静電場の保存力の法則と電位の定義

線積分

キーワード：曲線，閉曲線，曲線の向きづけ，線要素，線積分．

3 次元空間中の**曲線** (curve) C とは，実数変数 s に対して点 $\boldsymbol{r}(s)$ を定める連続関数である．変数 s の変域を $a \le s \le b$ とするとき，点 $\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}_0$ を曲線の**始点**，点 $\boldsymbol{r}(b) = \boldsymbol{r}_1$ を曲線の**終点**という．また，変数 s の値が増えるときに点 $\boldsymbol{r}(s)$ が動く方向を曲線 C の**向き**という．とくに始点と終点が一致している曲線を**閉曲線** (closed cuerve, loop) という．

向き付けられた曲線 C に沿ってのベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の**線積分** (line integral) を

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_C (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_i)\cdot\Delta\boldsymbol{r}_i \qquad (1)\end{aligned}$$

で定める．ただし，変数 s の変域 $a \le s \le b$ を N 個の区間に分割し

$$\begin{aligned}a = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_i < s_{i+1} < \cdots \\ \cdots < s_{N-1} < s_N = b \qquad (2)\end{aligned}$$

とおいて，曲線の分割点 $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}(s_i)$ を定めて，微小変位ベクトル $\Delta\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_{i+1} - \boldsymbol{r}_i$ を定めた．$N \to \infty$ という極限は $|s_{i+1} - s_i| \to 0$ も意味する．また，曲線 C を積分経路ともいう．

線積分の値は

$$\begin{aligned}&\int_a^b \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(s))\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\,ds \\ =\ &\int_a^b \Big(A_x\frac{dx}{ds} + A_y\frac{dy}{ds} + A_z\frac{dz}{ds}\Big)ds \qquad (3)\end{aligned}$$

で計算できる．あるいは，計算しなくても，幾何学的考察によってすぐに答えを出せる問題もある．また，とくに曲線 L が閉曲線である場合，線積分を

$$\oint_L \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} \qquad (4)$$

と書くこともある．曲線 C_1 の終点が曲線 C_2 の始点になっている場合，C_1 に C_2 を連結した曲線 C_3 を定めることができる．このとき，

$$\int_{C_1} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_3} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} \qquad (5)$$

が成り立つ．また

$$\bar{\boldsymbol{r}}(s) := \boldsymbol{r}(b + a - s) \qquad (6)$$

とおくと，これは曲線 C を逆方向になぞる曲線 $-C$ を定める．このとき

$$\int_{-C} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} \qquad (7)$$

が成り立つ．

例題．直交座標 (x, y) を持つ平面において，点 (0,0) を始点，点 (1,0) を終点とする線分 C_1，点 (1,0) を始点，点 (1,2) を終点とする線分 C_2，点 (0,0) を始点，点 (1,2) を終点とする線分 C_3，点 (0,0) を中心とする半径 1 の円弧で点 (1,0) を始点とし中心角が直角で点 (0,1) を終点とする曲線 C_4 のそれぞれについてベクトル場 $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y) = (-xy, x^2)$ の線積分 $\int_{C_i} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ の値を求めよ．また，$\int_{C_1} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ と $\int_{C_3} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ の値を比べよ．

問 1．直交座標 (x, y) を持つ平面上のベクトル場 $\boldsymbol{A} = (x, y)$ と $\boldsymbol{B} = (-y, x)$ の図を描け．

問 2. 上のベクトル場 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ について，以下の経路 C_i に沿う線積分 $\int_{C_i} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ および $\int_{C_i} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{r}$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ の値をそれぞれ求めよ．ただし a, b を正の実数とする．

C_1 は $(0, 0)$ を始点とし $(a, 0)$ を終点とする線分.
C_2 は $(a, 0)$ を始点とし (a, b) を終点とする線分.
C_3 は (a, b) を始点とし $(0, b)$ を終点とする線分.
C_4 は $(0, b)$ を始点とし $(0, 0)$ を終点とする線分.
C_5 は4つの頂点 $(0, 0), (a, 0), (a, b), (0, b)$ を順に巡る長方形.
C_6 は点 $(a, 0)$ を始点とし中心角が直角で点 $(0, a)$ を終点とする円弧.

問 3. 3 次元ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ の長さを $r = \|\boldsymbol{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする．任意の関数 $x(s)$，$y(s)$，$z(s)$ について関係式

$$r\frac{dr}{ds} = x\frac{dx}{ds} + y\frac{dy}{ds} + z\frac{dz}{ds} \tag{8}$$

が成り立つことを示せ.（ヒント：

$$r\frac{dr}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}r^2 \tag{9}$$

に $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ を入れて計算するとよい.）
関係式 (8) は

$$r\,dr = x\,dx + y\,dy + z\,dz = \boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r} \tag{10}$$

とも書かれる．

問 4. ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ が

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = f(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{11}$$

という関数形になっているとき，$\boldsymbol{F}$ は**中心力場** (central force field) だという．つまり，中心力場とは，動径ベクトル方向を向いており，大きさが原点からの距離だけに依存するベクトル場である．中心力場 $\boldsymbol{F}$ について以下の問に答えよ．

(1) 任意の 2 点 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$ について $\|\boldsymbol{r}_1\| = R_1$，$\|\boldsymbol{r}_2\| = R_2$ とおく．点 $\boldsymbol{r}_1$ を始点，点 $\boldsymbol{r}_2$ を終点とする任意の曲線 C に対して

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{R_1}^{R_2} f(r)\,dr \tag{12}$$

が成り立つことを証明せよ．

(2) 点 $\boldsymbol{r}_1$ を始点，点 $\boldsymbol{r}_2$ を終点とする任意の 2 本の曲線 C_1, C_2 に対して

$$\int_{C_1} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_2} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} \tag{13}$$

が成り立つことを証明せよ．

(3) 中心力場 $\boldsymbol{F}$ の，任意の閉曲線 L に沿っての線積分は

$$\oint_L \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = 0 \tag{14}$$

となることを証明せよ．

問 5. 点電荷 Q による電場 $\boldsymbol{E}$ は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{15}$$

という関数で表される．任意の点 $\boldsymbol{r}_1$ を始点，$\boldsymbol{r}_2$ を終点とする任意の曲線 C について

$$\int_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{Q}{\|\boldsymbol{r}_2\|} + \frac{Q}{\|\boldsymbol{r}_1\|} \tag{16}$$

が成り立つことを示せ．

クーロンの法則の復習

クーロンの法則と重ね合わせの原理を合わせると，次のことが言えた．点電荷 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ がそれぞれ位置 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n$ にあったとき，位置 $\boldsymbol{r}$ にできる電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i\|^2}\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i}{\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i\|} \tag{17}$$

であった．また，電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ で電荷が分布しているとき位置 $\boldsymbol{r}$ にできる電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\|^2}\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\|}dv' \tag{18}$$

であった．

保存力の法則

任意の静電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ において，空間中の任意の閉曲線 L に対して

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = 0 \tag{19}$$

が成り立つ．これを**保存力の法則**という．ガウスの法則もそうだったが，保存力の法則もクーロンの法則と重ね合わせの原理から証明できる．

保存力の法則 (19) は，**静電場が電荷に対してする仕事では，無限に仕事を取り出せない**ことを意味する．エネルギー保存則,（第 1 種の）永久機関が存在しないことだと言ってもよい．**時間的に変動する電場に対しては保存力の法則 (19) は成り立たない**ので，注意してほしい．

問 6．保存力の法則 (19) を証明せよ．

問 7．（この問題はかなり難しいので，やらなくてもよい）速度 $\boldsymbol{v}$ で等速直線運動する点電荷 Q から位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の分だけ離れた点にできる電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\,\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{20}$$

となることが知られている．ただし，速度ベクトルの大きさ $v = \|\boldsymbol{v}\|$ と光の速さ $c = 3.00\times10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ の比を $\beta = v/c$ とおいた．また，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{r}$ のなす角を θ とおいた．

(1) $\beta = 1/2$ のとき，$\theta = 0, \pi/4, \pi/2$ における電場の大きさをそれぞれ求めよ．

(2) 電場 (20) のベクトル場と電気力線を描画せよ．

(3) 電荷の位置を原点とし，速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ の向きを z 軸として直交座標系 (x, y, z) を設ける．$0 < a < b$ として，4 点 $P_1 = (a, 0, 0)$, $P_2 = (b, 0, 0)$, $P_3 = (0, 0, b)$, $P_4 = (0, 0, a)$ を順に巡る閉曲線 L を作る．ただし，P_1 と P_2 はまっすぐな線分で結び，P_2 と P_3 を結ぶ区間は原点を中心とする円弧とし，P_3 と P_4 もまっすぐな線分で結び，P_4 と P_1 を結ぶ区間も原点を中心とする円弧とする．この閉曲線 L に沿っての電場の線積分 $\oint_L \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．

(4) 点電荷 Q を中心とする半径 r の球面 S を貫く電束 $\Phi = \varepsilon_0 \int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ を求めよ．

電位

静電場 $\boldsymbol{E}$ の中に試験電荷 q を置いて，電場の力に逆らって “そろりと” 電荷を運ぶことを考える．つまり電場から受ける力 $\boldsymbol{F}_e = q\boldsymbol{E}$（電気的 electric な力という意味で e を添える）の他に何らかの力 $\boldsymbol{F}_m$（力学的 mechanical な力という意味で m を添える）を電荷に与えて，

$$\boldsymbol{F}_e + \boldsymbol{F}_m = q\boldsymbol{E} + \boldsymbol{F}_m = \boldsymbol{0} \tag{21}$$

のように力の釣り合いを保って，試験電荷を加速させずに，そっと運ぶ．力の打ち消し合いの条件から

$$\boldsymbol{F}_m = -q\boldsymbol{E} \tag{22}$$

である．すると，基準点 O から点 $\boldsymbol{r}$ まで経路 C に沿って電荷を運ぶ間に力 $\boldsymbol{F}_m$ がする仕事は

$$W(C) = \int_C \boldsymbol{F}_m\cdot d\boldsymbol{r} = -q\int_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} \tag{23}$$

に等しい．$\boldsymbol{E}$ が数学的に考え得る一般のベクトル場であれば，経路 C の始点と終点を固定しても，C の選び方は無数にあり，$\int_C \boldsymbol{F}_m\cdot d\boldsymbol{r}$ という線積分の値は C の採り方によって異なった値になり得る．しかし，静電場は保存力の法則 (19) を満たしているので，仕事 W の値は経路 C の選び方によらず，終点 $\boldsymbol{r}$ だけで決まる．

したがって，単位電荷を基準点 O から終点 $\boldsymbol{r}$ に運ぶのに要する仕事

$$\phi(\boldsymbol{r}) = -\int_{\mathrm{O}}^{r} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}' \tag{24}$$

という量を定めることができる．$\phi(\boldsymbol{r})$ を基準点 O に対する点 $\boldsymbol{r}$ の**電位** (electric potential) という．基準点 O から観測点 $\boldsymbol{r}$ まで電場に逆らって試験電荷 q をそっと運ぶのに必要な仕事を $W(\boldsymbol{r})$ とすると

$$W(\boldsymbol{r}) = q\,\phi(\boldsymbol{r}) \tag{25}$$

が成り立つ．電位はスカラー場である.「電位が高い場所」とは「プラスの電荷をそこまで運ぶのには大きな仕事を要する」ことを意味する．

当然ながら，電位の値は，基準点に対して相対的に決まるものであり，基準点を替えれば電位の値も変わる．基準点を O にとった場合の点 $\boldsymbol{r}$ の電位を $\phi_{\mathrm{O}}(\boldsymbol{r})$, 基準点を O$'$ にとった場合の電位を $\phi_{\mathrm{O}'}(\boldsymbol{r})$, とすると,

$$\phi_{\mathrm{O}}(\boldsymbol{r}) = \phi_{\mathrm{O}}(\mathrm{O}') + \phi_{\mathrm{O}'}(\boldsymbol{r}) \tag{26}$$

という関係式が成り立つ．つまり基準点を替えれば，電位の値は定数 $\phi_{\mathrm{O}}(\mathrm{O}')$ の分だけ足される（あるいは引かれる）.

また，電位に関しても重ね合わせの原理が成り立つ．つまり，ある電荷分布 Ω_1 が作る電場を $\boldsymbol{E}_1$, 電位場を ϕ_1 とし，別の電荷分布 Ω_2 が作る電場を $\boldsymbol{E}_2$, 電位場を ϕ_2 とすれば，電荷 Ω_1, Ω_2 が同時にあったときにできる電場は $\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$, 電位場は $\phi_1 + \phi_2$ である．

無限遠方を基準とした電位

電場の源となる全電荷が有限の体積の領域の中に収まっているような状況では，遠くに行けば行くほど電場は弱まるので,「電場ゼロの理想的（仮想的）な場所」として**無限遠点（無限遠方）**を基準点に選ぶことができる．空間のどこかに無限遠点という場所があるわけではなく，あくまで「どこまでも遠くに行く」という極限操作を意味する．無限遠点を形式的に ∞ と表す．この場合，電位は

$$\phi(\boldsymbol{r}) = -\int_{\infty}^{r} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}' = \int_{r}^{\infty} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}' \tag{27}$$

となる．とくに原点 O に置かれた点電荷 Q による電位は

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{r}) &= \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot d\boldsymbol{r} \\ &= \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\frac{r}{r} dr \\ &= \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2} dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r}\end{aligned} \tag{28}$$

となる．

問 8. (1) 点電荷群が作るクーロン電場 (17) に対する電位場を与える式

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i\|} \tag{29}$$

を導け．
(2) 連続電荷分布が作るクーロン電場 (18) に対する電位場を与える式

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\|} dv' \tag{30}$$

を導け．

電位と電場の関係

定理 1. (24) のように，電場を積分したものが電位だが，逆に，電位 ϕ を微分すれば電場 $\boldsymbol{E}$ になる：

$$-\frac{\partial\phi}{\partial x} = E_x, \quad -\frac{\partial\phi}{\partial y} = E_y, \quad -\frac{\partial\phi}{\partial z} = E_z \tag{31}$$

これらをまとめて

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\,\phi = -\mathrm{grad}\,\phi = -\Big(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\Big) \tag{32}$$

と書く．grad は gradient の略で，$\mathrm{grad}\,\phi$ を ϕ の**勾配ベクトル場**という．記号 ∇ はナブラ (nabla) と読む．

定義. 電位場 $\phi(\boldsymbol{r})$ と定数 c に対して 3 次元空間の点の集合

$$S_c := \{\boldsymbol{r} \mid \phi(\boldsymbol{r}) = c\} \tag{33}$$

を高さ c の**等電位面** (equipotential surface, level set) という.

定理 2. 任意の点を通る等電位面は，その点における電場ベクトルと直交する.

問 9. 定理 1, 2 を証明せよ.

問 10. 質量 m，電荷 q を持つ試験電荷粒子が静電場中で運動するとき

$$\epsilon = \frac{1}{2}m\|\boldsymbol{v}\|^2 + q\phi(\boldsymbol{r}) \tag{34}$$

は時間変化しないことを示せ．ただし $\boldsymbol{v}$ は粒子の速度ベクトル．このことから $q\phi(\boldsymbol{r})$ は荷電粒子の**位置エネルギー** (potential energy) と解釈される.

問 11. 3 次元空間の座標を (x, y, z) とする．点 $(0, a, 0)$ に電荷 Q があり，点 $(0, -a, 0)$ に電荷 $-Q$ があるときの電位場 $\phi(x, y, z)$ を求めよ．$z = 0$ の (x, y) 平面で等電位線を描け．また，同じ平面上で電気力線を描け.

問 12. 原点を中心とする半径 a の球体内部に一定の体積密度 ρ で電荷が分布しているとき球体の全電荷は $Q = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$ である.

(1) 無限遠方の電位ゼロの基準として，原点から距離 r 離れた点における電位 $\phi(r)$ を求めよ．ただし，$r \geq a$ の場合と $r < a$ の場合に分けて答えよ.

(2) 関数 $\phi(r)$ のグラフを描け.

(3)

$$E(r) = -\frac{d\phi}{dr}$$

を求めて，これが球体電荷が作る電場と等しいことを確かめよ.