分，体積積分．

ベクトル場の面積分 (surface integral)：向き付けられた曲面 S を貫くベクトル場 $\boldsymbol{D}$ の面積分を

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}\,dS &= \int_S (D_x dydz + D_y dzdx + D_z dxdy) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}_i)\cdot\boldsymbol{n}_i\,\Delta S_i \end{aligned} \tag{7}$$

と定める．ただし，向き付けられた曲面とは，表裏が定まっていて，曲面上の各点で裏から表に向かう単位長さの法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を連続的に定めることができる曲面である．右辺において，曲面を N 個の小さな要素に分割し，各要素の面積を ΔS_i とし，各面要素の法線ベクトルを $\boldsymbol{n}_i$ としている．

電束密度 $\boldsymbol{D}$ と，向き付けられた曲面 S に対して

$$\Phi_{\mathrm{e}}(S) := \int_S \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n}\,dS \tag{8}$$

を曲面 S を貫く**電束**という．直観的には，面積分は，ベクトル場 $\boldsymbol{D}$ で流れている流体があったとして，曲面 S の裏から表に向かって通り抜ける流体の正味の総量を表している．$\boldsymbol{D}$ が曲面 S の裏から表に貫いていれば通過量はプラス，表から裏に貫いていれば通過量はマイナスである．

スカラー場の体積積分 (volume integral)：3 次元領域 V におけるスカラー場 ρ の体積積分を

$$\begin{aligned}\int_V \rho\,dv &= \int_V \rho\,dxdydz \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \rho(\boldsymbol{r}_i)\Delta V_i \end{aligned} \tag{9}$$

と定める．

問 3．電荷密度が原点からの距離 r だけの関数 $\rho(r)$ で表されるとき，半径 a の球体内の電荷は

$$Q = 4\pi \int_0^a \rho(r)\,r^2\,dr \tag{10}$$

に等しいことを示せ．

クーロンの法則の復習

クーロンの法則と重ね合わせの原理を合わせると，次のことが言えた．点電荷 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ がそれぞれ位置 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n$ にあったとき，位置 $\boldsymbol{r}$ にできる電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i\|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i\|} \tag{11}$$

であった．また，領域 V に電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r}')$ で電荷が分布しているとき位置 $\boldsymbol{r}$ にできる電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\|}dv' \tag{12}$$

であった．

ガウスの法則

3 次元空間の任意の領域 V に対して次の関係式が成り立つ：

$$\varepsilon_0\int_{\partial V}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_V \rho\,dv \tag{13}$$

これを**電場のガウスの法則** (Gauss' law of electric field) というここで ∂V は V の境界面に内側から外側に向けて向きを付けた閉曲面である．**(13) は，領域 V の表面を貫く正味の電束は，領域 V の中に入っている電荷の総量に等しい**ことを意味する．電束を「電気力線の本数」と解釈すると，**電気力線はプラスの電荷から湧き出し，マイナスの電荷に吸い込まれる．電荷のない場所では電気力線は増えも減りもしない**と言える．

注意すべきポイントとして，**クーロンの法則 (11) や (12) は電場の源となる電荷が動いているときは成り立たないが，ガウスの法則 (13) は電荷が動いているときもそのまま成り立つ．**

ガウスの法則 (13) は，クーロンの法則と重ね合わせの原理から証明できる．この証明の過程で**立体角** (solid angle) という概念が助けになる．

クーロンの法則を言い換えた補助法則：向き付けられた曲面 S を点電荷 Q から見込む立体角を ω とすると，点電荷 Q から発して S を貫く電束は

$$\Phi_{\mathrm{e}}(S) = \varepsilon_0\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \frac{\omega}{4\pi}Q \tag{14}$$

に等しい．とくに曲面 S_1 が点電荷 Q を 1 回包む閉曲面になっている場合は S_1 を貫く電束は

$$\Phi_{\mathrm{e}}(S_1) = \frac{4\pi}{4\pi}Q = Q \tag{15}$$

に等しい．閉曲面 S_2 の中に点電荷 Q がない場合は S_2 を貫く電束は

$$\Phi_{\mathrm{e}}(S_2) = 0 \tag{16}$$

となる．

問 4. 立体角の定義を説明せよ．

問 5. 補助法則 (14), (15), (16), およびガウスの法則 (13) を証明せよ．

対称性

対称性という概念を定義する．A という対象（もの・図形など）に R という操作・変換を施した結果を $A' = R(A)$ と書く．一般には A と A' は一致しないが，$A = A'$ である場合，**対象 A は操作 R に関して対称性 (symmetry) を持つ**，とか，**R の下で不変 (invariant) である**，と言う．図形に関する対称性としては，並進（平行移動）・回転・鏡映などがある．

問 6. 以下の図形の対称性を述べよ．
(1) 二等辺三角形，(2) 正三角形，(3) 平行四辺形，(4) 長方形，(5) 菱形，(6) 正方形，(7) 正六角形，(8) 正四面体，(9) 正六面体，(10) 円，(11) 球面，(12) 直線，(13) 平面．

対称性と電場

クーロンの法則やガウスの法則は，電荷が作る電場を決める．電荷が対称性を持っていると，電場にも同種の対称性が現れる．そのことを利用すると，電場のありようをある程度限定して，電場を簡単に求めることができる．

以前にクーロンの法則を使って計算した問題を，ガウスの法則を使って計算してみよう．

無限直線電荷．平面電荷．球殻電荷．二重球殻電荷．球体一様電荷など．

問 7. 次の電荷分布の対称性を述べよ．それぞれの場合の電場の向きを述べ，電場の大きさを式で表せ．

(1) 無限に広い平面上に一定の面密度 σ で分布している電荷．

(2) 半径 a の球殻表面に一定の面密度 σ で分布している電荷．中心からの距離 r における電場の大きさ $E(r)$ を求めて，グラフも描け．$r > a$ の場合と $r < a$ の場合を分けて考えるとよい．

(3) 半径 a の球体内部に一定の密度 ρ で分布している電荷．中心からの距離 r における電場の大きさ $E(r)$ を求めて，グラフも描け．