導体と電流

電場を図示する方法

前回言い忘れたことを補足しておく．電場を図示する方法は 3 通りある．

1) 電場をベクトル場として表示する．具体的には各点 $\boldsymbol{r}$ における電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を，点 $\boldsymbol{r}$ を始点とするベクトルで表す．電場が強いほどベクトルは大きい．

2) 電場を電気力線の束（電束）で表示する．電気力線は電場の向きに沿う曲線である．単位面積を貫く電気力線の本数が，電場の強さに比例するように描く．結果的には，電場が強いところほど電気力線が密集することになる．

3) 一定の電位差間隔をおいて等電位面を描く．等電位面は各点の電場に垂直な曲面になる．電場が強いところは，電位の変化も急なので，等電位間隔の等電位面は実空間では密になる．

物質の電気的性質

通常の物質は，気体も液体も固体も，原子の集合体である．原子の中心には正電荷を持つ**原子核**があり，負電荷を持つ**電子**が原子核の周りを動いている．また，いくつかの原子が結合して分子ができることもある．

とくに外から電場を作用させたりしなければ，原子や分子が持つ正電荷量と負電荷量は絶対値が等しく，物質全体としては**電気的に中性**（電荷の総量がゼロの状態）になっているのが通常の状態である．電荷の総量がゼロではない状態を**電荷を帯びている**（帯電）という．

物質に対して，以下のような操作を施すことができる．

1) 物質に余分の電荷を与える，あるいは，物質から電荷の一部を奪うことができる．電子は軽くて動きやすい粒子なので，物質に電子を注入したり，物質からいくつかの電子を取り去ったりすることは難しくない．そういうことをすると，物質の正負の電荷のバランスが崩れて，物質全体として負の電荷を帯びたり，正の電荷を帯びたりする．このようにして金属やプラスチックに「電荷をためる」ことができる．摩擦電気は，2 種類の物質をこすったときに，一方の物質から他方の物質にいくつか電子が乗り移って，一方は正電荷，他方は負電荷を帯びる現象である．とくに余分の電子を持って負電荷を帯びている分子を**負イオン**（陰イオン，アニオン）といい，電子が不足して正電荷を帯びている分子を**正イオン**（陽イオン，カチオン）という．

2) 物質中を荷電粒子が移動することが可能ならば，例えば，物質のかたまりの左端から電子を注入して，物質内部を電子が移動して，それと同じ数だけの電子を物質の右端から取り去ることもできる．このような荷電粒子の移動現象を**電流** (electric current) という．言葉づかいとしては，正電荷の移動方向を電流の向きと約束する．電子は負電荷を持つので，電子が左から右に移動しているときは，「電流は右から左に流れている」という．**物質中を動く荷電粒子は電子とは限らない．**正イオンが左向きに動いたり，負イオンが右向きに動いても，電流は左向きに流れていることになる．電流が流れている物質は，全体としては電気的中性を

保っていることもあるし，帯電していることもある．

3) 電場中に物質を置くと，物質はいろいろな挙動を示す．この場合，正イオンは電場の向きに力を受ける．電子や負イオンは電場の逆向きに力を受ける．結果的に物質は，おおざっぱに言って次の二通りの応答をする．

3-1) 一つは，分子内で電子の分布が偏って，分子の一部分が電子不足で，別の一部分が電子過剰の状態になるという応答．この場合，分子全体としては電気的中性だが，分子の一部が正電荷を帯び，別の部分が負電荷を帯びることになる．このような現象を分子の**誘電分極** (dielectric polarization) という．

3-2) もう一つは，物質中で電子やイオンが移動し続けるという応答．結果的には，電場と同じ向きに電流が流れることになる．

荷電粒子が移動しやすい（電流がながれやすい）物質を**導体** (conductor) あるいは**良導体**という．銅や銀や塩酸や水酸化ナトリウム水溶液は導体である．逆に，荷電粒子が移動しにくい（電流がながれにくい）物質を**絶縁体** (insulator) あるいは**不導体**という．ガラスやポリエステルは不導体である．また，誘電分極を起こしやすい物質を**誘電体** (dielectric) という．プラスチック，セラミックス，油，液晶などが代表的な誘電体である．誘電体は不導体でもあることが多い．導体や不導体の区別は「程度の差」であって，絶対的な基準があるわけではない．

このノートでは，主に導体について解説しよう．

電流

電流を次のように定量的に表現する．物質のある断面に注目して，単位時間あたりにその面を通り抜ける電荷量を「電流の大きさ」と定める．また，正味の正電荷の移動方向を「電流の向き」と定める．

とくに人間が作った電気回路という装置では細い導線に沿って電荷を流すことが多いので，導線に対して電流を定義することが多いが，電流は必ずしも細い線の中だけを流れるものではない．例えば，電気分解の際には，溶液の中のあらゆる場所で電荷の移動が起きており，電流は溶液全体で流れている．

一定の電流 I が流れているとき，時間 t の間に移動した電荷の量を Q とすると

$$Q = It \tag{1}$$

という関係が成り立つ．これは，一定の速度 v で時間 t に移動した距離を L とするときに成り立つ関係式

$$L = vt \tag{2}$$

と同型である．

上の式 (1) は

$$I = \frac{Q}{t} \tag{3}$$

と書き直すことができる．電荷を C（クーロン），時間を s（秒）という単位で測るなら，電流は

$$\mathrm{A}\,(\text{アンペア}) = \mathrm{C\,s^{-1}} \tag{4}$$

という単位で測られる．

また，面積 S の断面に対して垂直に電流が流れているとき，単位面積あたりの電流を**電流密度** (current density) といい，j という文字で表す．つまり，面積 S の断面を通過する電流 I は

$$I = jS \tag{5}$$

に等しい．この式は

$$j = \frac{I}{S} = \frac{Q}{tS} \tag{6}$$

と書き直すことができる．したがって電流密度の単位は

$$\mathrm{A\,m^{-2}} = \mathrm{C\,s^{-1}\,m^{-2}} \tag{7}$$

である．

電流には向きがあるので，電流密度はベクトルで表すのが適当である．一般には電流密度はベクトル場 $\boldsymbol{j} = (j_x, j_y, j_z)$ で表され，単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を持つ面積 S の平面素片を通過する電流は

$$I = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n} S \tag{8}$$

に等しい．

問 1．落雷は雲と地面の間で電流が流れる現象だが，一回の雷撃で 20 C ほどの電荷が 2 ms（ミリ秒）ほどの時間で流れる．この電流は何アンペアか求めよ．これがどの程度の電流か実感するために，家庭のブレーカーの許容電流を調べてみよ（電流が流れすぎると配線や電気製品が発熱する恐れがあるので，各家庭には，過剰電流が流れると電流を遮断するブレーカーが設置されている）．

精密化された電荷保存則

宇宙全体の電荷の総量は時間が経過しても増えも減りもせず不変にとどまる．それだけの話であれば，例えば，ある瞬間に名古屋で電荷 10 C が発生し，同時に，月で電荷 −10 C が発生しても，電荷保存則には反しないが，もう少し詳しく述べられた電荷保存則は，このような電荷の「ワープ現象」を禁止する．

詳しく述べられた電荷保存則は，**電荷分布の変化は必ず電流を伴う**ことを要請する．限られた空間領域 V に注目すれば，V の境界面 ∂V を通り抜けて電流が出れた分だけ V 内の電荷量は減るし，∂V を通って電流が流れ込んだ分だけ V 内の電荷量は増える．電荷密度のスカラー場 ρ が単位体積あたりの電荷量を表し，電流密度のベクトル場 $\boldsymbol{j}$ がそのベクトルに垂直な平面を単位面積を単位時間あたりに通り抜ける電荷の量を表すことから，

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dv = - \int_{\partial V} \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n} \, dS \tag{9}$$

が成り立つ．これを**局所的な電荷保存則** (local charge conservation law) という．以上は導体のあるなしに無関係に成り立つ法則である．

オームの法則と電気抵抗

固体は原子が整然を並んだ結晶であり，電場をかけると，原子核はほとんど動かないが，電子は電場の反対方向に動く．とくに金属中の電子はいくらでも動く．したがって金属では電場と同じ向きに電流が流れる．液体も電場をかけると電流が流れるが，この場合は，正イオンが電場の方向に，負イオンが電場の反対方向に動いている．

電場 $\boldsymbol{E}$ は電荷 q に力 $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$ を及ぼすのだから，電場が一定なら，力も一定，電荷の加速度も一定になり，電子やイオンの移動速度は時間とともにどんどん大きくなりそうだが，実際には，**電場が一定なら物質中の電子やイオンの移動速度は一定値にとどまる**．なぜ物質中の電子は加速し続けないのかという理由は非常に難しく，1920 年頃まで謎であった．電子の運動は量子力学ができてから初めて理解できるようになってきたが，いまでも完全には理解し尽されてはいない．

一様な物質を一様な電場中に置くと，電場の向きに，電場の大きさに比例した電流が流れるという**経験則**が知られており，これを**オームの法則** (Ohm’s law) という．電場 $\boldsymbol{E}$ と電流密度

$\boldsymbol{j}$ の比例関係は

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{10}$$

と書かれる．比例係数 σ は物質の種類によって異なる．σ が大きければ電流が流れやすい物質，σ が小さければ電流が流れにくい物質ということになる．σ は**電気伝導率** (electrical conductivity) と呼ばれる．

経験則 (empirical rule) とは,「真の理由はわからないが，実験・観察してみるとそうなっていることが多い」という規則性である．その程度の規則なので，現実にはオームの法則に従わない物質もある．とくに電場を非常に強くするとオームの法則からのずれが目立ってくる．また，ある種の物質では，電場の向きと電流の向きは必ずしも一致しない．ただし，より基本的な法則（量子力学）から近似的にオームの法則を導くことはできる．なぜ近似的なことしか言えないのかというと，物質というのはおびただしい個数の原子核や電子からできているので，それらの振る舞いを厳密に数学的に分析することは非常に難しいからである．

とくにこう書いたからといって内容が増えるわけではないが，σ の逆数

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \tag{11}$$

を体積抵抗率とか比抵抗とか**抵抗率** (electrical resistivity) と呼ぶ.

問 2．電気伝導率 σ の単位を m, kg, s, A の組み合わせで表せ.

問 3．式 (10) は**微視的あるいは局所的オームの法則**とも呼ばれる．底面積 S，高さ ℓ の円筒形の一様な物質があり，円筒の軸に沿って一様な電場 E があるとする．また，二つの底面の間の電位差を ϕ とする．丁寧に言うと，二つの底面に S_1, S_2 という名前を付けたとして，電場が S_1 から S_2 に向かっているとき，S_2 を電位の基準場所にして S_1 の電位を測った値を ϕ とする．このとき，

$$I = jS, \tag{12}$$

$$j = \sigma E, \tag{13}$$

$$\phi = E\ell \tag{14}$$

という関係式が成り立つことを説明せよ．また，これらから

$$\phi = RI, \tag{15}$$

$$R = \frac{1}{\sigma}\frac{\ell}{S} = \rho\frac{\ell}{S} \tag{16}$$

という関係が成り立つことを示せ．(15) は，通常のオームの法則，あるいは**巨視的オームの法則**と呼ばれる．係数 R はこの円筒形物体の**電気抵抗** (resistance) と呼ばれる.

問 4．電気抵抗の単位は Ω（オーム）と書かれる．抵抗率 ρ の単位は $\Omega\,\mathrm{m}$ であることを確かめよ.

抵抗率 ρ はその物質の「電流の通しにくさ」を表す．いくつかの物質のついて抵抗率の値を列挙しておく．ただし，たいていの物質の抵抗率は温度によって変化する．ここに書いてある抵抗率は 0 ℃付近での値である.

銀	$\rho = 1.47 \times 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$
銅	$\rho = 1.55 \times 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$
金	$\rho = 2.05 \times 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$
鉄	$\rho = 8.9 \times 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$
鉛	$\rho = 19.2 \times 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$
ニクロム	$\rho = 107.3 \times 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$
炭素	$\rho = 1640 \times 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m} = 1.64 \times 10^{-5}\,\Omega\,\mathrm{m}$
海水	$\rho = 2.0 \times 10^{-1}\,\Omega\,\mathrm{m}$
ケイ素	$\rho = 3.97 \times 10^{3}\,\Omega\,\mathrm{m}$
純水	$\rho = 2.5 \times 10^{5}\,\Omega\,\mathrm{m}$
ガラス	$\rho = 10^{10} \sim 10^{14}\,\Omega\,\mathrm{m}$
ポリエステル	$\rho = 10^{12} \sim 10^{14}\,\Omega\,\mathrm{m}$
硫黄	$\rho = 2 \times 10^{15}\,\Omega\,\mathrm{m}$

上から下に行くにつれて抵抗率が大きい，つまり電流を通しにくい物質が下の方に並んで

いる．抵抗率が $10^{10}\,\Omega\,\mathrm{m}$ よりも大きいと，実用上は，ほとんど電流は流れない．このような物質を絶縁体とか不導体と呼ぶ．

抵抗率がだいたい $10^{-6}\,\Omega\,\mathrm{m}$ よりも小さいと電流を容易に流せる．このような物質を導体とか良導体という．

絶縁体と導体の中間の抵抗率を持つ物質を**半導体** (semi-conductor) という．

導体・半導体・絶縁体は明瞭に区別されるものではなく，あくまで電流の通しやすさに関する「程度の差」である．それでも，電流をよく通す物質と，ほとんど通さない物質の差は歴然としており，導体から絶縁体まで抵抗率の値は小から大まで極端に広がっている．例えば，銀とポリエステルとでは抵抗率は 10^{23} 倍も異なっている．

問 5. 電流をよく通す物質と，通しにくい物質とでは，抵抗率が $10^{23} = 100,000,000,000,000,000,000,000$ 倍も異なる理由を考えよ．この巨大な数はいったい何に由来するのか？

静電場中におかれた導体

電流を流し続けるためには，電位差を保つ電源装置と，荷電粒子を供給したり逃がしたりするしくみが必要だが，電位差を保つ電源装置がない場合には何が起こるだろうか？

静電場と導体に関しては比較的シンプルな現象が起きるので，それを分析しよう．静電場の中に導体を置くと，電場に沿って電流が流れる．とくに金属固体の場合は，電場の反対方向に電子が移動する．電子はどこまでも移動することはできず，固体の表面で行き止まる．そうすると固体の表面には電荷がたまり，やがてこの電荷自身が作り出す電場と，外部から与えている電場とが，導体の内部で打ち消し合うようになる．電場が完全に打ち消し合ったとき，電子の移動が止まる．静電場中の金属ではこのような電子の移動はほとんど一瞬に完了してしまう．

以上の考察から静電場と導体に関して次のような一般法則を導くことができる．なお，導体の「内部」と「表面（のすぐ近くの内側）」を区別していることに注意してほしい．

1) **静電場中の定常状態の導体の内部の電場はゼロである．**ただし，定常状態とは電荷の移動が停止した状態のことである．導体と定常状態の定義から「導体内の電場がゼロでないならば，電荷の移動が起こり，ゆえに定常状態ではない」という命題が成り立つ．その対偶が,「定常状態ならば導体内の電場はゼロだ」という命題である．

2) **ひとつながりの導体の内部と表面の電位は一定値である．とくに導体の表面は等電位面である．**なぜなら，点 P から点 Q に向かう曲線に沿って電場を線積分したものが電位差

$$\phi(\mathrm{P}) - \phi(\mathrm{Q}) = \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{17}$$

を定めるので，もしも点 P と点 Q を電場ゼロの場所を通る曲線でつなぐことができるなら，点 P, Q の電位差はゼロである．

3) **定常状態の導体の内部は電気的に中性である．導体の電荷は表面のみにたまる．**このことを証明しよう．ガウスの法則より任意の 3 次元領域 V について

$$\varepsilon_0 \int_{\partial V} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n} dS = \int_V \rho\, dv \tag{18}$$

である．領域 V は導体の形とは関係なく，便宜的に選べることに注意しよう．いま，導体内の任意の点 P に対して，点 P を取り囲む小さな領域 V を V の境界面も導体内に収まるように選ぶことができて，∂V では電場 $\boldsymbol{E} = 0$ だから，

$$\int_V \rho\, dv = 0 \tag{19}$$

となるから，導体内部の点 P の近傍の電荷密度 ρ は 0 である．

しかし，点 P が導体表面にある場合は，点 P を囲む領域 V をどんなに小さく選んでも，V の境界面 ∂V の一部は導体の外に出るし，そこでは電場はゼロとは限らないので，点 P 近傍の電荷もゼロとは言えない．つまり，表面にはゼロでない電荷があり得る．

4) **導体の表面のすぐ外側にはゼロでない電場が存在し得るが，電場の向きは必ず導体表面に垂直であり，導体表面の電荷面密度を σ とすれば電場の強さ E は**

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{20}$$

となる．（平面状の一様な電荷が作る電場の場合は係数 1/2 がかかっていたことに注意.）

5) **もし，導体内部に空洞があって，空洞内に電荷がなければ，空洞内の電場はゼロであり，空洞表面の電荷もゼロである．**

問 6. 上に掲げた，導体と静電場に関する法則 4, 5 を論証せよ（なぜ正しいのか説明せよ）．

静電誘導

導体を電場中に置くと，導体中の電子が電場に引き寄せられて（あるいは押しやられて），電子の移動が起き，導体内の電荷分布が変化し，結果的に導体の一部分は帯電する．この現象を**静電誘導** (electrostatic induction) という．

導体内の電荷の再編成によって現れた正味の電荷によって，新たな電場が生じる．導体の外から印加された電場と，導体内の電荷が作る電場とが重なり合って打ち消し合い，導体内の電場がゼロになるまで電荷の移動は続く．

一般に，**いくつかの導体があって各導体にいくらかの電荷を与えたとき，各導体内で電子の移動が起きた結果，定常状態では導体中の電荷分布はどうなるか，また導体の外の電場はどうなるか**という問題に興味がある．数学的には，導体内部の電場＝0 と，電荷保存則，ガウスの法則，保存力場の法則という 4 つの条件の下で導体表面に誘導される電荷面密度と導体外部にできる電場とを求めよという連立問題になる．一般の形の導体に対してこの問題を解くのは，かなり難しい．

導体に，無限遠方に伸びた導体をつなげることを**接地** (earth) という．接地すると，無限遠方からいくらでも電荷が移動してくることができる．また，接地された導体は無限遠方との電位差が 0 になる．

問 7. 無限平面導体から距離 a だけ離れた点に点電荷 q を置いた場合の，電場と，導体表面に静電誘導された電荷分布を**鏡像法** (mirror method) を使って求めよ．

問 8. 平行な 2 枚の導体平面の間に点電荷を置いた場合，どんな鏡像電荷を想定すれば電場を求めることができるか？（ヒント：平行な 2 枚の鏡の間に手や顔を入れたらどんな光景が見えるか想像してみよ.）

問 9. 平面上の異なる 2 点 A, B と正の定数 s, t に対して，点 P を線分の長さの比が $\mathrm{AP} : \mathrm{BP} = s : t$ となるようにとると，点 P の軌跡は $s = t$ の場合は AB の垂直二等分線，$s \neq t$ の場合は円になることを証明せよ（アポロニウスの円と呼ばれる）．

問 10. 接地した導体球の外部に点電荷を置いたとき，導体球に誘導される電荷と，周りの電場を求めよ．