

# ハミルトン力学の幾何学的定式化と 幾何学的量子化・変形量子化<sup>1</sup>

谷村 省吾<sup>2</sup>

名古屋大学大学院情報科学研究科

## 1 概要

マクロ系の物理は古典力学で記述され、ミクロ系の物理は量子力学で記述される。マクロのもの（人間・天体など）はミクロのもの（原子・電子など）で構成されている。端的に言えば、マクロはミクロから出来ている、ということになる。「...は...から出来ている」、made of, consist of という関係にあるという意味で、マクロの物理法則よりもミクロの物理法則の方がより基本的であると考えられる。

一方で、我々、マクロ系であるところの人間は、古典力学の方が理解しやすく、量子力学に先だって古典力学を認識してきたし、古典力学からの類推にある程度助けられて量子力学を作り上げてきた。古典力学のモデルから量子力学のモデルへ移行する手続きは量子化 (quantization) と呼ばれる。量子化は、写像のような数学的に厳密に定義された手続きではなく、ある種の「当て推量」である。

古典系から量子系に向かう矢が量子化だとすれば、量子系から古典系に向かう矢は、古典近似・古典極限といった漸近操作のこともあるし、そもそもミクロ系には明示的に備わっていなかったマクロ物理量の創発という面もある。

私は、量子化は reverse engineering である、と言いたい。Reverse engineering とは、完成品である工業製品をいじってみることによって、その動作原理や製造方法、設計図などの見当をつける作業のことを言う。現実に我々がやっていることを虚心坦懐に見つめれば、我々は原子や電子が組み合わさってできたマクロの物体・現象を観察・操作することによって、ミクロの世界のなりたち・しくみについて見当をつけているのである。そのような「見当づけ」をある程度システムティックにやろうとするのが「量子化」という推論だと私は思う。

そのような観点に立って、古典力学のさまざまな定式化の中でも量子力学への橋渡しとして適切な役割を演じているハミルトン形式の古典力学を概説する。物理学は観測者によらない普遍的な法則を明らかにしようとする学問なので、座標系によらない数学的概念の記述体系である幾何学は、物理学との相性がよい。そこで、ハミルトン力学の幾何学的定式化を述べ、ポアソン代数から非可換代数への移行を実施するプロジェクトとし

<sup>1</sup>研究会『量子と古典の物理と幾何学』, 名古屋大学にて 2015 年 4 月 25 日講演。

<sup>2</sup>e-mail: tanimura[AT]is.nagoya-u.ac.jp

て量子化を位置づける．量子化の実装方法として，ハイゼンベルク・ポルン・ヨルダン・ディラックが創始しストーン・フォンノイマンが数学的に整備した正準量子化と，幾何学的量子化と，変形量子化という3通りの流儀を概観する．

## 2 講演

実際の講演はホワイトボードに式や図を手描きしながら行った．講演の詳細をタイプで清書する時間がないので，手書きのノートをここに掲載することにする．また，参考文献のリストを掲げておく．

## 参考文献

- [1] R. Abraham and J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, AMS Chelsea Pub, 2nd ed. (2008). Theorem 5.4.9 に Groenewald, van Hove の定理の証明が書かれている．
- [2] V. Guillemin and S. Sternberg, *Symplectic Techniques in Physics*, Cambridge University Press (1984).
- [3] N. Woodhouse, *Geometric Quantization*, Clarendon, Oxford (1980).
- [4] J. Śniatycki, *Geometric Quantization and Quantum Mechanics*, Springer-Verlag (1980).
- [5] J.-M. Souriau, *Structure of Dynamical Systems: A symplectic View of Physics*, translated by C.H. Cushman-de Vries, Birkhäuser (1997).
- [6] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer, “Deformation theory and quantization I. Deformations of symplectic structure,” *Ann. Phys.* **111**, 61-110 (1978); “II. Physical applications,” *Ann. Phys.* **111**, 111-151 (1978).
- [7] I. A. Batalin and I. V. Tyutin, “Quantum geometry of symbols and operators,” *Nucl. Phys. B* **345**, 645-658 (1990).
- [8] 小嶋泉「量子場とミクロ・マクロ双対性」丸善出版 (2013).
- [9] 谷村省吾「量子古典対応—量子化の技法，古典系創発の機構」*数理科学* 50 巻 4 号, 19-25 (サイエンス社, 2012 年 4 月).
- [10] 谷村省吾「量子力学—歴史・骨子・展開，そして基礎付け」*数理科学* 53 巻 2 号, 26-32 (サイエンス社, 2015 年 2 月).



$$X = X_H + \frac{\partial}{\partial t} \quad \Omega = \omega - dH \wedge dt$$

$$0 = \Omega(X, \cdot) = \omega(X_H, \cdot) - \langle dH, X_H \rangle dt - \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

$$= \omega(X, \cdot) - \langle dH, X \rangle dt + dH \langle dt, X \rangle$$

$$= \omega(X_H, \cdot) - \langle dH, X_H \rangle dt + dH$$

$$\therefore \begin{cases} \omega(X_H, \cdot) = -dH & (\text{or } \omega(\cdot, X_H) = dH) \\ \text{and} \\ \langle dH, X_H \rangle = 0 \end{cases}$$

Def Hamilton vector field

$$X_H = \omega^{-1}(\cdot, dH)$$

$H \in C^\infty(M)$   $\Rightarrow \exists!$   $\omega(\cdot, X_H) = dH$  并满足的  $X_H = \omega^{-1}(dH)$   
 $\Sigma$  满足  $T_2 \exists X_H$   $\alpha = z$  (2)  $X_H$

$$X_H = \sum_i \left( \dot{p}_i \frac{\partial}{\partial p_i} + \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial q_i} \right) \quad \omega = \sum dp_i \wedge dq_i \quad \omega = \omega_{\alpha\beta} dz^\alpha \wedge dz^\beta$$

$$\omega(\cdot, X_H) = dp_i \dot{q}_i - dq_i \dot{p}_i \quad dH = \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$\omega_{\alpha\beta} X_H^\beta = \frac{\partial H}{\partial z^\alpha}$$

$\exists \alpha \exists z \langle dH, X_H \rangle = \omega(X_H, X_H) = 0$  是自动的  $\Rightarrow$  满足  $T_2$  条件.

$$X_H^\alpha = \omega^{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial z^\beta}$$

Def Poisson bracket (~~Dirac Lagrange bracket~~)

~~$F, H \in C^\infty(M)$~~   $\Gamma = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$

$\omega$ : symplectic form

标准形,  $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$

$$\omega^{-1} = \sum \frac{\partial}{\partial q_i} \otimes \frac{\partial}{\partial p_i}$$

$$\omega = TM_{(1)} \times TM_{(2)} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{nondegen}$$

$$\omega : \mathcal{D} \quad TM_{(1)} \rightarrow T^*M_{(2)} \quad \text{全单射}$$

$$\omega^{-1} : T^*M_{(2)} \rightarrow TM_{(1)}$$

$$\omega^{-1} : T^*M_{(1)} \times T^*M_{(2)} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega^{-1} = \omega^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial z^\beta}$$

$$\omega^{-1} : M \rightarrow TM \otimes TM \quad \text{coop}$$

$$\{F, H\}_\omega = \omega^{-1}(dF, dH) = \omega^{-1} \langle dF, X_H \rangle = - \langle dH, X_F \rangle = -\omega(X_F, X_H)$$

Def Hamilton eq for observable

$$A \in C^\infty(M)$$

$$\frac{dA}{dt} = X_H A = \{A, H\}$$

$$d\omega(X_A, X_B, X_C) = \sum_{\text{cyclic permutation}} \left\{ X_A \omega(X_B, X_C) - \omega([X_A, X_B], X_C) \right\} = \sum \left( \{A, \{B, C\}\} + \omega(X_{\{A, B\}}, X_C) - \{A, \{B, C\}\} \right)$$

Theorem

$\omega = \text{closed form} \iff$  Poisson bracket  $\gamma^n$  Jacobi identity  $\in \mathbb{R}^n$

Properties

Leibniz rule  $\{A, BC\}_p = \{A, B\}_p C + B \{A, C\}_p$

anti-homomorphism  
 $X_{\{A, B\}} = -[X_A, X_B]$   
 $X_{\{A, B\}} C = \langle dC, X_{\{A, B\}} \rangle = \{C, \{A, B\}\}$

$$X_{p_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}$$

$$X_{q_i} = -\frac{\partial}{\partial p_i}$$

$$\omega(\cdot, X_C) = dC$$

$$\omega(X_B, X_C) = X_B dC = \{B, C\}$$

$$X_A \omega(X_B, X_C) = X_A \{B, C\}$$

$$= -\{A, \{B, C\}\} - \{B, \{C, A\}\}$$

$$= -X_A X_B C + X_B X_A C \rightarrow$$

$$X_B \omega(X_A, X_C) = X_B \{A, C\}$$

$$= [X_A, X_B] C$$

Def integrability

Def Lie algebra

vector field  $X$   $\iff$  Hamilton vector field  $\iff \exists A \in C^\infty(M) \quad X = X_A$

$A \neq V$  of generator  $\{u\}$ .

Lie algebra  $\iff$  local Ham ve  $\iff \exists U \subset M, \text{open}, A \in C^\infty(U) \quad V = X_{A_\alpha}$

$$\mathcal{X}_{\text{Ham}}(M) \subset \mathcal{X}_{\text{loc}}(M)$$

subset

ideal

$$A_\alpha - A_\beta = C_{\alpha\beta} = \text{const}$$

$$[X_H, X_{A_\alpha}] = X_{-\{H, A_\alpha\}}$$

Def 保存量

$$I \in C^\infty(M)$$

$$\{I, H\} = 0$$

1本の軌道に伴う保存

Theorem

$I_1, I_2$   $n$  保存量  $\implies \{I_1, I_2\}$  も保存量

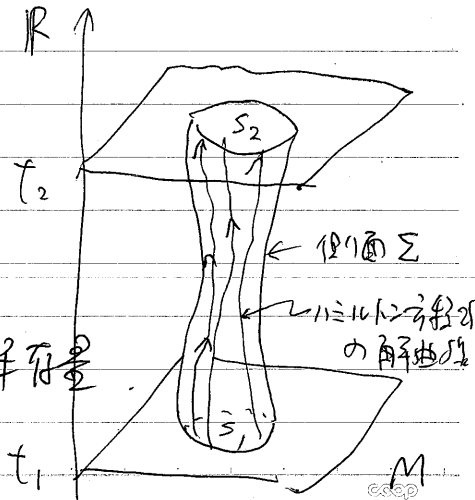
無数の

Theorem

Poincaré の保存量

$$\Omega = \omega - dHndt \text{ is closed form } S_2 - S_1 + \Sigma = \partial V$$

$$0 = \int_V d\omega \wedge \Omega = \int_{\partial V} \Omega = \int_{S_2} \Omega - \int_{S_1} \Omega + \int_{\Sigma} \Omega = \int_{S_2} \omega - \int_{S_1} \omega + 0 \therefore \int_{S_1} \omega = \int_{S_2} \omega$$



Def  $n \geq 1, k \geq 2, \bar{M} (M, \omega, H)$  が  $n$  integrable

$\dim M = 2n$  かつ

各点において局所独立

$\exists I_1, I_2, \dots, I_n \in C^\infty(M)$  関数的に独立 i.e.  $dI_i \wedge dI_j = 0$

Liouville

$\{I_a, H\} = 0$

$\{I_a, I_b\} = 0$

Theorem  $\bar{M} (M, \omega, H)$  が integrable ならば

$H$

level set  $H^{-1}(e) \subset M$  が  $2n-1$  次元

多様体

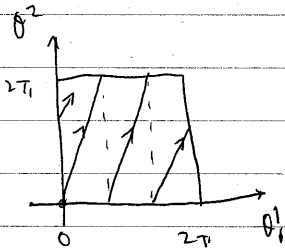
$H^{-1}(e)$  は  $n$  次元  $T^n$  に同相

$H = f(I_1, I_2, \dots, I_n)$

action-angle variable

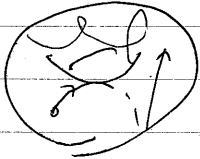
$\omega = \sum_a dI_a \wedge d\theta^a$

$I_a = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_a} p_{ai} dq^i$



$\frac{d\theta^i}{dt} = \{ \theta^i, H \} = \frac{\partial H}{\partial I_i} = \omega^i$

運動は  $T^n$  上の準同期運動である。



量子化

Planck Einstein

$$E = h\nu$$

de Broglie

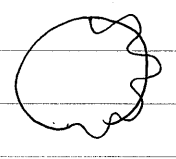
$$p = \frac{h}{\lambda}$$

Bohr

$$L = nh = n \frac{h}{2\pi}$$

定在波条件:

$$2\pi r = n \cdot \lambda$$



Ishihara-

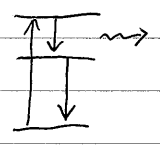
$$L = r \cdot p = r \cdot \frac{h}{\lambda} = n \frac{h}{2\pi} = nh$$

Wilson-Sommerfeld

$$\oint p_i dq_i = n \cdot h$$

Heisenberg

$$Q_{ab}^A(t) = Q_{ab}^A e^{i(E_a - E_b)t/\hbar}$$



$$\sum_b A_{ab}(t) B_{bc}(t) = \sum_b A_{ab} B_{bc} e^{i \left\{ (E_a - E_b) + (E_b - E_c) \right\} t/\hbar} = \sum_b A_{ab} B_{bc} e^{i(E_a - E_c)t/\hbar}$$

$$P(t) = P_{ab} e^{i(E_a - E_b)t/\hbar}$$

$$Q(t) = Q_{bc} e^{i(E_b - E_c)t/\hbar}$$

$$\int_{2\pi} P dQ = \frac{1}{2\pi} \oint P \frac{dQ}{dt} dt = n \cdot h$$

$$\int_{J_{ac}} \frac{1}{2\pi} \frac{h}{i(E_a - E_c)} \sum_b P_{ab} Q_{bc} \left( e^{i(E_a - E_c)T/\hbar} - 1 \right) dt = nh$$

周期运动  $P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{in\omega t}$   $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$Q = \sum_n Q_n e^{in\omega t} \quad (Q)$$

$$J_k = \frac{1}{2\pi} \oint P \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum_n \overbrace{P_n}^{\omega T} P_{-n} Q_n = -i \sum_n n P_{-n} Q_n = \hbar k$$

$$\Delta J = J_{k+1} - J_k = -i \sum_n n \Delta(P_{-n} \cdot Q_n) = \hbar$$

$$\sum_n \left\{ P_{m-n} Q_{m+n} - P_{ml} Q_{ln} \right\} = i\hbar$$

$$n \Delta Q_n = Q_{l, m+n} - Q_{l, m}$$

$$n \Delta P_{-n} = P_{m+n, l} - P_{m, l}$$

$$\sum_n \left( Q_{l, m+n} P_{m+n, l} - P_{ml} Q_{l, n} \right) = i\hbar$$



Dirac の見方

$$\{A_1 A_2, B_1 B_2\} = A_1 \{A_2, B_1 B_2\} + \{A_1, B_1 B_2\} A_2$$

$$\parallel = A_1 \{A_2, B_1\} B_2 + A_1 B_1 \{A_2, B_2\} + \{A_1, B_1\} B_2 A_2 + B_1 \{A_1, B_2\} A_2$$

$$\{A_1 A_2, B_1 B_2\} = \{A_1 A_2, B_1\} B_2 + B_1 \{A_1 A_2, B_2\}$$

$$\downarrow = A_1 \{A_2, B_1\} B_2 + \{A_1, B_1\} A_2 B_2 + B_1 A_1 \{A_2, B_2\} + B_1 A_1 \{A_1, B_2\} A_2$$

$$(A_1 B_1 - B_1 A_1) \{A_2 B_2\} = \{A_1 B_1\} (A_2 B_2 - B_2 A_2)$$

$$\{A_1 B_1\}^{-1} (A_1 B_1 - B_1 A_1) = (A_2 B_2 - B_2 A_2) \{A_2 B_2\}^{-1}$$

$$= \text{universal constant}$$

$$= i\hbar$$

$A_1 B_1 - B_1 A_1 = i\hbar \{A_1 B_1\}$

古典力学系

$A \in C^\infty(M)$ 
 $A: M \rightarrow \mathbb{R} \text{ smooth}$

量子力学系

$\hat{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 
 $\hat{A}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \text{ linear}$

Poisson bracket

 $\{A, B\}$ 

$\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ 

commutator

 $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar \widehat{\{A, B\}}$

equation of motion

$\frac{dA}{dt} = \{A, H\}$

$i\hbar \frac{d\hat{A}}{dt} = [\hat{A}, \hat{H}]$

量子力学 arrow

 $A \rightarrow \hat{A}$ 

これ毛 = の移行は 本当に 達成可能か?

Stone-vonNeumann の定理 ~~定理~~  $[Q, Q] = 0$   $[P, P] = 0$  (交換可能)

$\hat{Q}_a, \hat{P}_b, a, b = 1, 2, \dots, n$ 
 $[\hat{Q}_a, \hat{P}_b] = i\hbar \delta_{ab}$

self adjoint operator への CCR を満たす 2 つの Hilbert 空間

$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$

$\hat{Q}^a \psi(q_1, \dots, q_n) = q^a \psi$

$\hat{P}_a \psi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q^a} \psi$

この表現は 2 つの Hilbert 空間

Grönewald (1946), van Hove (1951) の定理.

$(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  標準シンプレクティック空間

o)  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$  Hilbert space

$r$ : 有限波動関数  $\psi(q^1, q^2, \dots, q^n)$

$\wedge: \mathcal{O}(\mathbb{R}^{2n}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$

多項式  $A \mapsto \hat{A}$

i)  $A$   $n \times n$   $\mathbb{R}$ -valued matrix  $\Rightarrow \hat{A}$ : self-adjoint

ii) 対応  $A \mapsto \hat{A}$  は  $\mathbb{R}$  上 linear

iii)  $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar \{A, B\}^\wedge$

iv)  $\hat{1} = id$   $\hat{1} = id_{\mathcal{H}}$

v)  $\hat{q}^k = q^k$  による掛け算演算子  $\hat{p}_k = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q^k}$

以上をみたすような写像  $\wedge$  は存在しない。

Geometric Quantization

仮定 ii) を満たす。

正値形式  
Hilbert space 構造なし

無限重畳の可約表現を用いる。

Deformation Q

仮定 iii) を満たす。

$C^*$ -algebra に変化する。

結果, Hilbert space 構造なしに変化する。

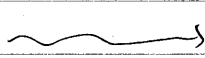
$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar \{A, B\}^\wedge + \hbar^2 \hat{O}_2 + \hbar^3 \hat{O}_3 + \dots$$

$\hat{O}_2 = R$  の 2 階正定

algebra and state

古典論

可換代数



量子論

非可換 GNS

Gelfand - Neimark

関数環

Radon - Markov - Segal  
Riesz-

確率附随

何れ部分代数  $\Rightarrow$  正確な確率解釈

必要

## Geometric Quantization.

house  
Woodhouse (1980) $(M, \omega)$  symplectic manifold

$$A \in C^\infty(M) \quad \psi \in C^\infty(M; \mathbb{C})$$

$$\hat{A}\psi := \frac{1}{2}(A \cdot \# - i\hbar X_A)\psi$$

$$\begin{aligned} [\hat{A}, \hat{B}] &= \left( -i\hbar X_A B + i\hbar X_B A + (-i\hbar)^2 [X_A, X_B] \right) \cdot \frac{1}{4} \\ &= \left( i\hbar \{A, B\} + i\hbar \{A, B\} - (-i\hbar)^2 X_{\{A, B\}} \right) \cdot \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{B}] = \frac{1}{2} \{A, B\}$$

## Deformation Quantization

Moyal star product

star product

$$(A * B)(q, p) = A \left( e^{\frac{i\hbar}{2} \left( \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q_j}} \otimes \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p_j}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p_j}} \otimes \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q_j}} \right)} B \right)$$

Bayen Flato Fronsdal  
Lichnerowicz,  
Sternheimer (1978)

$$(A * B)(z) = \int \frac{1}{(\pi \hbar)^{n/2}} e^{\frac{i}{\hbar} \Delta(z, z_1, z_2)} A(z_1) B(z_2) d\omega(z_1) d\omega(z_2)$$

Batalin-Tyutin (1990)

$$\left( [\nabla_x, \nabla_y] - \nabla_{[X, Y]} \right) \psi = -\frac{i}{\hbar} \omega(x, y) \psi$$

No.

10

## Geometric Quantization

$(M, \omega)$  symplectic mfd

$$M = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \quad \alpha = 1, \dots, n \quad \theta_{\alpha} \text{ 1-form} \quad \omega = d\theta_{\alpha}$$

$\theta_{\alpha} \in \text{connection form on } U_{\alpha}$

symplectic potential

$$A \in C^{\infty}(M), \quad \psi \in C^{\infty}(M; \mathbb{C})$$

$$\hat{A} \psi = \left( A - i\hbar \nabla_{X_A} \right) \psi = \left( A - i\hbar \left( X_A - \frac{i}{\hbar} \theta_{\alpha}(X_A) \right) \right) \psi$$

$$\begin{aligned} [\hat{A}, \hat{B}] \psi &= \left\{ -i\hbar (\nabla_{X_A} B - \nabla_{X_B} A) + (-i\hbar)^2 [\nabla_{X_A}, \nabla_{X_B}] \right\} \psi \\ &= \left\{ -i\hbar \left( X_A B - \frac{i}{\hbar} \theta_{\alpha}(X_A) B - X_B A + \frac{i}{\hbar} \theta_{\alpha}(X_B) A \right) - (i\hbar)^2 \nabla_{[X_A, X_B]} \right\} \psi \end{aligned}$$

$$\hat{A} \psi = \left( A - i\hbar \nabla_{X_A} \right) \psi \quad \nabla_x = X - \frac{i}{\hbar} \theta(x)$$

$$= \left( A - i\hbar X_{A_0} - \theta_{\alpha}(X_A) \right) \psi$$

$$\begin{aligned} [\hat{A}, \hat{B}] \psi &= (-i\hbar)^2 [X_A, X_B] - i\hbar X_A B + i\hbar X_B A + i\hbar \{ X_A \theta(X_B) - X_B \theta(X_A) \} \\ &= -(-i\hbar)^2 X_{\{A, B\}} + i\hbar \{A, B\} + i\hbar \{A, B\} + i\hbar \{ d\theta(X_A, X_B) + \theta([X_A, X_B]) \} \end{aligned}$$

$$= i\hbar \left( -i\hbar X_{\{A, B\}} \right) + 2i\hbar \{A, B\} + i\hbar \frac{\omega(X_A, X_B) - \theta(X_{\{A, B\}})}{-\{A, B\}}$$

$$= i\hbar \left\{ -i\hbar X_{\{A, B\}} + \{A, B\} - \theta(X_{\{A, B\}}) \right\}$$

$$= i\hbar \widehat{\{A, B\}}$$

$T^*L \quad \theta_{\alpha}$  can't global connection  $\in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,

$$\theta_{\alpha} - \theta_{\beta} = \varphi_{\alpha\beta} = \text{closed 1-form}$$

$$= d\lambda_{\alpha\beta} \quad \lambda_{\alpha\beta} \text{ 0-form}$$

$$\psi_{\alpha}(x) = e^{\frac{i}{\hbar} \lambda_{\alpha\beta}} \psi_{\beta} \quad \lambda_{\alpha\beta} + \lambda_{\beta\gamma} + \lambda_{\gamma\alpha} = 2\pi\hbar \cdot n_{\alpha\beta\gamma}$$

C closed 2 chain

$$\int_C \omega = 2\pi\hbar \cdot n \quad \text{量子化条件: 量子化条件}$$

1 form  $\theta \quad \mathcal{L}_V \theta = V \lrcorner d\theta = \theta([V, \cdot])$   
 $= (d\theta)(V, \cdot) - \theta([V, \cdot])$

$V \lrcorner \theta, X$

vector  $X \quad \mathcal{L}_V X = [V, X]$

$V^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\theta_\mu X^\mu) = \partial_\nu \theta_\mu V^\nu X^\mu + \theta_\mu V^\nu \partial_\nu X^\mu$

$\mathcal{L}_V \langle \theta, X \rangle = \langle \mathcal{L}_V \theta, X \rangle + \langle \theta, \mathcal{L}_V X \rangle$

$= (\partial_\nu \theta_\mu - \partial_\mu \theta_\nu) V^\nu X^\mu + \partial_\mu \theta_\nu V^\nu X^\mu$

Hilbert spa 構造 polarization

$\Omega = \omega - dH_1 dt$

$X = X_H + \frac{\partial}{\partial t}$

$+ \theta_\mu (V^\nu \partial_\nu X^\mu - X^\nu \partial_\nu V^\mu) + \theta_\mu X^\nu \partial_\nu V^\mu$

$0 = \Omega(\cdot, X) = \omega(\cdot, X_H) - dH + \langle dH, X_H \rangle dt$

$\omega_{\mu\nu} X^\nu = \frac{\partial H}{\partial z^\mu}$

$\omega(\cdot, X_H) = dH$

$\omega(V, X_H) = \langle dH, V \rangle = (d\theta)(V, X)$

$X^\mu = \omega^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial z^\nu}$

$X_H = \omega^{-1}(dH)$

$\omega(V, X_A) = \langle dA, V \rangle = \theta([V, X_A]) + X \langle \theta, V \rangle$

$\frac{dA}{dt} = X_H A = \langle dA, X_H \rangle = \omega(X_H, X_A) = \{A, H\}$

$-X_A H = -\omega(X_A, X_H)$

$X_{\{A,B\}} C = -X_C \{A, B\} = X_C \omega(X_A, X_B)$   
 $= d\omega(X_C, X_A, X_B) + \omega([X_C, X_A], X_B) + \omega(X_A, [X_C, X_B])$

$X_A X_B C = X_A \langle X_B, \omega(\cdot, X_C) \rangle$

$dC = \omega(\cdot, X_C)$

$0 = ddC = d\omega(\cdot, X_C)$   
 $= \langle [X_A, X_B], \omega(\cdot, X_C) \rangle + \langle X_B, \mathcal{L}_{X_A} \omega(\cdot, X_C) \rangle$

$[X_A, X_B] = -X_{\{A,B\}} \in \mathfrak{K}(\mathbb{R})$

$X_A \lrcorner \frac{d[\omega(\cdot, X_C)] - d[\omega(X_A, X_C)]}{d d C = d} + d\{A, C\}$

$V \langle \theta, X \rangle - X \langle \theta, V \rangle = (d\theta)(V, X) + \theta([V, X])$

$[X_A, X_B] C$

$= X_A X_B C - X_B X_A C =$

$= X_A \langle dC, X_B \rangle - X_B \langle dC, X_A \rangle$

$= (d^2 C)(X_A, X_B) + dC([X_A, X_B])$

$\omega(\cdot, X_{\{A,B\}}) = d\{A, B\} = -d(\omega(X_A, X_B))$

$$dA = \omega(\cdot, X_A) = dA$$

$$\begin{aligned} \langle X_B, dA \rangle &= +\omega(X_B, X_A) = -\omega(X_A, X_B) = \{A, B\} \\ -X_A \cdot B &= -\langle X_A, dB \rangle \end{aligned}$$

$$[X_A, X_B] = -X_{\{A, B\}} \quad \Sigma \text{ 訂. した.}$$

$$\begin{aligned} [X_A, X_B]C &= X_A X_B C - X_B X_A C = -X_A X_C B + X_B X_C A \\ &= \cancel{X_A \langle dC, X_B \rangle} - \cancel{X_B \langle dC, X_A \rangle} \\ &= X_A \cdot \omega(X_B, X_C) - X_B \cdot \omega(X_A, X_C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{\{A, B\}} C &= \omega(X_{\{A, B\}}, X_C) \\ &= -\langle X_C, \{A, B\} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= +X_C X_A B = -X_C X_B A \\ &= -X_{X_{AB}} C \end{aligned}$$

$$[X_A, X_B]C + X_{\{A, B\}} C$$

$$\begin{aligned} &= X_A X_B C - X_B X_A C - X_C \{A, B\} \\ &= -X_A X_C B + X_B X_C A + X_C X_A B \\ &= \{A \{B, C\}\} + \{B \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} \end{aligned}$$

2-form  $\omega$

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, X_2, X_3) &= X_1[\omega(X_2, X_3)] + X_2[\omega(X_3, X_1)] + X_3[\omega(X_1, X_2)] \\ &\quad - \omega([X_1, X_2]X_3) - \omega([X_2, X_3]X_1) - \omega([X_3, X_1]X_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega([Y, Z], \cdot) &= \mathcal{L}_Y \omega(Z, \cdot) - (\mathcal{L}_Y \omega)(Z, \cdot) \\ &= i_Y d[\omega(Z, \cdot)] + d[\omega(Z, Y)] \end{aligned}$$

$$dA = \omega(\cdot, X_A)$$

$$X_B \cdot A = \langle dA, X_B \rangle = \omega(X_B, X_A) = -\omega(X_A, X_B) = \{A, B\}$$

$$-X_A \cdot B = -\langle dB, X_A \rangle$$

$d\omega = 0$   
closed  
↓

definition  
of ham vect field.  
↓

$$\mathcal{L}_{X_A} \omega = i_{X_A} d\omega + d i_{X_A} \omega = 0 + d(-dA) = 0$$

$$\begin{aligned} i_{[X_A, X_B]} \omega &= \omega([X_A, X_B], \cdot) \\ &= \mathcal{L}_{X_A} i_{X_B} \omega - i_{X_B} \mathcal{L}_{X_A} \omega \\ &= \mathcal{L}_{X_A} (-dB) - 0 \\ &= -d \mathcal{L}_{X_A} B \\ &= -d(X_A B) \end{aligned}$$

$$-\omega(\cdot, [X_A, X_B]) = +d\{A, B\}$$

$$\omega(\cdot, X_{\{A, B\}}) = \omega(\cdot, X_{\{A, B\}})$$

$$\therefore [X_A, X_B] = -X_{\{A, B\}}$$

Lie alg

$$\mathcal{K}_{\text{Ham}} \subset \mathcal{K}_{\text{local Ham}} \subset \mathcal{K}$$

ideal