ハミルトン力学の幾何学的定式化と幾何学的量子化・変形量子化[1]

谷村 省吾[2]

名古屋大学大学院情報科学研究科

1　概要

マクロ系の物理は古典力学で記述され，ミクロ系の物理は量子力学で記述される．マクロのもの（人間・天体など）はミクロのもの（原子・電子など）で構成されている．端的に言えば，**マクロはミクロから出来ている**，ということになる．「…は…から出来ている」，made of, consist of という関係にあるという意味で，マクロの物理法則よりもミクロの物理法則の方がより基本的であると考えられる．

一方で，我々，マクロ系であるところの人間は，古典力学の方が理解しやすく，量子力学に先だって古典力学を認識してきたし，古典力学からの類推にある程度助けられて量子力学を作り上げてきた．古典力学のモデルから量子力学のモデルへ移行する手続きは**量子化** (quantization) と呼ばれる．量子化は，写像のような数学的に厳密に定義された手続きではなく，ある種の「当て推量」である．

古典系から量子系に向かう矢が量子化だとすれば，量子系から古典系に向かう矢は，古典近似・古典極限といった漸近操作のこともあるし，そもそもミクロ系には明示的に備わっていなかったマクロ物理量の創発という面もある．

私は，**量子化は reverse engineering である**，と言いたい．Reverse engineering とは，完成品である工業製品をいじってみることによって，その動作原理や製造方法，設計図などの見当をつける作業のことを言う．現実に我々がやっていることを虚心坦懐に見つめれば，我々は原子や電子が組み合わさってできたマクロの物体・現象を観察・操作することによって，ミクロの世界のなりたち・しくみについて見当をつけているのである．そのような「見当づけ」をある程度システマティックにやろうとするのが「量子化」という推論だと私は思う．

そのような観点に立って，古典力学のさまざまな定式化の中でも量子力学への橋渡しとして適切な役割を演じているハミルトン形式の古典力学を概説する．物理学は観測者によらない普遍な法則を明らかにしようとする学問なので，座標系によらない数学的概念の記述体系である幾何学は，物理学との相性がよい．そこで，ハミルトン力学の幾何学的定式化を述べ，ポアソン代数から非可換代数への移行を実施するプロジェクトとし

---

[1]研究会『量子と古典の物理と幾何学』，名古屋大学にて 2015 年 4 月 25 日講演.

[2]`e-mail: tanimura[AT]is.nagoya-u.ac.jp`

て量子化を位置づける．量子化の実装方法として，ハイゼンベルク・ボルン・ヨルダン・ディラックが創始しストーン・フォンノイマンが数学的に整備した正準量子化と，幾何学的量子化と，変形量子化という 3 通りの流儀を概観する．

2 講演

実際の講演はホワイトボードに式や図を手描きしながら行った．講演の詳細をタイプで清書する時間がないので，手書きのノートをここに掲載することにする．また，参考文献のリストを掲げておく．

参考文献

[1] R. Abraham and J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, AMS Chelsea Pub, 2nd ed. (2008). Theorem 5.4.9 に Groenewald, van Hove の定理の証明が書かれている．

[2] V. Guillemin and S. Sternberg, *Symplectic Techniques in Physics*, Cambridge University Press (1984).

[3] N. Woodhouse, *Geometric Quantization*, Clarendon, Oxford (1980).

[4] J. Śniatycki, *Geometric Quantization and Quantum Mechanics*, Springer-Verlag (1980).

[5] J.-M. Souriau, *Structure of Dynamical Systems: A symplectic View of Physics*, translated by C.H. Cushman-de Vries, Birkhäuser (1997).

[6] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer, “Deformation theory and quantization I. Deformations of symplectic structure,” Ann. Phys. **111**, 61-110 (1978); “II. Physical applications,” Ann. Phys. **111**, 111-151 (1978).

[7] I. A. Batalin and I. V. Tyutin, “Quantum geometry of symbols and operators,” Nucl. Phys. B **345**, 645-658 (1990).

[8] 小嶋泉「量子場とミクロ・マクロ双対性」丸善出版 (2013).

[9] 谷村省吾「量子古典対応—量子化の技法，古典系創発の機構」数理科学 50 巻 4 号, 19-25 (サイエンス社, 2012 年 4 月).

[10] 谷村省吾「量子力学—歴史・骨子・展開，そして基礎付け」数理科学 53 巻 2 号, 26-32 (サイエンス社, 2015 年 2 月).

$X = X_H + \frac{\partial}{\partial t}$ $\quad \Omega = \omega - dH \wedge dt$

$0 = \Omega(X, \cdot) = \omega(X_H, \cdot) - \langle dH, X_H \rangle dt \cancel{- \frac{\partial H}{\partial t} dt}$

$= \omega(X, \cdot) - \langle dH, X \rangle dt + dH \langle dt, X \rangle$

$= \omega(X_H, \cdot) - \langle dH, X_H \rangle dt + dH$

$\therefore \begin{cases} \omega(X_H, \cdot) = -dH & \left(\text{or} \quad \omega(\cdot, X_H) = dH \right) \\ \text{and} \\ \langle dH, X_H \rangle = 0 \end{cases}$

Def Hamilton vector field $\qquad X_H = \omega^{-1}(\cdot, dH)$

$H \in C^\infty(M)$ に対し $\omega(\cdot, X_H) = dH$ 形式的に $X_H = \omega^{-1}(dH)$

を満たす X_H のこと. とも書く.

$X_H = \sum_i \left(\dot{p}_i \frac{\partial}{\partial p_i} + \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} \right)$ $\quad \omega = \sum dp_i \wedge dq^i$ の場合,

$\omega = \omega_{\alpha\beta} dz^\alpha \wedge dz^\beta$

$\omega_{\alpha\beta} dz^\alpha \cdot X^\beta$

$\omega(\cdot, X_H) = dp_i \, \dot{q}^i - dq^i \, \dot{p}_i \qquad dH = \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i$

$= \frac{\partial H}{\partial z^\alpha} dz^\alpha$.

$\therefore \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$

$\omega_{\alpha\beta} X^\beta = \frac{\partial H}{\partial z^\alpha}$

このとき $\langle dH, X_H \rangle = \omega(X_H, X_H) = 0$ は自動的に満たされる.

$X^\alpha = \omega^{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial z^\beta}$

Def Poisson bracket (~~Lagrange bracket~~)

~~$F, H \in C^\infty(M)$~~ に対し

ω: symplectic form $\qquad \omega : TM_{(1)} \times TM_{(2)} \to \mathbb{R}$ nondegen

標準形, $\omega = \sum_i dp_i \wedge dq^i$ に対して $\qquad \omega : TM_{(2)} \to T^*M_{(1)}$ 全単射

$\omega^{-1} = \sum_i \frac{\partial}{\partial q^i} \otimes \frac{\partial}{\partial p_i}$ $\qquad \omega^{-1} : T^*M_{(2)} \to TM_{(1)}$

$\omega^{-1} : T^*M_{(1)} \times T^*M_{(2)} \to \mathbb{R}$

$\omega^{-1} = \omega^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial z^\beta}$ $\qquad \omega^{-1} \quad M \to TM \otimes TM_{(2)}$

$\{A, B\} = \omega^{-1}(dA, dB) = X_B \cdot A = -X_A B = -\omega(X_F, X_H)$

$\{F, H\}_P = \omega^{-1}(dF, dH) = \langle dF, X_H \rangle = -\langle dH, X_F \rangle$ $\quad = \omega(\cdot, X_H)$

Def Hamilton eq for observable

$A \in C^\infty(M)$

$$\frac{dA}{dt} = X_H A = \{A, H\}.$$

$$d\omega(X_A, X_B, X_C) = \sum_{\substack{\text{cyclic}\\ \text{permutation}}} \left\{ X_A\,\omega(X_B, X_C) - \omega([X_A, X_B], X_C) \right\} = \sum \left(\{A,\{B,C\}\} + \underbrace{\omega(X_{\{A,B\}}, X_C)}_{\sim\ \text{"}\{\{A,B\},C\}\text{"}} \right)$$

Theorem

ω: closed form $\Longleftrightarrow$ Poissonbracket が Jacobi identity を満たす.

Properties

Leibniz rule $\{A, BC\}_p = \{A,B\}_p C + B\{A,C\}_p$

anti-homorphism

$$X_{\{A,B\}} = -[X_A, X_B] \qquad X_{p_i} = \frac{\partial}{\partial q^i} \qquad X_{q^i} = -\frac{\partial}{\partial p_i}$$

$$X : (C^\infty(M), \{\,\}) \longrightarrow (\mathfrak{X}(M), [\,,])$$

$$\begin{aligned} X_{\{A,B\}} C &= \langle dC, X_{\{A,B\}} \rangle \\ &= \{C, \{A,B\}\} \\ &= -\{A,\{B,C\}\} - \{B,\{C,A\}\} \\ &= -X_A X_B C + X_B X_A C \end{aligned}$$

$\omega(\ , X_C) = dC$

$\omega(X_B, X_C) = X_B dC = \{B, C\}$

$X_A\,\omega(X_B, X_C) = X_A(X_B dC)$

$X_B\,\omega(X_A, X_C) = X_B(X_A dC)$

$[X_A, X_B]\,C$

Def ~~integrability~~

Def Lie 代数として

A は V の generator という.

vectorfield V が Hamilton vector field $:\Longleftrightarrow\ {}^{\exists}A \in C^\infty(M)$ $V = X_A$; $V \in \mathfrak{X}_{Ham}(M)$

local Ham ve $:\Longleftrightarrow\ {}^{\exists}U_\alpha \underset{\text{open}}{\subset} M$, $A \in C^\infty(U)$ $V = X_{A_\alpha}$

Lie alg となる

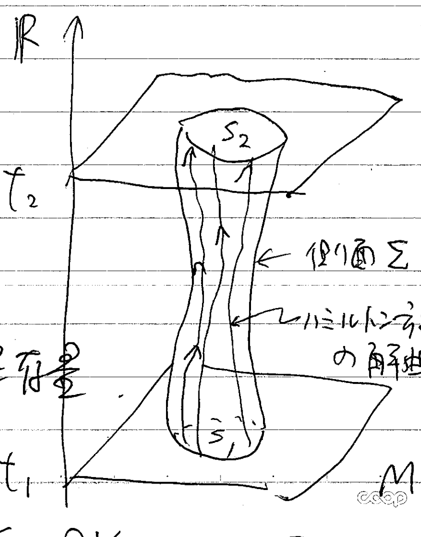
$\mathfrak{X}_{Ham}(M) \subset \mathfrak{X}_{loc}(M)$

subset

ideal

$A_\alpha - A_\beta = C_{\alpha\beta} = \text{const}$

$$[X_H, X_{A_\alpha}] = X_{-\{H, A_\alpha\}}$$



Def 保存量 ハミルトン系 (M, ω, H) において,

$I \in C^\infty(M)$ $\{I, H\} = 0$

1本の軌跡に伴う保存量

Theorem I_1, I_2 が保存量 $\Rightarrow$ $\{I_1, I_2\}$ も保存量.

無数の

Theorem Poincaré の保存量

$\Omega = \omega - dH \wedge dt$ は closed form $S_2 - S_1 + \Sigma = \partial V$

$$0 = \int_V d\Omega = \int_{\partial V} \Omega = \int_{S_2} \Omega - \int_{S_1} \Omega + \int_\Sigma \Omega = \int_{S_2} \omega - \int_{S_1} \omega + 0 \quad \therefore \int_{S_1} \omega = \int_{S_2} \omega.$$

Def ハミルトン系 (M, ω, H) が integrable

$\dim M = 2n$ のとき　　　各点において局所独立

$\exists I_1, I_2, \cdots I_n \in C^\infty(M)$ 関数的に独立 i.e. $dI_i \wedge dI_j \neq 0$

かつ

Liouville　　　$\{I_a, H\} = 0$　　　$\{I_a, I_b\} = 0$

Theorem (M, ω, H) が integrable で

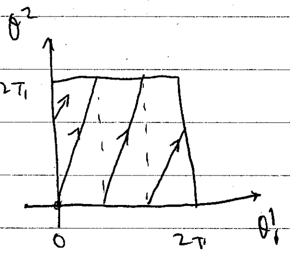
levelset $H^{-1}(e) \subset M$ が コンパクト

ならば　$H^{-1}(e)$ は n次元トーラス T^n に同相で、

運動は $H = f(I_1, I_2, \cdots, I_n)$

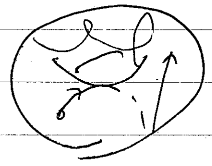
action-angle variable

$$\omega = \sum_a dI_i \wedge d\theta^i \qquad I_a = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_a} p_{ai}\, dq^i$$



$$\frac{d\theta^i}{dt} = \{\theta^i, H\} = \frac{\partial H}{\partial I_i} = \omega^i$$

運動は T^n 上の準周期運動である。



量子化

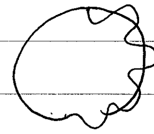
~~Heisenberg Bohr~~ Einstein $E = h\nu$

de Broglie $p = \frac{h}{\lambda}$

定在波条件:

Bohr $L = n\hbar = n\frac{h}{2\pi}$

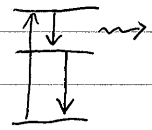
$2\pi r = n\cdot\lambda$



$$L = r\cdot p = r\cdot\frac{h}{\lambda} = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

Ishihara-Wilson-Sommerfeld $\oint p_i dq_i = n\cdot h$

Heisenberg $Q_{ab}(t) = Q_{ab}\, e^{i(E_a - E_b)t/\hbar}$



$$\sum_b A_{ab}(t) B_{bc}(t) = \sum_b A_{ab} B_{bc}\, e^{i\{(E_a - E_b) + (E_b - E_c)\}t/\hbar}$$

$$(E_a - E_c)$$

$$P(t) = P_{ab}\, e^{i(E_a - E_b)t/\hbar}$$

$$Q(t) = Q_{bc}\, e^{i(E_b - E_c)t/\hbar}$$

$$J = \frac{1}{2\pi}\oint P\,dQ = \frac{1}{2\pi}\oint P\frac{dQ}{dt} = n\cdot\hbar$$

$$J_{ac} \quad \frac{1}{2\pi}\,\frac{\hbar}{i(E_a - E_c)}\sum_b P_{ab} Q_{bc}\left(e^{i(E_a - E_c)T/\hbar} - 1\right) = n\hbar$$

周期運動 $P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{in\omega t}$ $\quad \omega = \frac{2\pi}{T}$

$Q = \sum_n Q_n e^{in\omega t}$ $\quad Q$

$$J_k = \frac{1}{2\pi}\oint P\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2\pi i}\sum_n \cancel{P_n}\, n\, P_{-n} Q_n \,\omega T = -i\sum_n n P_{-n} Q_n = k\hbar$$

$$\cancel{1 = -i\frac{\partial}{\partial J}}\ \Delta J = J_{k+1} - J_k = -i\sum_n n\Delta(P_{-n}\cdot Q_n) = \hbar$$

$$\sum_n \left\{ \cancel{P_{m-n,l}}\, Q_{l,m+n} - P_{ml}\, Q_{ln} \right\} = i\hbar$$

$\qquad P_{l,m+n,l}$

$n\Delta Q_n = Q_{l,m+n} - Q_{l,m}$

$n\Delta P_{-n} = P_{m+n,l} - P_{m,l}$

$$\sum_n \left(Q_{l,m+n}\cdot P_{m+n,l} - P_{m,l}\, Q_{l,n} \right) = i\hbar$$

Diracの発見法

$$\{A_1A_2, B_1B_2\} = A_1\{A_2, B_1B_2\} + \{A_1, \{B_1B_2\}\}A_2$$

$$= \underline{A_1\{A_2, B_1\}B_2} + A_1B_1\underline{\{A_2, B_2\}} + \{A_1, B_1\}B_2A_2 + B_1\{A_1B_2\}A_2$$

$$\|$$

$$\{A_1A_2, B_1B_2\} = \{A_1A_2, B_1\}B_2 + B_1\{A_1A_2, B_2\}$$

$$= \underline{A_1\{A_2, B_1\}B_2} + \{A_1, B_1\}A_2B_2 + B_1A_1\underline{\{A_2, B_2\}} + B_1\{A_1, B_2\}A_2$$

$$\downarrow$$

$$(A_1B_1 - B_1A_1)\{A_2B_2\} = \{A_1B_1\}(A_2B_2 - B_2A_2)$$

$$\{A_1B_1\}^{-1}(A_1B_1 - B_1A_1) = (A_2B_2 - B_2A_2)\{A_2B_2\}^{-1}$$

$= \text{universal constant}$

$= i\hbar$

$$\boxed{A_1B_1 - B_1A_1 = i\hbar\{A_1B_1\}}$$

古典力学系		量子力学系
$A \in C^\infty(M)$	$\rightsquigarrow$	$\hat{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$
$A: M \to \mathbb{R}$ smooth		$\hat{A}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ linear
		$\hat{A}^\dagger = \hat{A}$
Poissonbracket	$\rightsquigarrow$	commutator
$\{A, B\}$		$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar\widehat{\{A, B\}}$
equation of motion		
$\frac{dA}{dt} = \{A, H\}$		$i\hbar\frac{d\hat{A}}{dt} = [\hat{A}, \hat{H}]$

$$A \xrightarrow{\text{量子化 arrow}} \hat{A}$$

でもこの移行は本当に達成できるのか？

Stone-vonNeumannの定理 $[Q, Q] = 0$ $[P, P] = 0$ (可換)

$\hat{Q}^a$ $\hat{P}_b$ $a, b = 1, 2, \cdots, n$ $[\hat{Q}^a, \hat{P}_b] = i\hbar\delta_{ab}$

をself adjoint operatorとし、CCRを満たすような既約Hilbert空間は

$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ $\hat{Q}^a\psi(q^1 \dots q^n) = q^a\psi$ $\hat{P}_a\psi = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q^a}\psi$ というものにユニタリ同値である

Gröenewald (1946), van Hove (1951) の定理.

$(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ 標準シンプレクティック空間

0) $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^r)$ Hilbert sp　　r : 有限 波動関数 $\psi(q^1, q^2, \cdots, q^n)$

$\wedge : \mathcal{P}(\mathbb{R}^{2n}) \longrightarrow \mathcal{L}(~~L^2(\mathbb{R}^n,~~ \mathcal{H})$

多項式 P　$A \longmapsto \hat{A}$

i) A が $\mathbb{R}$-valued ~~ならば~~ $\Rightarrow \hat{A}$: self-adjoint

ii) 対応 $A \longrightarrow \hat{A}$ は $\mathbb{R}$上 linear

iii) $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar \{A, B\}^\wedge$

iv) ~~$\hat{1} = id$~~　$\hat{1} = id_{\mathcal{H}}$

v) $\hat{q}^k = q^k$による掛け算演算子　$\hat{p}_k = -i\hbar \dfrac{\partial}{\partial q^k}$

以上を満たすような写像 $\wedge$ は存在しない。

Geometric Quantization　仮定 0) をあきらめる.

ひどく面倒 Hilbert sp の構成が　~~有~~無限次元の可約表現 を使う.

Deformation Q　仮定 iii) をあきらめる.

C^*-algebra にならない.
結果, Hilbert sp 構成に至らない.　$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar \{A B\} + \underbrace{\hbar^2 \hat{O}_2 + \hbar^3 \hat{O}_3 + \cdots}_{\text{高次の補正項}}$

$\boxed{\text{algebra and state}}$

古典論　$\rightsquigarrow$　量子論

可換代数　　非可換　GNS

Gelfand-Naimark　関数環

Radon-Markov-~~Segal~~ ~~Riesz~~ Riesz-　確率測度　可換部分代数ごとに~~解~~確率確定する.

Geometric Quantization. Woodhouse (1980)

(M, ω) symp. mfd として

$A \in C^\infty(M) \qquad \psi \in C^\infty(M;\mathbb{C})$

$\hat{A}\psi := \frac{1}{2}(A - i\hbar X_A)\psi$

$[\hat{A}, \hat{B}] = \left(-i\hbar X_A B + i\hbar X_B A + (-i\hbar)^2 [X_A, X_B]\right)\cdot\frac{1}{4}$

$= \left(i\hbar\{A,B\} + i\hbar\{A,B\} - (-i\hbar)^2 X_{\{A,B\}}\right)\cdot\frac{1}{4}$

$\frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{B}] = \frac{1}{2}\left(\{A, B\}\right.$

Deformation Quantization

Mayal 積 star 積

$(A * B)(q,p) = A\, e^{\frac{i\hbar}{2}\sum_j\left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q_j}} \otimes \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p_j}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p_j}} \otimes \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q_j}}\right)} B$ Bayen Flato Fronsdal Lichnerowicz, Sternheimer (1978)

$(A * B)(z) = \frac{1}{(\pi\hbar)^{n/2}}\int e^{\frac{4}{i\hbar}\Delta(z, z_1, z_2)} A(z_1) B(z_2)\, d\omega(z_1) d\omega(z_2)$ Batalin-Tyutin (1990)

$$\left([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}\right)\psi = -\frac{i}{\hbar}\omega(X,Y)\psi$$

Geometric Quantization

(M, ω) symplectic mfd

$M = \bigcup_\alpha U_\alpha$ α ごとに θ_α 1-form $\omega = d\theta_\alpha$

θ_α を connection form として symplectic potential

$A \in C^\infty(M)$, $\psi \in C^\infty(M; \mathbb{C})$

$$\hat{A}\psi = \left(A \cdot - i\hbar\nabla_{X_A}\right)\psi = \left(A \cdot - i\hbar\left(X_A - \frac{i}{\hbar}\theta_\alpha(X_A)\right)\right)\psi$$

$$\cancel{[\hat{A}, \hat{B}]\psi = \left\{-i\hbar\left(\nabla_{X_A}B - \nabla_{X_B}A\right) + (-i\hbar)^2[\nabla_{X_A}, \nabla_{X_B}]\right\}\psi}$$

$$\cancel{= \left\{-i\hbar\left(\underline{X_A}B - \frac{i}{\hbar}\theta_\alpha(X_A)B - \underline{X_B}A + \frac{i}{\hbar}\theta_\alpha(X_B)A\right) - (i\hbar)^2\nabla_{[X_A X_B]} + \omega(X_A X_B)\right\}\psi}$$

$$\nabla_{X_{\{A,B\}}}$$

$$\hat{A}\psi = (A \cdot - i\hbar\nabla_{X_A})\psi \qquad \nabla_X = X - \frac{i}{\hbar}\theta(X)$$

$$= \left(A \cdot - i\hbar X_A - \theta_\alpha(X_A)\right)\psi$$

$$[\hat{A}, \hat{B}]\psi = (-i\hbar)^2[X_A, X_B] - i\hbar X_A B + i\hbar X_B A + i\hbar\{X_A\theta(X_B) - X_B\theta(X_A)\}$$

$$= -(-i\hbar)^2 X_{\{A,B\}} + i\hbar\{A,B\} + i\hbar\{A,B\} + i\hbar\{d\theta(X_A, X_B) + \theta([X_A, X_B])\}$$

$$= i\hbar\left(-i\hbar X_{\{A,B\}}\right) + 2i\hbar\{A,B\} + i\hbar\underbrace{\omega(X_A X_B)}_{-\{A,B\}} - i\hbar\theta(X_{\{A,B\}})$$

$$= i\hbar\left\{-i\hbar X_{\{A,B\}} + \{A,B\} - \theta(X_{\{A,B\}})\right\}$$

$$= i\hbar\widehat{\{A,B\}}.$$

ただし θ_α が global connection を定めるためには、

$$\theta_\alpha - \theta_\beta = \varphi_{\alpha\beta} \quad : \text{closed 1-form}$$

$$= d\lambda_{\alpha\beta} \qquad \lambda_{\alpha\beta} \ 0\text{-form}$$

$$\psi_\alpha(x) = e^{\frac{i}{\hbar}\lambda_{\alpha\beta}}\psi_\beta \qquad \lambda_{\alpha\beta} + \lambda_{\beta\gamma} + \lambda_{\gamma\alpha} = 2\pi\hbar \cdot n_{\alpha\beta\gamma}$$

C closed 2 chain

$\int_C \omega = 2\pi\hbar \cdot n$ でなくてはならない: 量子化条件.

1 form θ $\quad \mathcal{L}_V \theta = V \lrcorner\, d\theta - \theta([V, \cdot\,])$

$$= (d\theta)(V, \cdot\,) - \theta([V, \cdot\,])$$

$V \langle \theta, X \rangle$

No. 11

vector X $\quad \mathcal{L}_V X = [V, X]$

$$V^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}(\theta_\mu X^\mu) = \partial_\nu \theta_\mu V^\nu X^\mu + \theta_\mu V^\nu \partial_\nu X^\mu$$

$$= (\partial_\nu \theta_\mu - \partial_\mu \theta_\nu) V^\nu X^\mu + \partial_\mu \theta_\nu V^\nu X^\mu + \theta_\mu (V^\nu \partial_\nu X^\mu - X^\nu \partial_\nu V^\mu) + \theta_\mu X^\nu \partial_\nu V^\mu$$

$$\mathcal{L}_V \langle \theta, X \rangle = \langle \mathcal{L}_V \theta, X \rangle + \langle \theta, \underbrace{\mathcal{L}_V X}_{[V,X]} \rangle$$

~~Hilbert spa 構成 polarization~~

$$\Omega = \omega - dH \wedge dt \qquad X = X_H + \frac{\partial}{\partial t}$$

$$0 = \Omega(\circ, X) = \omega(\circ, X_H) - dH + \langle dH, X_H \rangle dt$$

$$\omega_{\mu\nu} X^\nu = \frac{\partial H}{\partial z^\mu} \leftarrow \omega(\circ, X_H) = dH$$

$$X_H = \omega^{-1}(dH)$$

$$X^\mu = \omega^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial z^\nu}$$

$$\omega(V, X_H) = \langle dH, V \rangle$$

$$\omega(V, X_A) = \langle dA, V \rangle$$

$$= (d\theta)(V, X) + \theta([V, X]) + X \langle \theta, V \rangle$$

$$\frac{dA}{dt} = X_H A = \langle dA, X_H \rangle = \omega(X_H, X_A) = \{A, H\}$$

$$-X_A H = \qquad -\omega(X_A, X_H)$$

$$X_{\{A,B\}} C = -X_C \{A, B\} = X_C\, \omega(X_A, X_B)$$

$$= d\omega(X_C, X_A, X_B) + \omega([X_C, X_A], X_B) + \omega(X_A, [X_C, X_B])$$

$$X_A X_B C = X_A \langle X_B, \omega(\cdot, X_C) \rangle \qquad dC = \omega(\cdot, X_C)$$

$$= \cancel{X_A}, \qquad 0 = ddC = d\,\omega(\cdot, X_C)$$

$$= \langle [X_A, X_B], \omega(\circ X_C) \rangle + \langle X_B, \mathcal{L}_{X_A} \omega(\cdot\, X_C) \rangle$$

$[X_A, X_B] = -X_{\{A,B\}}$ を示したい.

$$X_A \lrcorner\, \underbrace{d[\omega(\circ X_C)]}_{ddC = 0} - \underset{\overset{\|}{+d\{A,C\}}}{d[\omega(X_A, X_C)]}$$

$$V\langle \theta, X \rangle - X \langle \theta, V \rangle = (d\theta)(V, X) + \theta([V, X])$$

$[X_A, X_B] C$

$= X_A X_B C \;-\; X_B X_A C \qquad =$

$= X_A \langle dC, X_B \rangle - X_B \langle dC, X_A \rangle$

$= (d^2 C)(X_A, X_B) + dC([X_A, X_B])$

$$\omega(\circ, X_{\{A,B\}}) = d\{A, B\} = -d(\omega(X_A, X_B))$$

$dA = \omega(\cdot, X_A) = dA$

$X_B \cdot A$

$\langle X_B, dA \rangle = +\omega(X_B, X_A) = -\omega(X_A, X_B) = \{A, B\}$

$-X_A \cdot B = -\langle X_A, dB \rangle$

$[X_A, X_B] = -X_{\{A,B\}}$ を示したい.

$[X_A, X_B]C = X_A X_B C - X_B X_A C = -X_A X_c B + X_B X_c A$

$\cancel{= X_A \langle dC, X_B \rangle - X_B \langle dC, X_A \rangle}$

$= X_A \cdot \omega(X_B, X_C) - X_B \cdot \omega(X_A, X_C)$

$X_{\{A,B\}} C = \omega(X_{\{A,B\}}, X_C)$

$= -X_c \{A, B\}$

$= +X_c X_A B = -X_c X_B A$

$= -X_{X_A B} C$

$[X_A, X_B]C + X_{\{A,B\}} C$

$= X_A X_B C - X_B X_A C - X_c \{A, B\}$

$= -X_A X_c B + X_B X_c A + X_c X_A B$

$= \{A\{B\,C\}\} + \{B\{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\}$

2-form ω

$d\omega(X_1, X_2, X_3) = X_1[\omega(X_2, X_3)] + X_2[\omega(X_3, X_1)] + X_3[\omega(X_1, X_2)]$

$- \omega([X_1 X_2] X_3) - \omega([X_2, X_3] X_1) - \omega([X_3 X_1] \cdot X_2)$

$\omega([Y, Z], \cdot) = \mathcal{L}_Y \omega(Z, \cdot) - (\mathcal{L}_Y \omega)(Z, \cdot)$

$= i_Y d[\omega(Z, \cdot)] + d[\omega(Z, Y)]$

$$dA = \omega(\circ, X_A)$$

$$\underset{\underset{-X_A \cdot B = -\langle dB, X_A\rangle}{\shortparallel}}{X_B \cdot A} = \langle dA, X_B\rangle = \omega(X_B, X_A) = -\omega(X_A, X_B) = \{A, B\}$$

$$\mathcal{L}_{X_A}\omega = i_{X_A} d\omega + d\, i_{X_A}\omega = \underset{\substack{d\omega = 0 \\ \text{closed}}}{0} + \underset{\substack{\text{definition} \\ \text{of ham vect field.}}}{d(-dA)} = 0.$$

$$\begin{aligned} i_{[X_A, X_B]}\omega &= \omega([X_A, X_B], \circ) \\ &= \mathcal{L}_{X_A} i_{X_B}\omega - i_{X_B}\mathcal{L}_{X_A}\omega \\ &= \mathcal{L}_{X_A}(-dB) - 0 \\ &= -d\,\mathcal{L}_{X_A} B \\ &= -d(X_A B) \\ -\omega(\circ, [X_A, X_B]) &= +d\{A, B\} \\ &= \omega(\circ, X_{\{A,B\}}) \end{aligned}$$

$$\therefore\ [X_A, X_B] = -X_{\{A,B\}}.$$

$$\underset{\text{Lie alg}}{\mathcal{X}_{Ham}} \underset{\text{ideal}}{\subset} \mathcal{X}_{local\ Ham} \subset \mathcal{X}$$