

代数的量子論入門と最近の量子測定理論・実験の紹介

谷村 省吾

名古屋大学大学院情報科学研究科

1 序：代数的量子論はどんな理論か？

力学とは（古典力学だろうと量子力学だろうと熱力学だろうと）「系(system)・状態(state)・物理量(observable)・値(value)・運動(dynamics, transformation)」の五者のありようを記述する理論である。この観点からすると、古典力学と量子力学は、物理量代数が可換か非可換かという違いしかない。代数的量子論(algebraic quantum theory)は、和・積・スカラー倍・対合という演算規則を持つ「物理量の集合」がマイクロ系に内在するものと認め、マイクロ系の「状態」は物理量の値をマクロ世界の側に見える形で渡すインターフェイスだと捉える記述体系である。代数的量子論を従来のフォンノイマン流の量子力学の定式化と比べるなら、ヒルベルト空間を天下一の公理的要件として認めるのではなく、必要とあればいつでも構成・調達できる便利な計算道具として位置付けるのが代数的アプローチの特徴である。（ちなみにフォンノイマンは、バーコフに宛てた手紙の中で、ヒルベルト空間に基づく量子力学の構成はよくないと思う、という旨のことを書いている。）このアプローチを採ると、ヒルベルト空間にまつわる「シュレディンガーの猫」や「波束の収縮」などの擬似問題に煩わされずに済む。「状態ベクトルの重ね合わせの原理」を公理とせずはどうやって干渉効果を記述するのか？と思われるだろうが、干渉効果は非可換性の結果として導けるし、この理論形式なら、どういふときに干渉効果が起きないのかもわかる。代数的量子論は、ヒルベルト空間に縛られないおかげで、相転移や超選択則などに伴う非同値表現も統一的に扱うことができる。また、代数や状態を拡大したり制限したりすることにより、ズームイン・ズームアウトが可能な、融通の利く視点・言語を提供できるのも、この理論の特徴である。あえて言えば、代数的量子論は、物理学として必要な言語はすべて備わっていて、しかも無用の擬似問題を生じないような、ほぼ十全な記述体系である。

2 数学の準備（ここで力尽きないように！）

2.1 環・体・ベクトル空間・代数・群・加群

2.2 零因子・イデアル・商環

2.3 環の準同形写像・加群の自己準同形写像全体のなす環・加群の自己同形写像全体のなす群・環作用を持つ加群・環の表現・群の表現

- 2.4 位相空間
- 2.5 距離空間・完備性・完備化
- 2.6 ノルム・内積・バナッハ空間・ヒルベルト空間・可分なヒルベルト空間
- 2.7 線形作用素
- 2.8 有界線形関数とリース (Riesz) の表現定理
- 2.9 随伴 (共役) 作用素
- 2.10 自己共役作用素・射影作用素・ユニタリ作用素
- 2.11 作用素のノルム・有界作用素
- 2.12 C^* 代数・フォンノイマン代数
- 2.13 代数の表現
- 3 代数的量子論の構成
 - 3.1 物理量代数
 - 3.2 スペクトル値
 - 3.3 状態と期待値
 - 3.4 純粋状態と混合状態
 - 3.5 GNS 構成
 - 3.6 可換代数とゲルファント・ナイマルク双対性と確率解釈
 「双対性とは何様だ!？」「お互い様だ。」(by 竹中直人) (数学セミナー別冊, 数学のたのしみ No. 10 『双対性をさがす』日本評論社, p. 60)
 - 3.7 非可換代数としての量子系
 - 3.8 テンソル積代数と合成系
- 4 量子論の意味を考えるケーススタディ
 - 4.1 調和振動子・角運動量・スピン代数 (非可換物理量には, 代数準同形的に, かつ, 反事実仮定法的に値を割り当てることができない)
 - 4.2 隠れた変数理論 (hidden-variable theory)
 - 4.3 ベルの不等式 (ミステリー姉妹, マーミンの野球原理その他)
 - 4.4 ベル・コッヘン・シュペッカーの定理
 - 4.5 マーミンの魔法陣
 - 4.6 コンウェイ・コッヘンの (悪名高い) 自由意思定理 (「非可換物理量の値は因果的に決定していない」という事実を「自由意思の存在」にすりかえている. 隠れた変数の存在否定を, 奇矯な形に言い換えただけの主張.)
- 5 量子論の内容をリッチにしている仕掛け
 - 5.1 対称性
 - 5.2 時間発展
 - 5.3 スケーリングと次元解析
 - 5.4 非同値表現: 円周上の量子力学を例に挙げて

- 5.5 セクター構造と超選択則
- 6 測定理論
 - 6.1 事象・状態・確率
 - 6.2 確率則（読み取り値を決める規則）と遷移則（測定後の状態を決める規則）
 - 6.3 POVM・CP写像・インストゥルメント
 - 6.4 状態概念はどこに位置づけるのが適当か？系の内部か？表面か？
 - 6.5 物理で扱っている物理量や測定は数学で捉え切れているか？
- 7 最近の実験をめぐって
 - 7.1 遅延選択実験
 - 7.2 量子消去
 - 7.3 弱値（？私自身が納得していないことが多すぎる）
- 8 双対性と圏論（時間に余裕があれば）

参考文献：

- [1] I. E. Segal, “Irreducible representations of operator algebras,” Bull. Amer. Math. Soc. **53**, 73 (1947), “Postulates for general quantum mechanics,” Ann. Math. **48**, 930 (1947).
- [2] J. von Neumann (M. Redei, editor), Selected Letters, History of Mathematics Vol. 27, AMS (2005), p.59. “I would like to make a confession which may seem immoral: I do not believe absolutely in Hilbert space any more.”
- [3] 梅垣壽春, 大矢雅則, 日合文雄「作用素代数入門：Hilbert空間より von Neumann代数」共立出版
- [4] O. Bratteli, D. W. Robinson, “Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1, 2,” Springer
- [5] 荒木不二洋「量子場の数理」岩波書店
- [6] R. Haag, “Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras,” Springer
- [7] 大矢雅則, 小嶋泉 編著「量子情報と進化の力学」牧野書店
- [8] 河東泰之 編「数理物理への誘い 7」遊星社（小嶋泉氏による章を参照）
- [9] マーミン（町田茂 訳）「量子のミステリー」丸善
- [10] 佐藤文隆「アインシュタインの反乱と量子コンピュータ」京大出版会
- [11] 筒井泉「量子力学の反常識と素粒子の自由意思」岩波書店
- [12] W. F. Stinespring, “Positive functions on C*-algebras,” Proc. Am. Math. Soc. **6**, 211 (1955).
- [13] M. Ozawa, “Quantum measuring processes of continuous observables,” J. Math. Phys. **25**, 79 (1984).

- [14] M. Ozawa, “Uncertainty relations for noise and disturbance in generalized quantum measurements,” *Ann. Phys.* **311**, 350 (2004).
- [15] 谷村省吾「21世紀の量子論入門」, 雑誌『理系への数学』(現代数学社)に2010年5月から2012年4月まで連載. 代数的アプローチによる量子力学の解説. 単行本化の予定.
- [16] 谷村省吾「量子古典対応: 量子化の技法, 古典系創発の機構」*数理科学* 2012年4月号 pp. 19-25.
- [17] S. Tanimura, “Superselection rules from measurement theory,” arXiv: 1112.5701 (2011).
- [18] 谷村省吾「量子論における超選択則の力学的起源とカラーの閉じ込め」*数理解析研究所講究録* 1774号 pp. 100-117 (2012). 谷村の web page にも掲載.
- [19] 谷村省吾「エキゾチックな対称性の破れとゲージ場の幾何学」*素粒子論研究* 106巻6号, F2-21 (2003年3月). 双対性についての解説あり. 谷村の web page にも掲載.
- [20] 谷村省吾「トポロジー・圏論・微分幾何 — 双対性の視点から」*数理科学 SGC ライブラリ* 52, サイエンス社
- [21] 谷村省吾「光子の逆説」*日経サイエンス* 2012年3月号 pp. 32-43.
- [22] V. Jacques, et al., “Experimental realization of Wheeler’s delayed-choice gedanken experiment,” *Science* **315**, 966 (2007)
- [23] U. Eichmann and W. M. Itano et al., “Young’s interference experiment with light scattered from two atoms,” *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2359 (1993)
- [24] S. Durr, T. Nonn, G. Rempe, “Origin of quantum-mechanical complementarity probed by a ‘which-way’ experiment in an atom interferometer,” *Nature* **395**, 22 (1998)
- [25] S. Durr, T. Nonn, G. Rempe, “Fringe visibility and which-way information in an atom interferometer,” *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5705 (1998)
- [26] S. P. Walborn et al., “Double-slit quantum eraser,” *Phys. Rev. A* **65**, 033818 (2002)
- [27] Y.-H. Kim and M. O. Scully et al., “Delayed choice quantum eraser,” *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1 (2000)
- [28] D. Mermin, “Hidden variables and the two theorems of John Bell,” *Rev. Mod. Phys.* **65**, 803 (1993).
- [29] J. Conway, S. Kochen, “The free will theorem,” *Found. Phys.* **36**, 1441 (2006).