

現代数学と力学特論 演習 2

谷村 省吾

名古屋大学大学院情報科学研究科

問題

集合 X の部分集合 $A, B \subset X$ や, 集合 Y の $S, T \subset Y$ と, 任意の写像 $f: X \rightarrow Y$ に関して

$$f(A) := \{f(x) \in Y \mid x \in A\} \subset Y,$$
$$f^{-1}(S) := \{x \in X \mid f(x) \in S\} \subset X$$

を定め, $f(A)$ を f による A の像 (image) といい, $f^{-1}(S)$ を f に関する S の逆像 (inverse image) という. 以下の命題が成り立つことを証明せよ.

$$A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B) \tag{1}$$

$$S \subset T \Rightarrow f^{-1}(S) \subset f^{-1}(T) \tag{2}$$

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \tag{3}$$

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \tag{4}$$

$$f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T) \tag{5}$$

$$f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T) \tag{6}$$

$$f^{-1}(f(A)) \supset A \tag{7}$$

$$f(f^{-1}(S)) \subset S \tag{8}$$