

新潟大学理学部セミナー
2019.07.23

量子論の弱値と負の確率

The notions of weakvalue and negative probability
in quantum theory

谷村 省吾

名古屋大学 大学院 情報学研究科

私，谷村省吾について

- 名古屋生まれ，名古屋育ち.
- 1990年 名古屋大学工学部応用物理学科卒業（主に物性物理）
- 1995年 名古屋大学大学院理学研究科物理学専攻博士課程 修了（素粒子論研究室，師匠は大貫義郎）
- 東京大学（学振研究員），京都大学，大阪市立大学，京都大学の順に就職・異動
- 2011年より名古屋大学

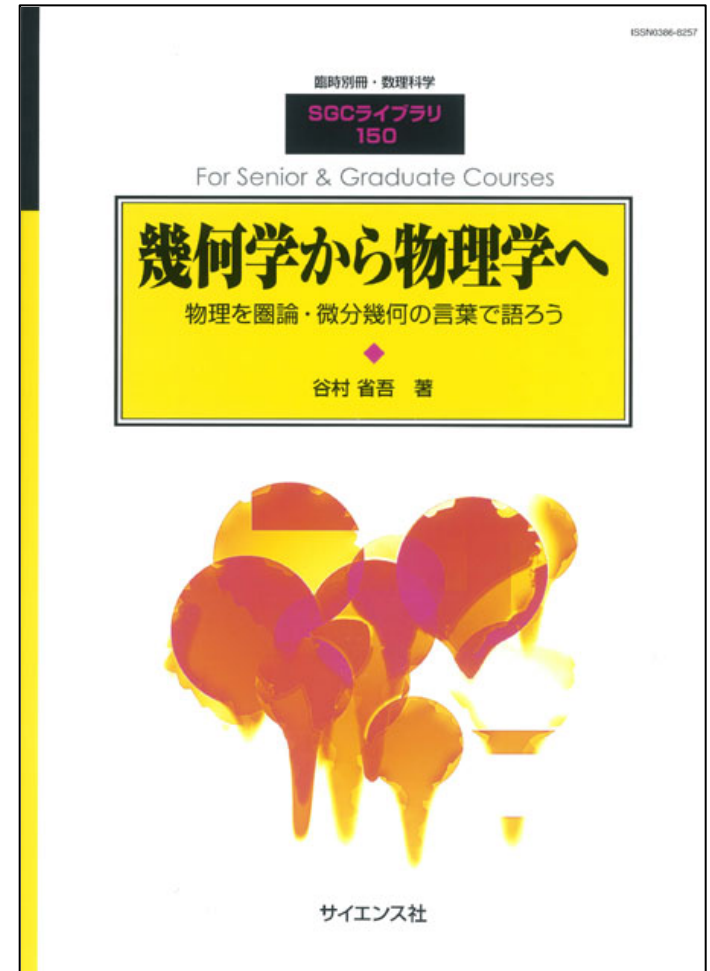
私の専門分野

理論物理, とくに

- 量子基礎論
- 力学系理論 (量子も古典も)
- 微分幾何学の物理への応用
- 量子情報も研究していたが最近は開店休業状態

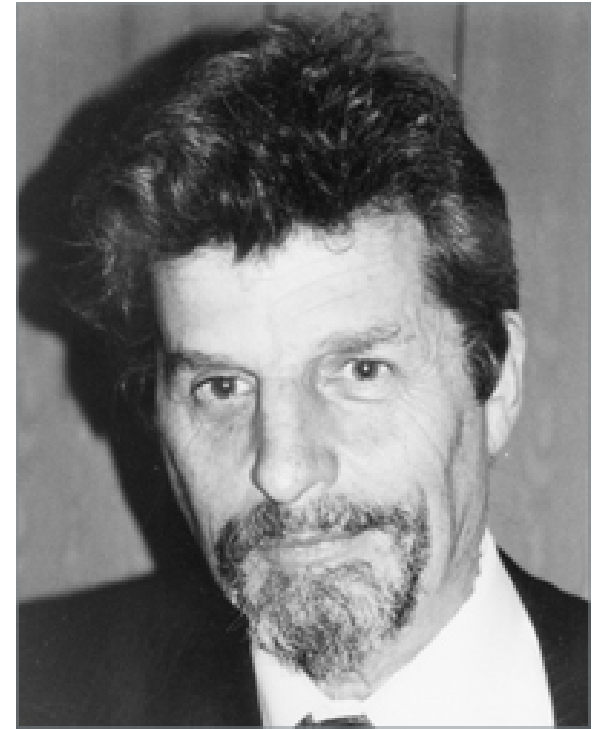
宣伝

- 新刊本『幾何学から物理学へ』（サイエンス社）
- 近刊予定『21世紀の量子論入門』（現代数学社）
- 私のウェブページで，日経サイエンスや数理科学などの記事情報・補足解説を公開しています．



弱値 weak value

- 1988年に Aharonov, Albert, Vaidman が提唱した量子力学中の概念.
- 弱測定 weak measurement で測られる値だから weak value と名付けられた.
- 意味的には「事後条件付き期待値」「未来から過去にさかのぼって定められる期待値」と呼んだ方がよい.



Yakir Aharonov

<https://history.aip.org/phn/11408012.html>

物理量と値を区別しよう

- 物理量 observable
 - 和・差・積・スカラー倍の演算ができる
 - 測れば値を出力する
- $L_1 + L_2 = L_3$
- $L = 2\pi r^2, \quad S = \pi r^2, \quad S = \frac{1}{2}ab$
- $E = mc^2, \quad E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + mgz$
- $H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kq^2$
- $S_n = S_x + S_y$

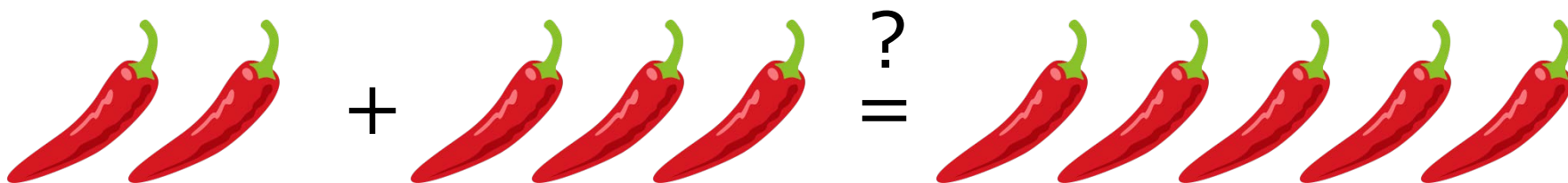
物理量と値を区別しよう

- 値 value
単位系を定めれば実数値になるもの.
- $\varepsilon(M) = 55 \text{ kg}$ (ε : evaluation map)
- $M = 55 \text{ kg}$ と書いてもよい.
- でも気持ち的には $M \rightarrow 55 \text{ kg}$ あるいは $M \leftarrow 55 \text{ kg}$
- $\varepsilon(L) = 1.67 \text{ m}$

物理量や値ではない例

- 「辛さ」

「中辛」 + 「辛口」 = 「激辛」という和が意味を持たない。



量子論の微妙さ

(物理量の和) の値 = (物理量の値) の和
は成り立たない.

- $H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kq^2$
 - 運動量 p を測れば $-\infty \leq p \leq \infty$ の連続値
 - 位置 q を測れば $-\infty \leq q \leq \infty$ の連続値
 - だけど H を測れば $\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ の離散値
- $S_n = S_x + S_y$
 - S_x, S_y を別々に測れば値はそれぞれ ± 1
 - S_n を測れば値は $\pm\sqrt{2}$

量子論における三種の値

1. 固有値 eigenvalue

$$\hat{A}|\varphi_i\rangle = a_i|\varphi_i\rangle$$

- $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ スペクトル値ともいう
- 一回一回の測定で得られる値

2. 期待値 expectation value

$$\langle \hat{A} \rangle_\psi = \varepsilon_\psi(\hat{A}) = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$$

- 統計的平均値

3. 弱値 weak value

$$w(\hat{A}) = \frac{\langle \psi_{\text{fin}} | \hat{A} | \psi_{\text{ini}} \rangle}{\langle \psi_{\text{fin}} | \psi_{\text{ini}} \rangle}$$

弱値の定義式

弱値 weak value

$$w(\hat{A}) = \frac{\langle \psi_{\text{fin}} | \hat{A} | \psi_{\text{ini}} \rangle}{\langle \psi_{\text{fin}} | \psi_{\text{ini}} \rangle}$$

もちろん一番気になることは、どうやってこんなものを実測するかということでしょうけれど、まずは数学的性質を調べましょう。

弱値の性質

弱値 weak value

$$w(\hat{A}) = \frac{\langle \psi_{\text{fin}} | \hat{A} | \psi_{\text{ini}} \rangle}{\langle \psi_{\text{fin}} | \psi_{\text{ini}} \rangle}$$

1. 一般に複素数値である（実部と虚部が別々に測れる）。
2. 状態ベクトルの位相変換 $|\psi_a\rangle \rightarrow e^{i\theta_a} |\psi_a\rangle$ のもとで不変
3. $\hat{A}$ の最大固有値 a_{max} と最小固有値 a_{min} があっても

$$a_{\text{min}} \leq \text{Re } w(\hat{A}) \leq a_{\text{max}}$$

は一般には成り立たない

弱値の計算例

スピン $\frac{1}{2}$ (2状態系) $|\psi\rangle = c_1|\uparrow\rangle + c_2|\downarrow\rangle$

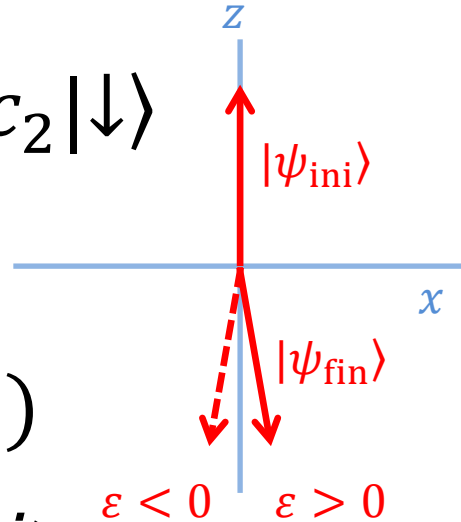
$$|\psi_{\text{ini}}\rangle = |\uparrow\rangle$$

$$|\psi_{\text{fin}}\rangle = \varepsilon|\uparrow\rangle + \sqrt{1 - \varepsilon^2}|\downarrow\rangle \quad (|\varepsilon| \ll 1)$$

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$w(\hat{\sigma}_x) = \frac{\langle\psi_{\text{fin}}|\hat{\sigma}_x|\psi_{\text{ini}}\rangle}{\langle\psi_{\text{fin}}|\psi_{\text{ini}}\rangle} = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} \rightarrow \pm\infty$$

($\varepsilon \rightarrow \pm 0$)



ふつうの期待値の性質

$\hat{A}$ の最大固有値 $a_{\max}$ と最小固有値 $a_{\min}$ があれば

$$a_{\min} \leq \langle \hat{A} \rangle \leq a_{\max}$$

が成り立つ.

なぜなら

$$a_{\min} \leq a_i \leq a_{\max}$$

確率 p_i は $0 \leq p_i \leq 1, \sum_i p_i = 1$ を満たすので,

$$p_i a_{\min} \leq p_i a_i \leq p_i a_{\max}$$

$$\sum_i p_i a_{\min} \leq \sum_i p_i a_i \leq \sum_i p_i a_{\max}$$

弱値の確率解釈

弱値を確率解釈するなら,

$$w(\hat{A}) = \frac{\langle \psi_{\text{fin}} | \hat{A} | \psi_{\text{ini}} \rangle}{\langle \psi_{\text{fin}} | \psi_{\text{ini}} \rangle} = \sum_i p_i a_i$$

にあてはまる確率 p_i は $0 \leq p_i \leq 1, \sum_i p_i = 1$ を満たさないものでなくてはならない. しかし,

$$w(\hat{1}) = \frac{\langle \psi_{\text{fin}} | \hat{1} | \psi_{\text{ini}} \rangle}{\langle \psi_{\text{fin}} | \psi_{\text{ini}} \rangle} = 1 = \sum_i p_i$$

は成立するので, 放棄すべきは $0 \leq p_i \leq 1$

弱値の測定モデル

測定される系 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, $\hat{A}, \hat{B}$

測定器 $|\lambda\rangle \in \mathcal{L}$, $\hat{M}$ (meter observable)

複合系の状態 $|\psi\rangle \otimes |\lambda\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}$

相互作用 $|\psi\rangle \otimes |\lambda\rangle \mapsto \hat{U}|\psi\rangle \otimes |\lambda\rangle$

$\hat{A}$ の値を知りたくて $\hat{M}$ の値を読み取る.

初期状態 $|\psi_{\text{ini}}\rangle$ だけでなく, 終状態 $|\psi_{\text{fin}}\rangle$ も指定して $\hat{M}$ の条件付き期待値を求める.

結合定数 $g \rightarrow 0$ の極限で $\hat{M}$ の読み取り値が弱値に近づく. (詳しくは配布ノート参照)

確率の諸概念

確率変数 A が値 a をとる確率 $P_A(a)$

結合確率 (joint probability) $P_{AB}(a, b)$

条件付き確率 (conditional probability) $P_{B|A}(b|a)$

$$P_{B|A}(b|a) P_A(a) = P_{AB}(a, b)$$

$P_A(a) \neq 0$ ならば,

$$P_{B|A}(b|a) = \frac{P_{AB}(a, b)}{P_A(a)}$$

ついでに、ベイズの定理

$$P_{A|B}(a|b) = \frac{P_{AB}(a, b)}{P_B(b)} = \frac{P_{B|A}(b|a)P_A(a)}{P_B(b)}$$

確率値 $P_A(a)$ を予測していたときに、 $B = b$ を観察することによって確率値を更新するための公式.



Thomas Bayes 1701-1761

https://en.wikipedia.org/wiki/Thomas_Bayes

ベイズ推論は、それ自体面白いので、少し寄り道しよう

ベイズの定理 (Yes/No, 排他的事象型)

- 原因となり得る排他的事象 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$
- 結果として起こり得る事象 M
- M が起こった。さて、その原因が A_i である確率は？

$$P(A_i|M) = \frac{P(M|A_i)P(A_i)}{\sum_j P(M|A_j)P(A_j)}$$

事前確率 $P(A_i) \rightarrow$ 事後確率 $P(A_i|M)$

M の観察・読み取りによって確率が更新される。

ベイズの定理の証明

結合確率と条件付き確率の関係式

$$P(A_i \wedge M) = P(A_i|M)P(M) = P(M|A_i)P(A_i)$$

$$\sum_i P(A_i \wedge M) = P(M) = \sum_i P(M|A_i)P(A_i)$$

$$\therefore P(A_i|M) = \frac{P(A_i \wedge M)}{P(M)} = \frac{P(M|A_i)P(A_i)}{\sum_j P(M|A_j)P(A_j)}$$

証明は、普通の確率論・形式論.

証明自体にベイズ主義が必要なわけではない.

ベイズの定理の適用例

- 事前確率 $P(\text{がん}) = \frac{1}{10}$, $P(\text{がんじゃない}) = \frac{9}{10}$
- 観測による追加情報：がん診断のマーカーが基準値を超えている = 陽性.

$$P(\text{陽性}|\text{がん}) = \frac{9}{10} \quad P(\text{陽性}|\text{がんじゃない}) = \frac{11}{90}$$

$$P(\text{陰性}|\text{がん}) = \frac{1}{10} \quad P(\text{陰性}|\text{がんじゃない}) = \frac{79}{90}$$

- 事後確率 (マーカーの観測によって更新された確率)

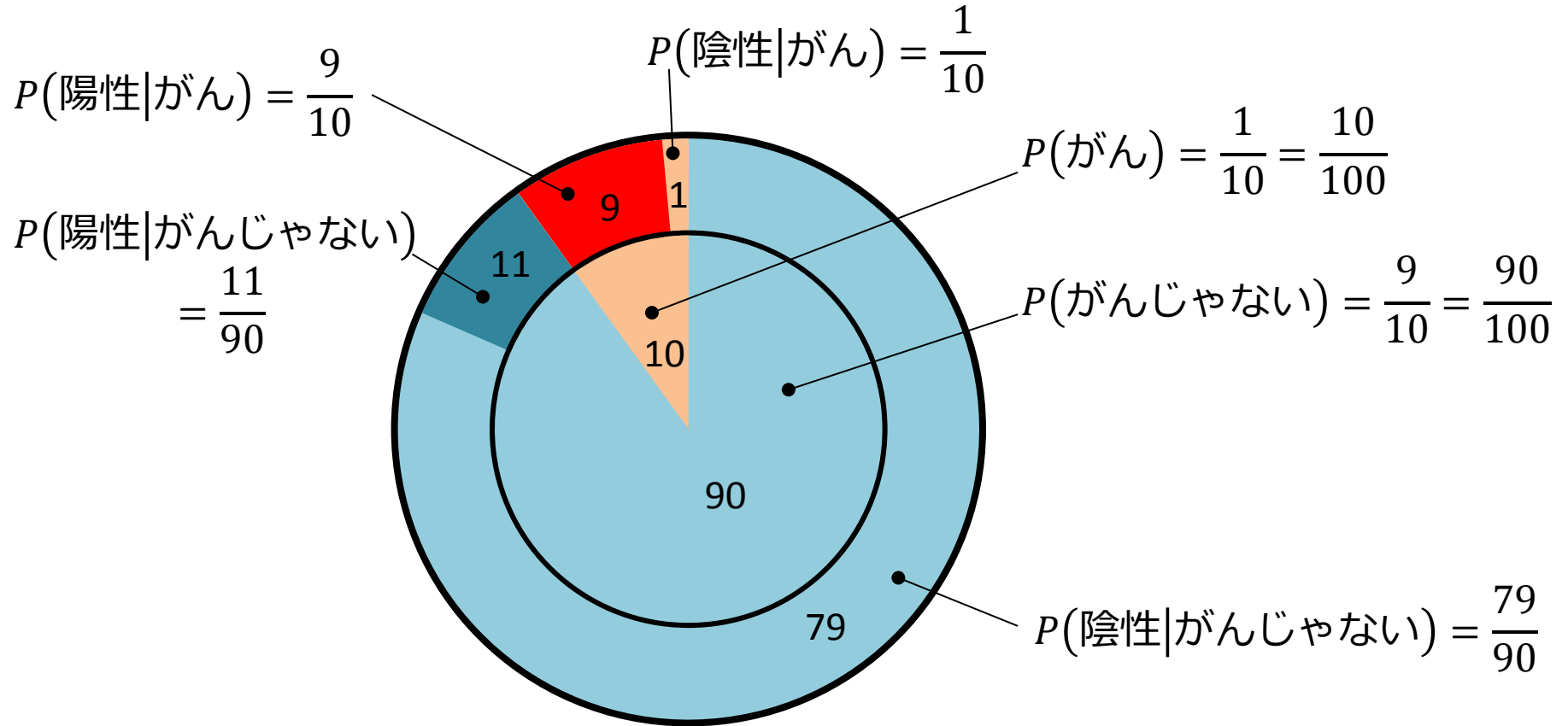
$$P(\text{がん}|\text{陽性}) = \frac{\frac{9}{10} \times \frac{1}{10}}{\frac{9}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{11}{90} \times \frac{9}{10}} = \frac{9}{20}$$

$$P(\text{がんじゃない}|\text{陽性}) = \frac{11}{20}$$

陽性と出たことにより、がんの確率は高まるが、がんじゃない確率の方がまだ高い。

こう考えれば当たり前

$$P(\text{がん}|\text{陽性}) = \frac{9}{9+11} = \frac{9}{20}$$

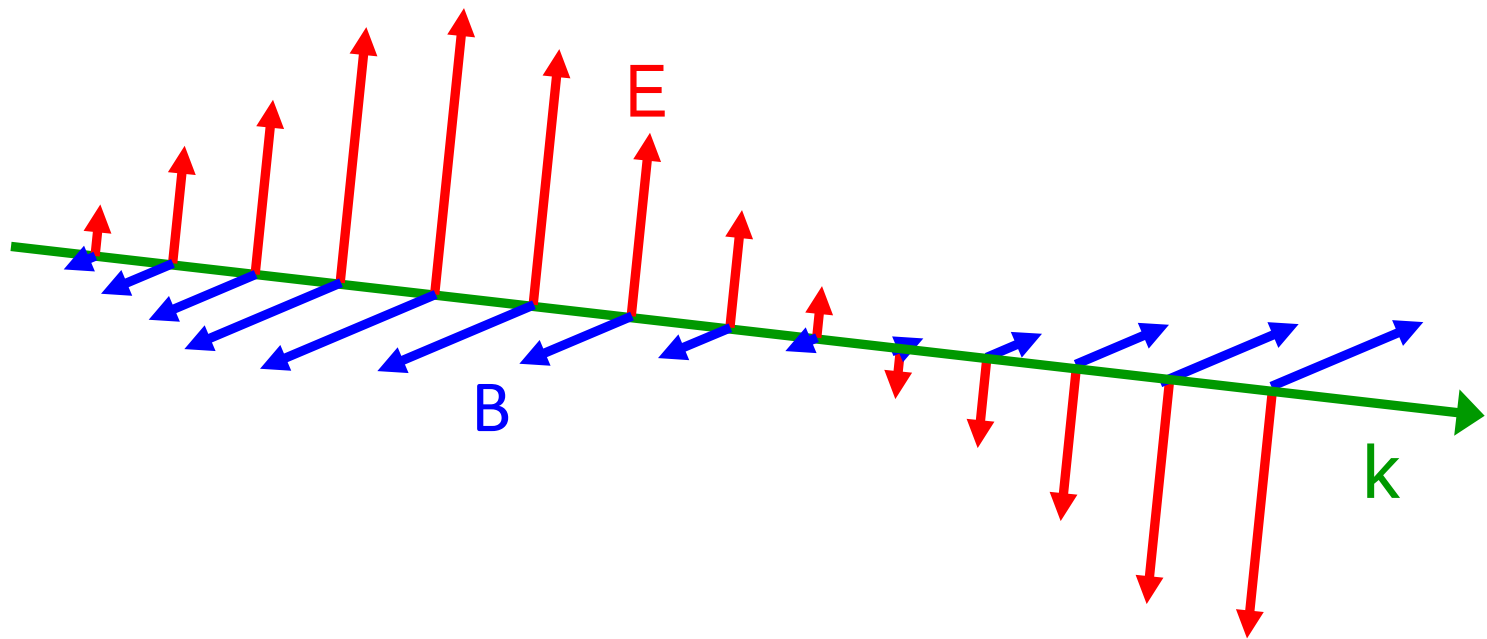


ベイズの公式は、条件付き確率の再規格化に他ならない。

弱値の測定例：偏光と複屈折

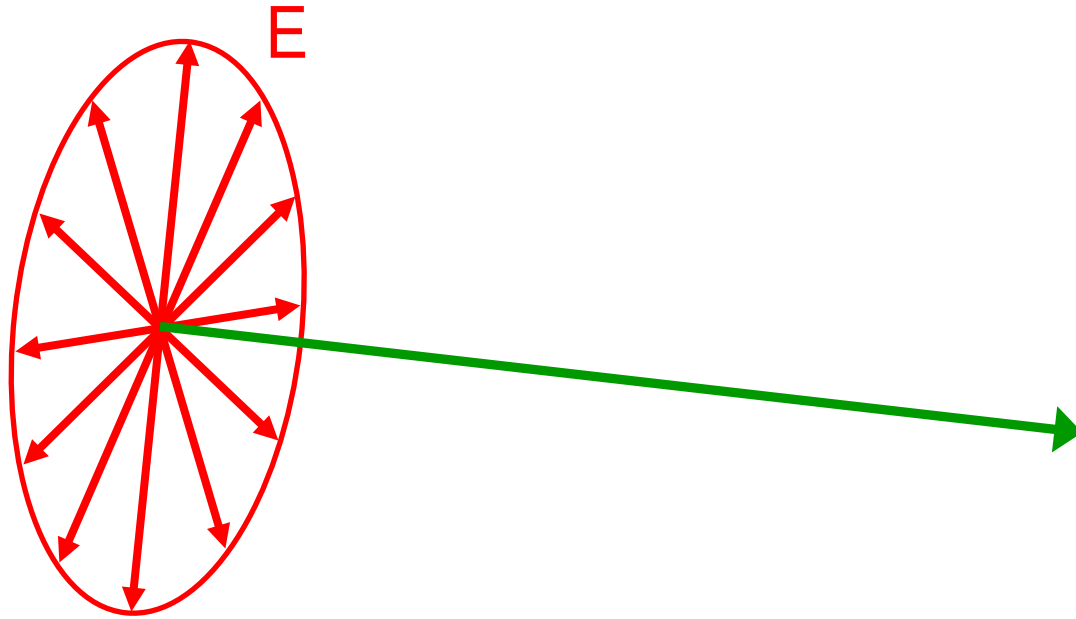
光の正体は電磁波

電場 E と 磁場 B と 進行方向 k



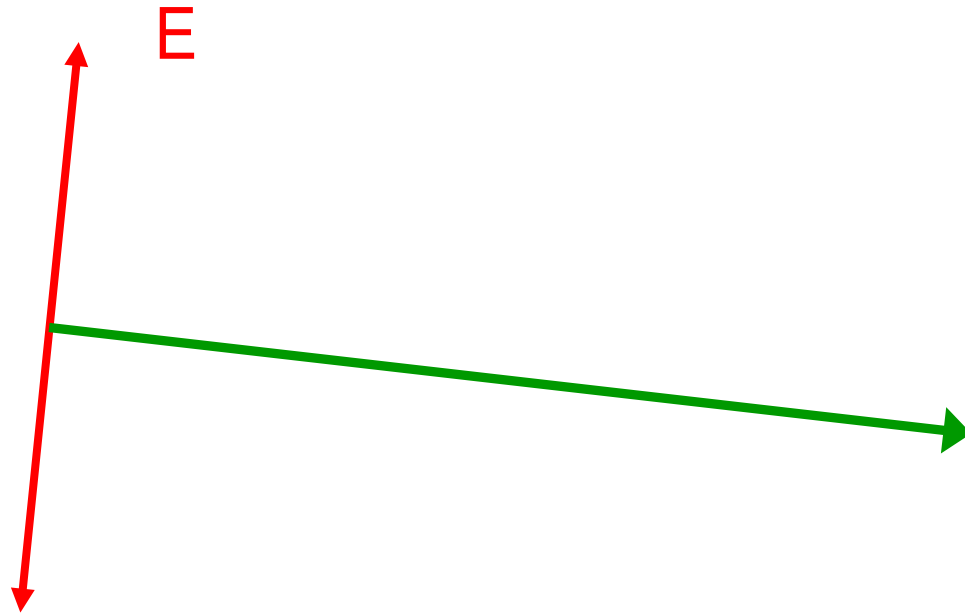
電磁波は横波

振動方向にはバリエーションがある。



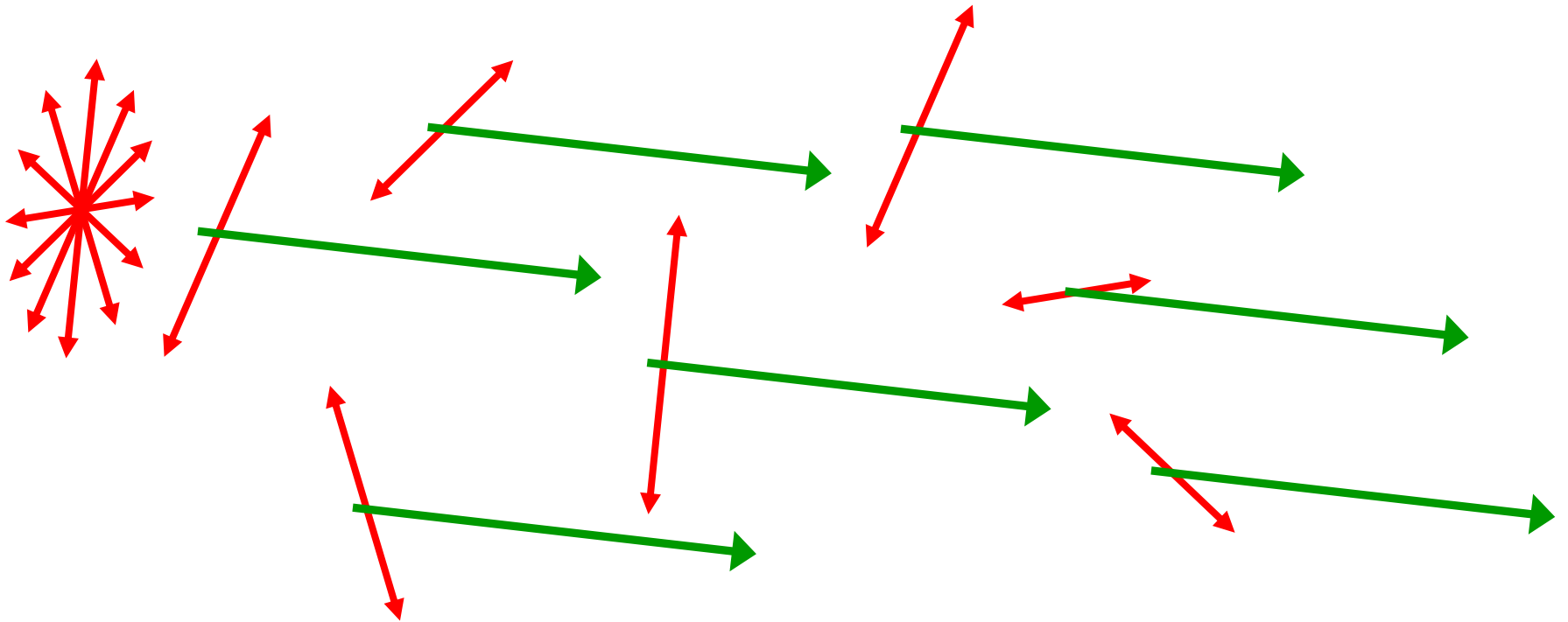
偏光

特定の方角の振動電場を持つ光を「偏った光」あるいは「偏光」と言う。



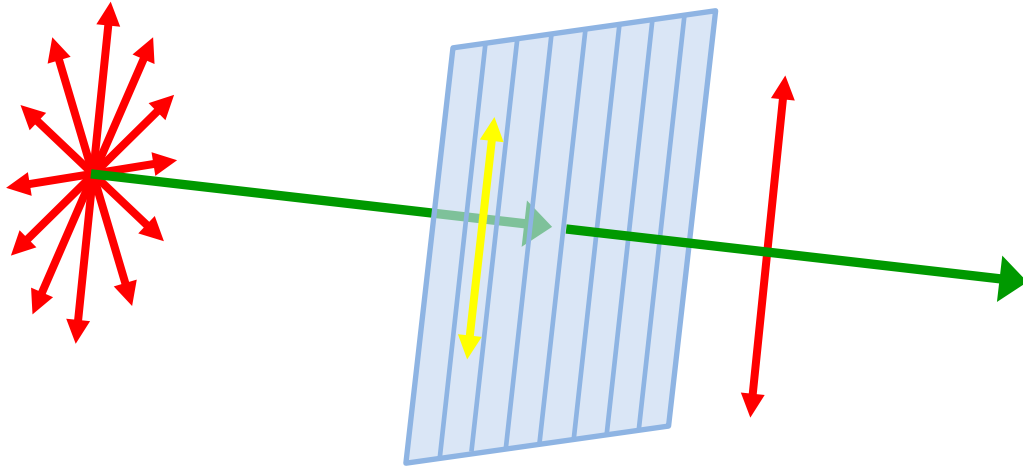
偏っていない光

太陽や電球から出て来る光には、いろいろな偏光が混じっている。



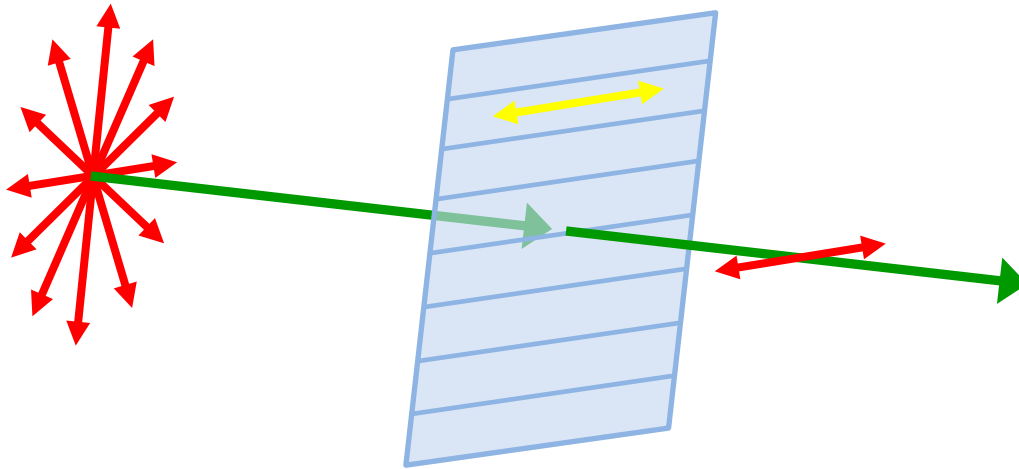
偏光フィルター

特定方向の偏光のみを通過させる.



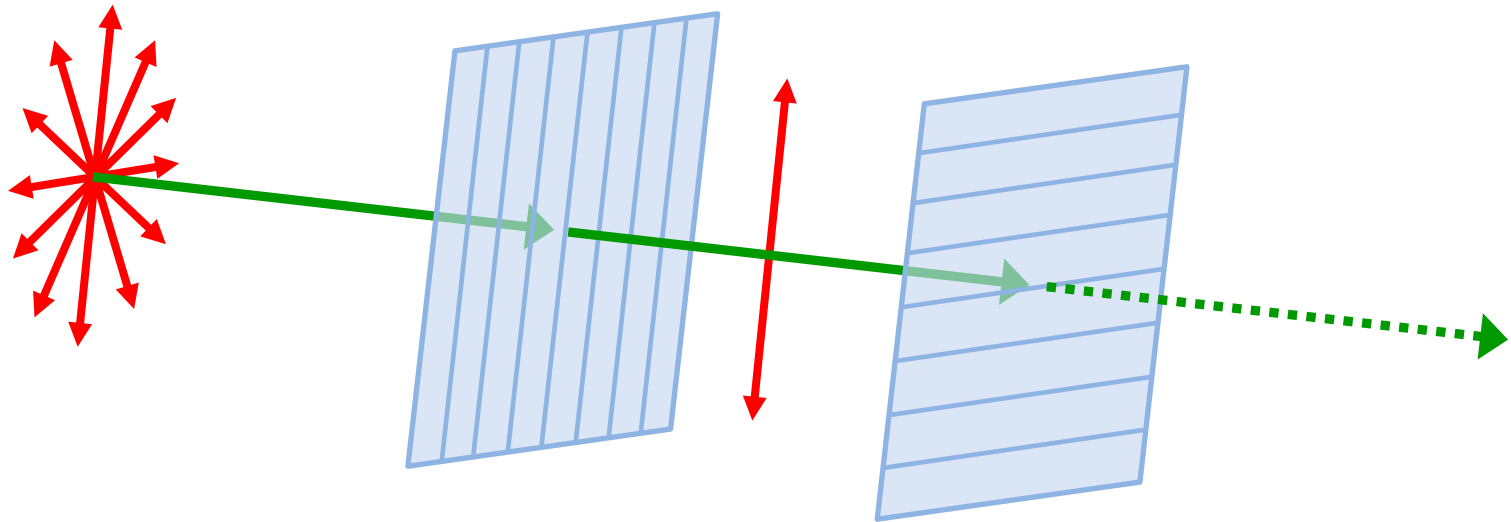
偏光フィルター

偏光板は、特定の方角性（通過を許容する偏光軸）を持っている。



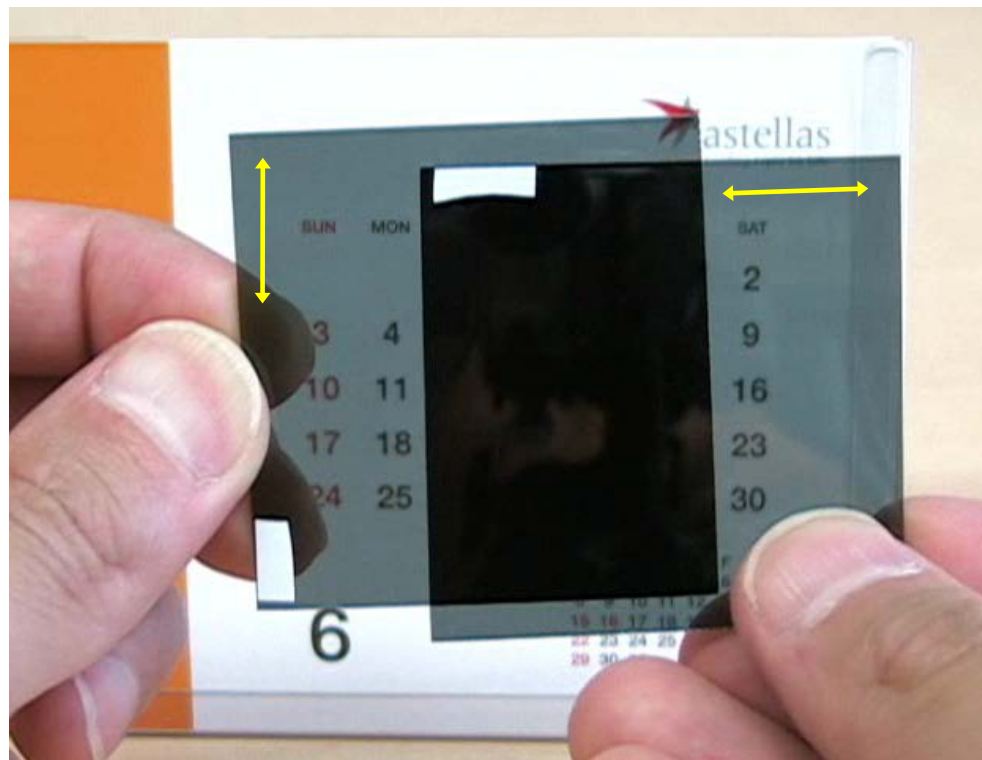
偏光フィルターを重ねる

偏光軸が垂直な偏光板を重ねると、光はまったく通らない。



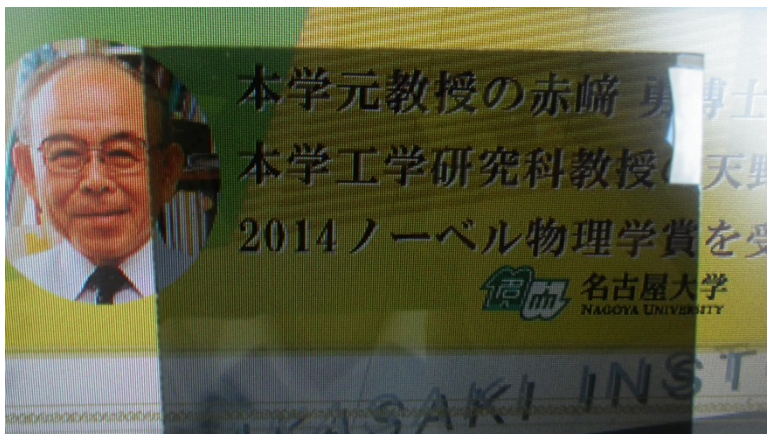
偏光フィルターを重ねる

偏光軸が垂直な偏光板を重ねると、光はまったく通らない。



偏光の応用

- 液晶ディスプレイから出る光は偏光.
- 偏光フィルターを電氣的にオンオフすることによって画像を作っている.



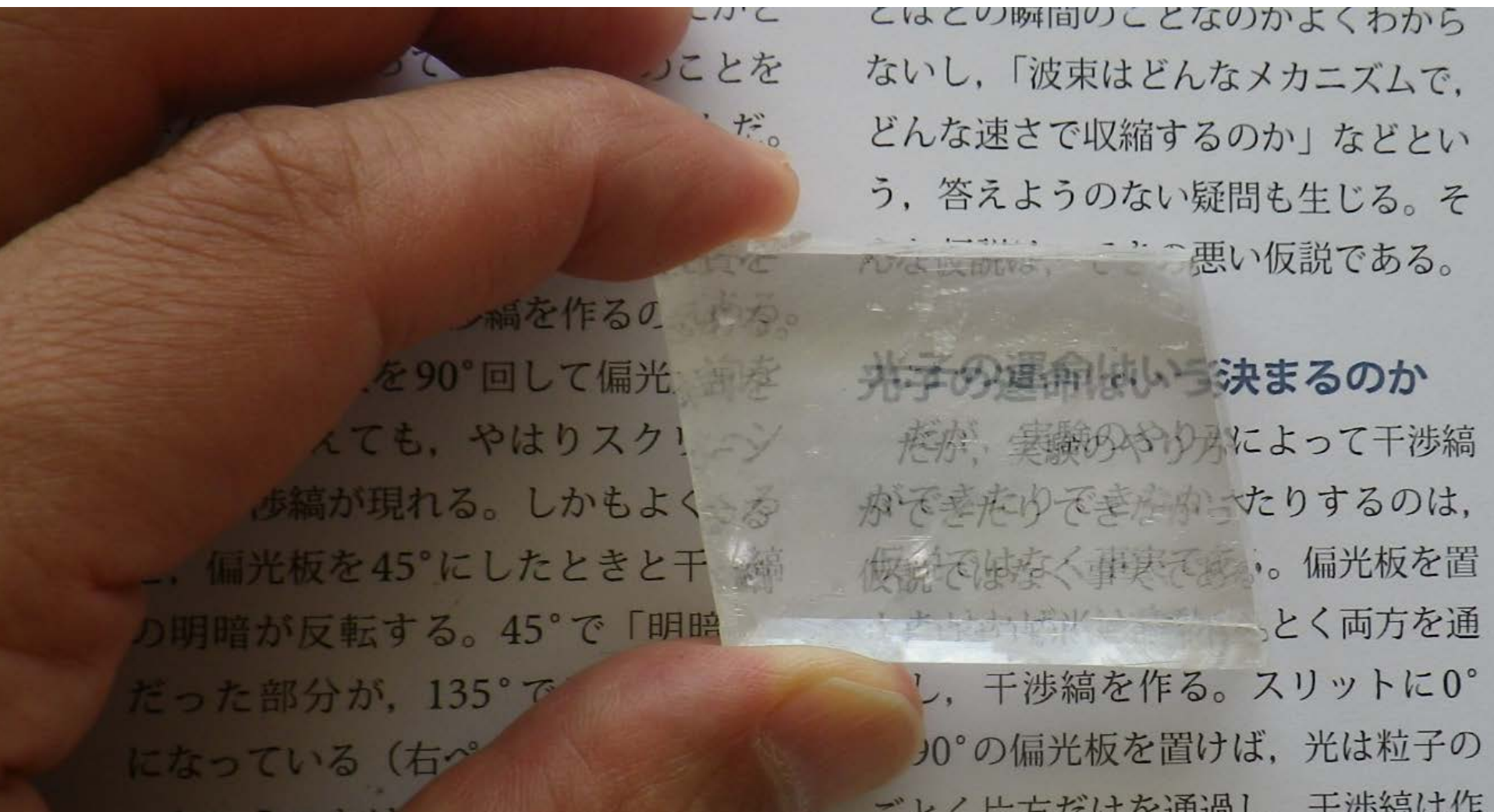
偏光の応用

サングラスが偏光フィルターになっている（何のため？）



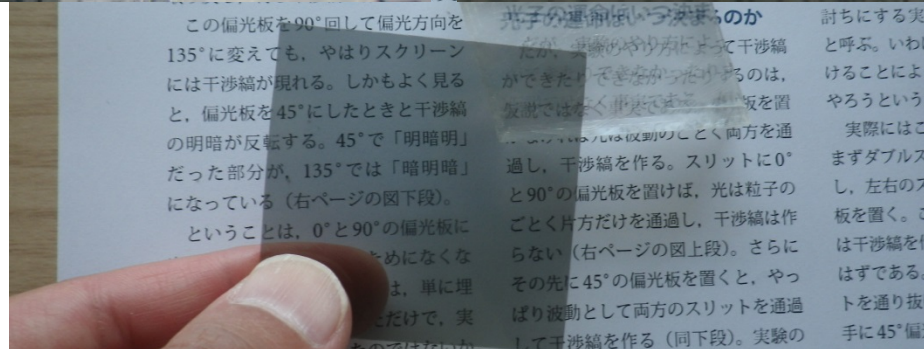
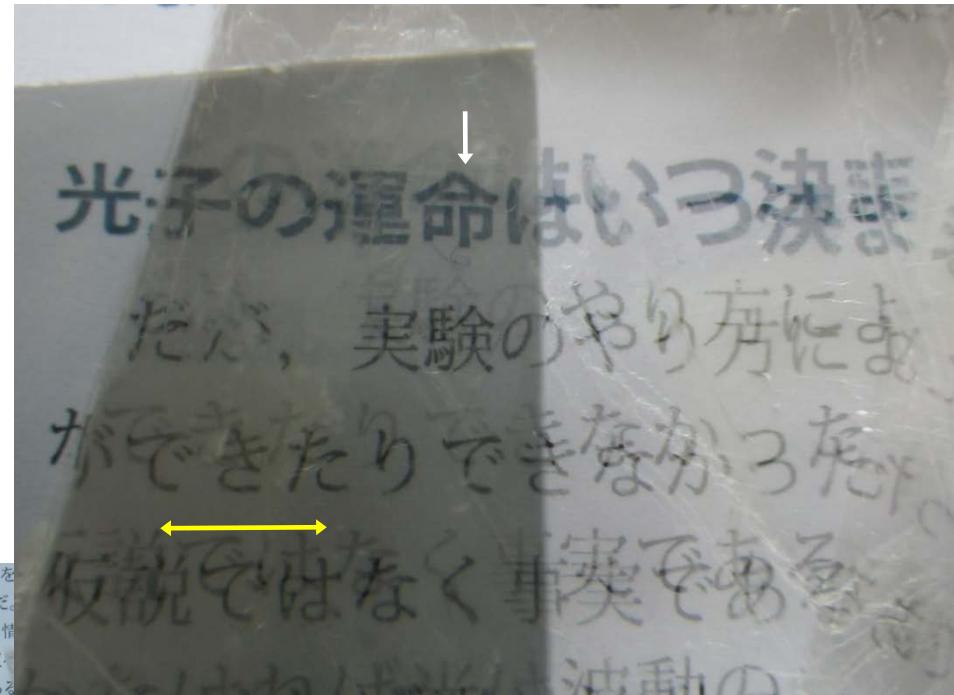
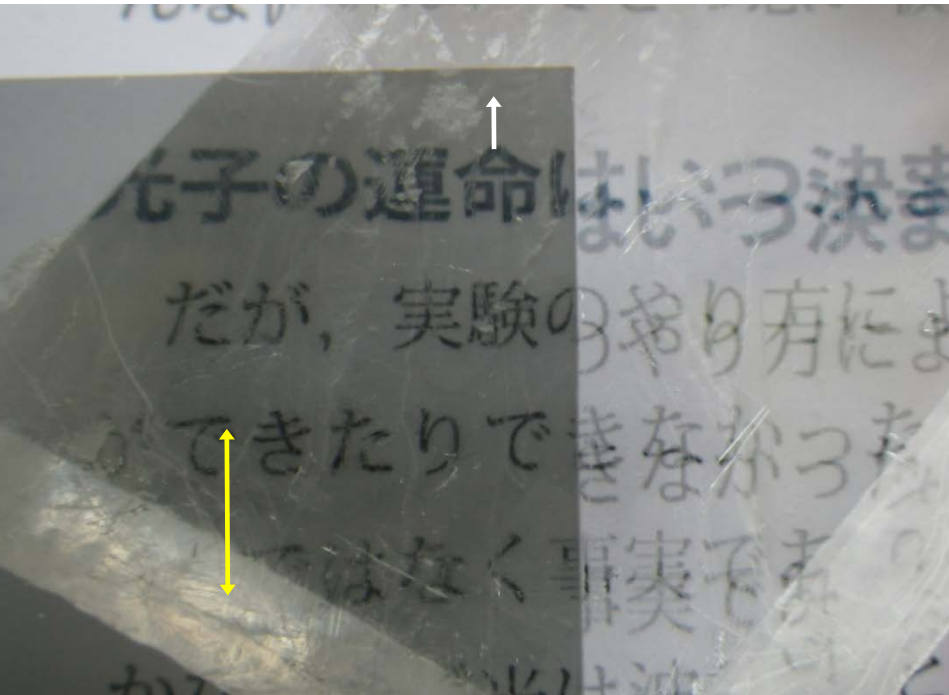
複屈折

方解石（炭酸カルシウムの結晶）



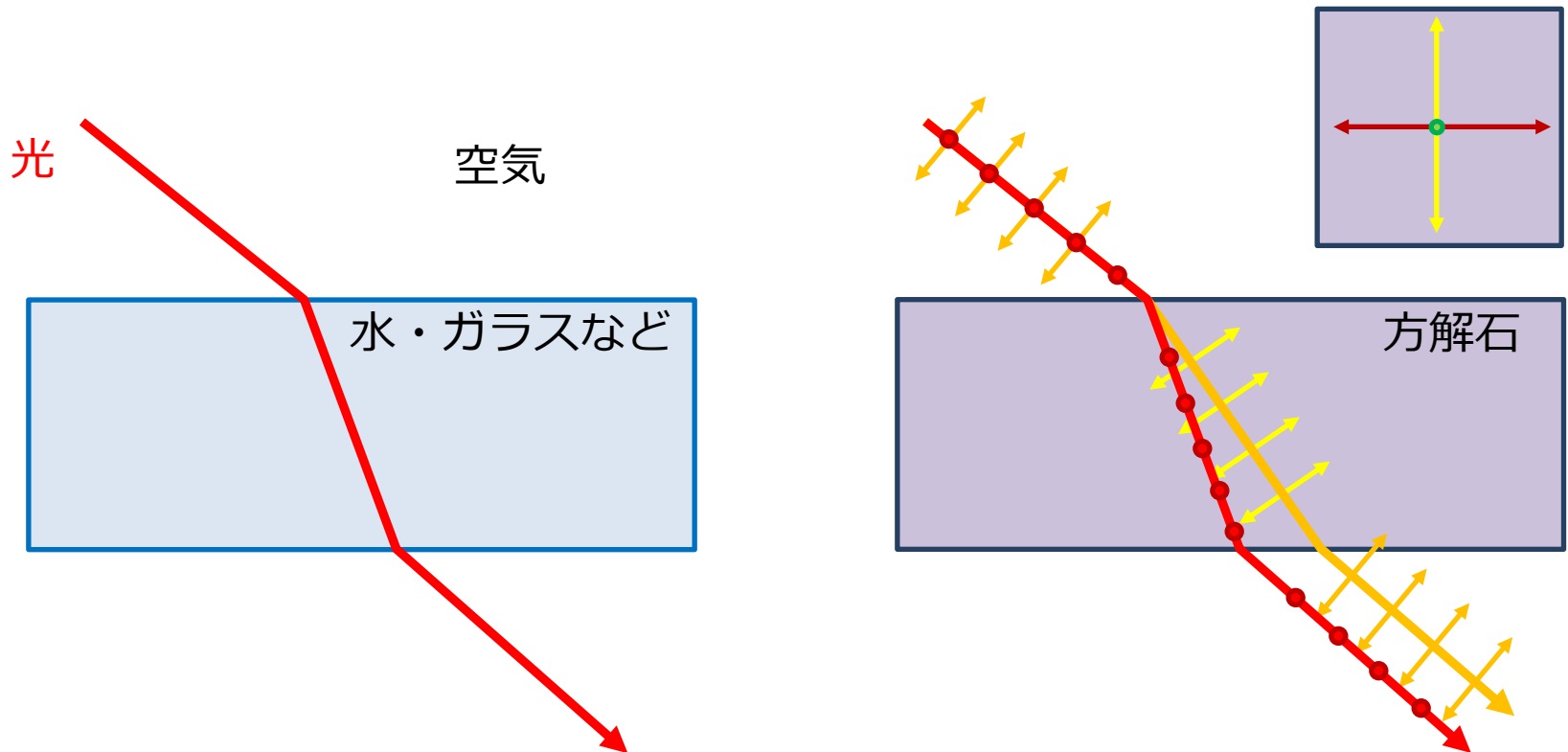
複屈折

偏光フィルターを通して見る.



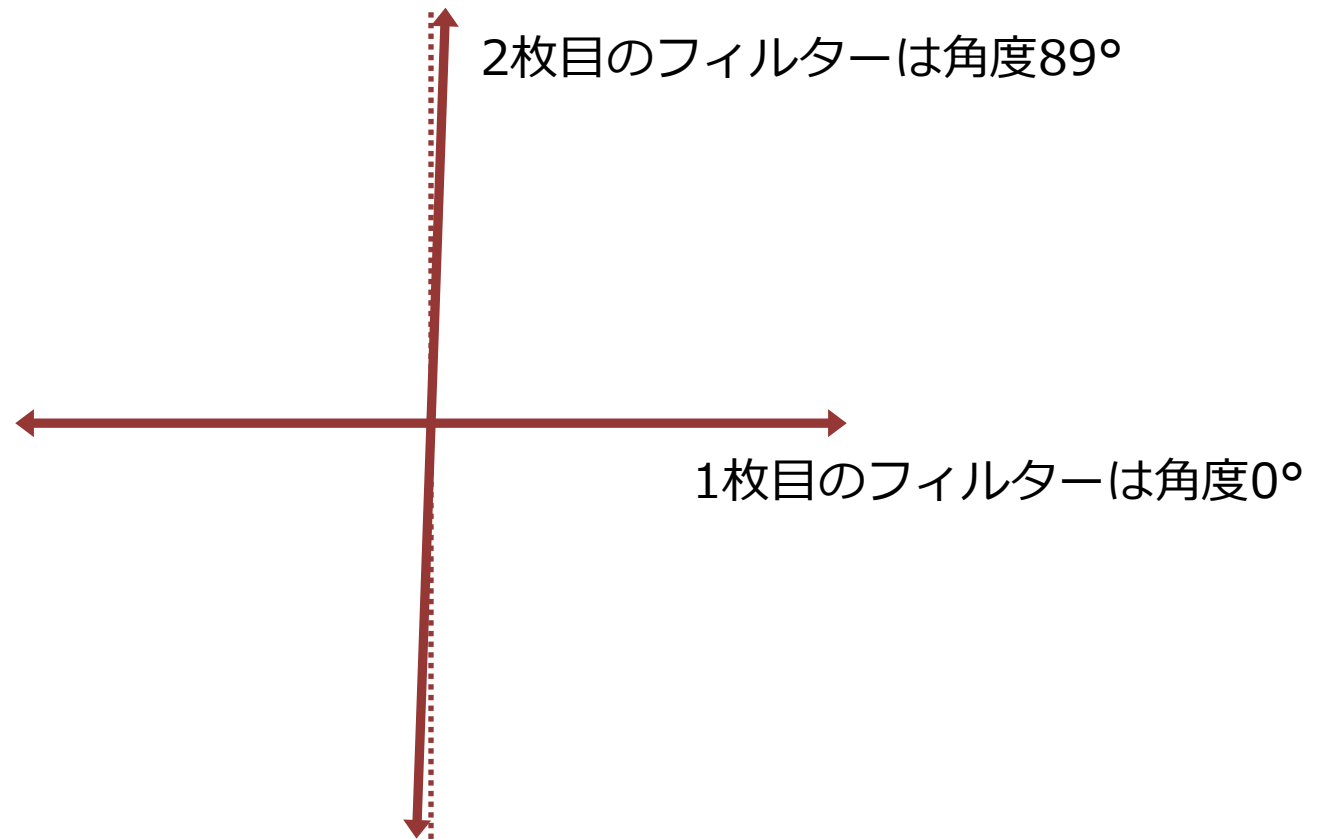
複屈折

方解石は偏光方向によって屈折率が異なり、
光を2成分に分ける。



複屈折を利用した弱値の実現

1) 偏光フィルターのセッティング

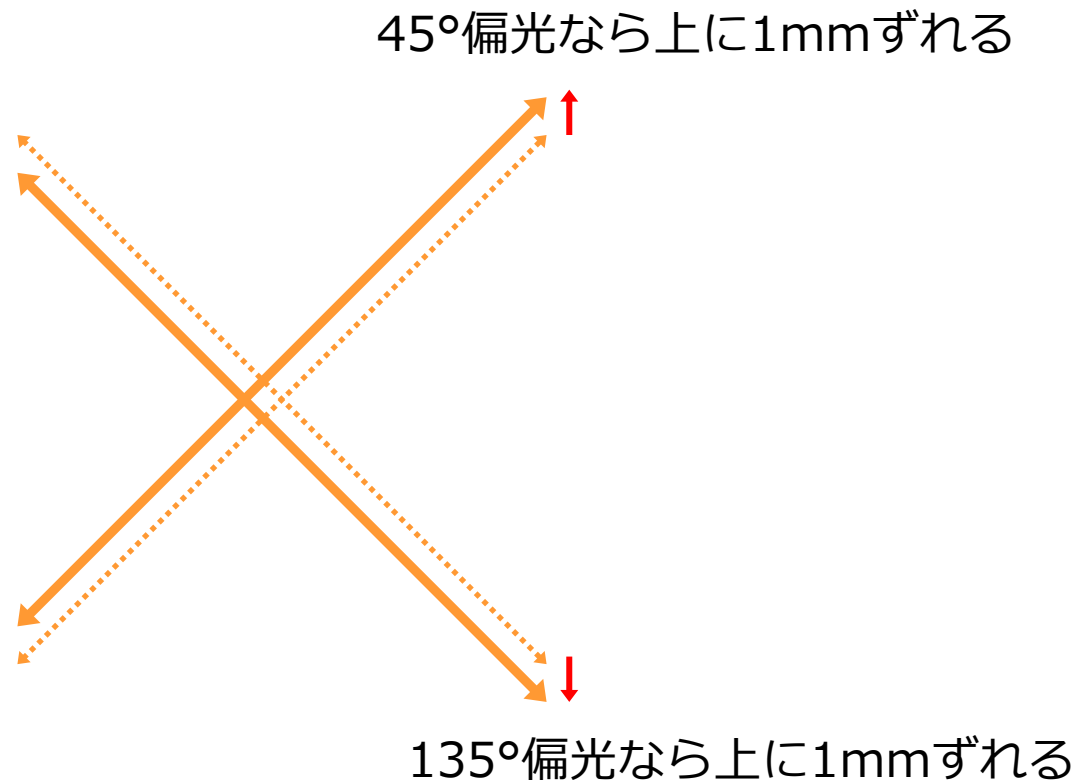


理論 : [Duck, Stevenson, Sudarshan: Phys. Rev. D \(1989\)](#)

実験 : [Ritchie, Story, G. Hulet: Phys. Rev. Lett. \(1991\)](#)

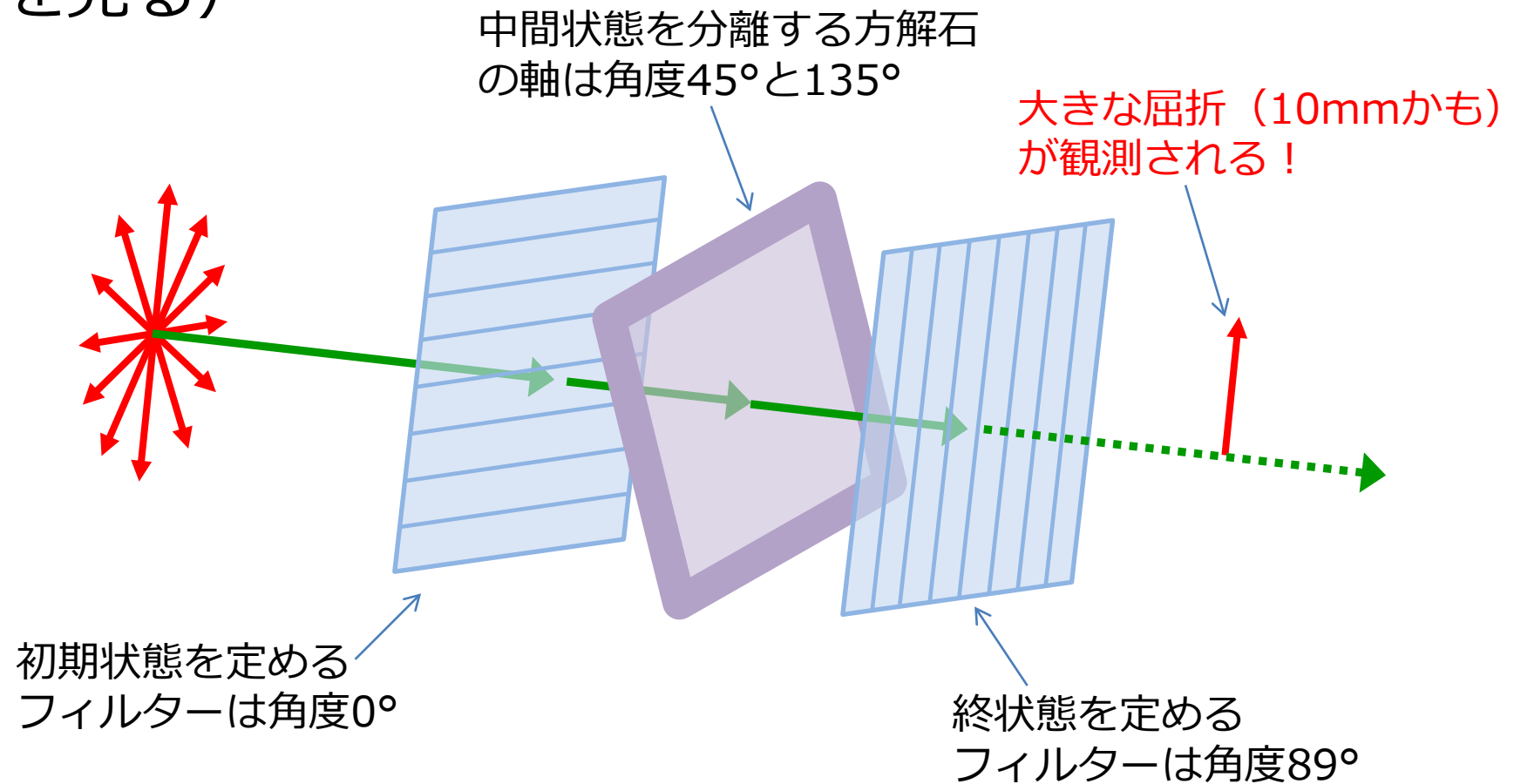
複屈折を利用した弱値の実現

2) 方解石のセッティング



複屈折を利用した弱値の実現

3) 重ねる（ほとんど光が通らない条件で複屈折を見る）



弱値の増幅効果

弱値 weak value

$$w(\hat{A}) = \frac{\langle \psi_{\text{fin}} | \hat{A} | \psi_{\text{ini}} \rangle}{\langle \psi_{\text{fin}} | \psi_{\text{ini}} \rangle}$$

分母が小さい（初期状態から終状態への遷移確率が小さい）ときに，初期・終状態を定める物理量と同時対角化できないような物理量（非対角行列成分を持つ物理量）を測ると，大きな弱値が観測される．

まとめ (1/2)

- 弱値は、物理量の非対角行列成分に比例する数量である.
- 互いに直交しない基底に対して順次射影するときに弱値は顕在化する.
- 弱値を「期待値」として解釈しようとする^と負の確率を認めざるを得ない.
- 同時対角化する基底がない = 非可換性

まとめ (2/2)

- 非可換性 = 量子性
- エネルギーの量子化も，不確定性関係も，干渉効果も，ベルの不等式の破れも，量子ゆらぎも，弱値も，みんな元凶（？）は非可換性.
- 素粒子の振動現象も mass matrix と coupling matrix が非可換で同時対角化できないところから来ている.
- 非可換代数が本質的（代数的量子論をやるといいよ！）

Thank you for your attention

量子論の弱値と負の確率

谷村 省吾

名古屋大学大学院情報学研究科

新潟大学セミナー資料として.

1 弱値の導出

対象系（被測定系）の状態ベクトル $|\psi\rangle \in \mathfrak{H}$ と測定系（測定器）の状態ベクトル $|\lambda\rangle \in \mathfrak{L}$ のテンソル積によって複合系の初期状態

$$|\Phi_{\text{ini}}\rangle = |\psi\rangle \otimes |\lambda\rangle \quad (1.1)$$

を定める. A, B は $\mathfrak{H}$ の上の自己共役演算子, M は $\mathfrak{L}$ の上の自己共役演算子とし, それらのスペクトル分解を

$$A = \sum_{\nu} a_{\nu} \Pi_A(a_{\nu}) \quad (1.2)$$

$$B = \sum_{\nu} b_{\nu} \Pi_B(b_{\nu}) \quad (1.3)$$

$$M = \sum_{\nu} m_{\nu} \Pi_M(m_{\nu}) \quad (1.4)$$

$$(1.5)$$

と書く. とくに初期状態 $|\psi\rangle$ は B の固有状態にとる. 複合系の相互作用時間発展ユニタリ演算子 U をかけて, 結合確率を求める:

$$P(b, m) = \langle \Phi_{\text{ini}} | U^{\dagger} \left(\Pi_B(b) \otimes \Pi_M(m) \right) U | \Phi_{\text{ini}} \rangle \quad (1.6)$$

$B = b$ という条件の下で $M = m$ を得る確率

$$P(m|b) = \frac{P(b, m)}{P(b)} = \frac{\langle \Phi_{\text{ini}} | U^{\dagger} \left(\Pi_B(b) \otimes \Pi_M(m) \right) U | \Phi_{\text{ini}} \rangle}{\langle \Phi_{\text{ini}} | U^{\dagger} \left(\Pi_B(b) \otimes 1 \right) U | \Phi_{\text{ini}} \rangle} \quad (1.7)$$

と M の条件付き期待値

$$\begin{aligned} E(M|b) = \sum_m m P(m|b) &= \frac{\langle \Phi_{\text{ini}} | U^{\dagger} \left(\Pi_B(b) \otimes \sum_m m \Pi_M(m) \right) U | \Phi_{\text{ini}} \rangle}{\langle \Phi_{\text{ini}} | U^{\dagger} \left(\Pi_B(b) \otimes 1 \right) U | \Phi_{\text{ini}} \rangle} \\ &= \frac{\langle \Phi_{\text{ini}} | U^{\dagger} \left(\Pi_B(b) \otimes M \right) U | \Phi_{\text{ini}} \rangle}{\langle \Phi_{\text{ini}} | U^{\dagger} \left(\Pi_B(b) \otimes 1 \right) U | \Phi_{\text{ini}} \rangle} \end{aligned} \quad (1.8)$$

さらに結合定数 g を導入．演算子 U は実数パラメータ g の関数 U_g になっているとする． $g = 0$ のとき $U_g = 1$ とする．具体的には

$$U_g = \exp\left(-\frac{ig}{\hbar}A \otimes P\right) \quad (1.9)$$

とする．ここで P は M に対する共役運動量であり，

$$[M, P] = i\hbar 1 \quad (1.10)$$

を満たす．このとき

$$U_g^\dagger M U_g = M + gA \quad (1.11)$$

が成り立つ．つまり結合定数と A の値に比例してメーター M の読み取り値がシフトする．ここで，弱結合の仮定 $g \approx 0$ を仮定する：

$$U_g \approx 1 - \frac{ig}{\hbar}A \otimes P \quad (1.12)$$

が成り立つ．このとき，

$$\begin{aligned} & U^\dagger \left(\Pi_B(b) \otimes M \right) U \\ & \approx \Pi_B(b) \otimes M \\ & \quad - \frac{ig}{\hbar} \left(\Pi_B(b) \otimes M \right) A \otimes P + \frac{ig}{\hbar} A \otimes P \left(\Pi_B(b) \otimes M \right) \\ & = \Pi_B(b) \otimes M \\ & \quad - \frac{ig}{\hbar} \left(\Pi_B(b) A \otimes MP - A \Pi_B(b) \otimes PM \right) \\ & = \Pi_B(b) \otimes M \\ & \quad - \frac{ig}{2\hbar} \left((\Pi_B(b) A + A \Pi_B(b)) \otimes (MP - PM) + (\Pi_B(b) A - A \Pi_B(b)) \otimes (MP + PM) \right) \\ & = \Pi_B(b) \otimes M \\ & \quad + \frac{g}{2} (\Pi_B(b) A + A \Pi_B(b)) - \frac{ig}{2\hbar} (\Pi_B(b) A - A \Pi_B(b)) \otimes (MP + PM) \end{aligned} \quad (1.13)$$

なので，

$$\begin{aligned} & \langle \Phi_{\text{ini}} | U^\dagger \left(\Pi_B(b) \otimes M \right) U | \Phi_{\text{ini}} \rangle \\ & \approx \langle \psi | \Pi_B(b) | \psi \rangle \langle \lambda | M | \lambda \rangle \\ & \quad + \frac{g}{2} \langle \psi | (\Pi_B(b) A + A \Pi_B(b)) | \psi \rangle \langle \lambda | \lambda \rangle \\ & \quad - \frac{ig}{2\hbar} \langle \psi | (\Pi_B(b) A - A \Pi_B(b)) | \psi \rangle \langle \lambda | (MP + PM) | \lambda \rangle \end{aligned} \quad (1.14)$$

となる．第1項は相互作用に無関係に初期状態だけで決まる値である．第2項は，対象系の状態と演算子だけで決まる数であり，

$$\langle \psi | \Pi_B(b) A | \psi \rangle \quad (1.15)$$

は実数だったと仮定する（簡単な場合のみを扱うための仮定）．そうすると $\langle \psi | A \Pi_B(b) | \psi \rangle = \langle \psi | \Pi_B(b) A | \psi \rangle^* = \langle \psi | \Pi_B(b) A | \psi \rangle$ であり，(1.14) の第 3 項は消える．

以上の計算より， M の条件付き期待値 (1.8) は弱測定の場合で

$$E(M|b) \approx \langle \lambda | M | \lambda \rangle + \frac{g}{2} \frac{\langle \psi | (\Pi_B(b) A + A \Pi_B(b)) | \psi \rangle}{\langle \psi | \Pi_B(b) | \psi \rangle} \quad (1.16)$$

となる．とくに $B = b$ の固有値が縮退がなければ，

$$\Pi_B(b) = |\psi_{\text{fin}}\rangle \langle \psi_{\text{fin}}| \quad (1.17)$$

と書けて，(1.16) は

$$\begin{aligned} E(M|b) &\approx \langle \lambda | M | \lambda \rangle + \frac{g}{2} \frac{\langle \psi | \psi_{\text{fin}} \rangle \langle \psi_{\text{fin}} | A | \psi \rangle + \langle \psi | A | \psi_{\text{fin}} \rangle \langle \psi_{\text{fin}} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi_{\text{fin}} \rangle \langle \psi_{\text{fin}} | \psi \rangle} \\ &= \langle \lambda | M | \lambda \rangle + \frac{g}{2} \left\{ \frac{\langle \psi_{\text{fin}} | A | \psi \rangle}{\langle \psi_{\text{fin}} | \psi \rangle} + \frac{\langle \psi | A | \psi_{\text{fin}} \rangle}{\langle \psi | \psi_{\text{fin}} \rangle} \right\} \\ &= \langle \lambda | M | \lambda \rangle + g \frac{\langle \psi_{\text{fin}} | A | \psi \rangle}{\langle \psi_{\text{fin}} | \psi \rangle} \end{aligned} \quad (1.18)$$

となる．つまり， $g \rightarrow 0$ の極限で測定メーターの読み取り値のシフトは弱値に等しい．

2 負の確率の弱値解釈

この部分は日経サイエンス記事の補足解説のコピペである [1]．

量子論の枠組みの中で，結合確率と条件付き確率の定義を述べよう． n 個の物理量 $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ があるとする．いずれも離散スペクトルを持つとし，それぞれのスペクトル分解を

$$A^{(i)} = \sum_{\nu} a_{\nu}^{(i)} \Pi_{\nu}^{(i)} \quad (2.1)$$

とする．ここで $\Pi_{\nu}^{(i)}$ は $A^{(i)}$ の固有値 $a_{\nu}^{(i)}$ に属する固有空間への射影演算子である． $\nu \neq \nu'$ ならば $a_{\nu}^{(i)} \neq a_{\nu'}^{(i)}$ である．ヒルベルト空間の任意の単位ベクトル $|\psi\rangle$ に対して“結合確率” (joint probability)

$$P(a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)}) := \langle \psi | \Pi_{\nu_n}^{(n)} \dots \Pi_{\nu_1}^{(1)} | \psi \rangle \quad (2.2)$$

を定義する．一般に，これは負の実数になることもあるし，実数ではない複素数になるかもしれない．ただ， $P(a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)})$ の絶対値は 0 以上 1 以下であることは証明できる．また，

$$\sum_{\nu_1} \dots \sum_{\nu_n} P(a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)}) = 1 \quad (2.3)$$

は成り立つし，番号 i と ν_i を固定して，他の番号 ν_j についてはすべての固有値にわたる和をとれば

$$\sum_{\nu_1} \dots \sum_{\nu_{i-1}} \sum_{\nu_{i+1}} \dots \sum_{\nu_n} P(a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_{i-1}}^{(i-1)}, a_{\nu_i}^{(i)}, a_{\nu_{i+1}}^{(i+1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)}) = \langle \psi | \Pi_{\nu_i}^{(i)} | \psi \rangle =: P(a_{\nu_i}^{(i)}) \quad (2.4)$$

が成立する。 $P(a_{\nu_i}^{(i)})$ は 0 以上 1 以下の実数であり、通常の量子論の解釈によれば、「物理量 $A^{(i)}$ の値が $a_{\nu_i}^{(i)}$ である確率」と解釈されるものである。そこで、(2.2) の $P(a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)})$ を形式的に「 $A^{(1)}$ の値が $a_{\nu_1}^{(1)}$ であり、かつ、 $A^{(2)}$ の値が $a_{\nu_2}^{(2)}$ であり、かつ、 $\dots$ 、 $A^{(n)}$ の値が $a_{\nu_n}^{(n)}$ である確率」と解釈することにする。一般に $P(a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)})$ は負の実数であったり非実数であったりするので、これを頻度と解釈するのは無理がある。しかも $P(a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)})$ の値は物理量 $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}$ を並べる順序に依存する。それでも規格化条件 (2.3) と周辺確率 (marginal probability) の公式 (2.4) は正しく満たしているので、 $P(a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)})$ をクォーテーションマーク付きの“結合確率”と呼ぶ。

規格化条件 (2.3) と周辺確率の公式 (2.4) を満たす「結合確率もどき」は、擬確率 (pseudo-probability) とも呼ばれる。規格化条件と周辺確率の公式を満たす擬確率は一意的ではない。擬確率の構成と分類に関しては李・筒井が詳しく研究している [5]。また、2 個のスピン (2-qubit system) に対しては、ベルの不等式が成立することは、非負の擬確率が存在するための必要十分条件であることを Fine が示している [6]。つまり、ベルの不等式が破れるときは、必ず負の擬確率が発生しているのである。

番号 i を固定して、 $P(a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_{i-1}}^{(i-1)}, a_{\nu_{i+1}}^{(i+1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)}) := \langle \psi | \Pi_{\nu_n}^{(n)} \dots \Pi_{\nu_{i+1}}^{(i+1)} \Pi_{\nu_{i-1}}^{(i-1)} \dots \Pi_{\nu_1}^{(1)} | \psi \rangle \neq 0$ のとき

$$P(a_{\nu_i}^{(i)} | a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_{i-1}}^{(i-1)}, a_{\nu_{i+1}}^{(i+1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)}) := \frac{P(a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_{i-1}}^{(i-1)}, a_{\nu_i}^{(i)}, a_{\nu_{i+1}}^{(i+1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)})}{P(a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_{i-1}}^{(i-1)}, a_{\nu_{i+1}}^{(i+1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)})} \quad (2.5)$$

を形式的な“条件付き確率” (conditional probability) と呼ぶ。これは負実数かもしれないし、非実数かもしれないし、絶対値は 1 よりも大きいかもしれない。あまりにも形式的なので、解釈を言うのはナンセンスかもしれないが、 $P(a_{\nu_i}^{(i)} | a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_{i-1}}^{(i-1)}, a_{\nu_{i+1}}^{(i+1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)})$ は、「 $A^{(1)}$ の値が $a_{\nu_1}^{(1)}$ であり、かつ、 $\dots$ 、 $A^{(i-1)}$ の値が $a_{\nu_{i-1}}^{(i-1)}$ であり、かつ、 $A^{(i+1)}$ の値が $a_{\nu_{i+1}}^{(i+1)}$ であり、かつ、 $\dots$ 、 $A^{(n)}$ の値が $a_{\nu_n}^{(n)}$ であるという条件のもとで、 $A^{(i)}$ の値が $a_{\nu_i}^{(i)}$ である確率」を表していると考える。変数が多すぎるとわかりにくいかもしれないので、物理量が 2 種だけの場合の“条件付き確率” $P(a_{\nu_2}^{(2)} | a_{\nu_1}^{(1)})$ の定義式を

$$P(a_{\nu_2}^{(2)} | a_{\nu_1}^{(1)}) P(a_{\nu_1}^{(1)}) = P(a_{\nu_1}^{(1)}, a_{\nu_2}^{(2)}) \quad (2.6)$$

と書くと、意味がとりやすいのではないだろうか。この式の左辺は、まず物理量 $A^{(1)}$ を測ってその値が $a_{\nu_1}^{(1)}$ となって、さらに物理量 $A^{(2)}$ を測ってその値が $a_{\nu_2}^{(2)}$ となる確率と解釈できる。式 (2.6) の右辺は、物理量 $A^{(1)}$ の値が $a_{\nu_1}^{(1)}$ かつ $A^{(2)}$ の値が $a_{\nu_2}^{(2)}$ となる確率と解釈できる。また、

$$P(a_{\nu_1}^{(1)} | a_{\nu_2}^{(2)}) P(a_{\nu_2}^{(2)}) = P(a_{\nu_1}^{(1)}, a_{\nu_2}^{(2)}) \quad (2.7)$$

も成り立つ。(2.6) で定められる $P(a_{\nu_2}^{(2)} | a_{\nu_1}^{(1)})$ を前件で条件付けられた確率といい、(2.7) で定められる $P(a_{\nu_1}^{(1)} | a_{\nu_2}^{(2)})$ を後件で条件付けられた確率という。

ちなみに

$$P(a_{\nu_1}^{(1)}, a_{\nu_2}^{(2)}) = P(a_{\nu_1}^{(1)}) P(a_{\nu_2}^{(2)}) \quad (2.8)$$

が $A^{(1)}, A^{(2)}$ のすべての固有値について成り立つことを、状態 $|\psi\rangle$ において $A^{(1)}$ と $A^{(2)}$ が独立 (independent) であるという。独立であるための必要十分条件は

$$P(a_{\nu_2}^{(2)} | a_{\nu_1}^{(1)}) = P(a_{\nu_2}^{(2)}) \quad (2.9)$$

である。こうなっていれば、 $A^{(1)}$ の値と $A^{(2)}$ の値はまったく無関係であると言える。

とくに番号 i の前後の射影演算子 $\Pi_{\nu_{i-1}}^{(i-1)}$ と $\Pi_{\nu_{i+1}}^{(i+1)}$ の像が 1 次元であると仮定する。このとき、

$$\Pi_{\nu_{i-1}}^{(i-1)} = |\xi_{i-1}\rangle\langle\xi_{i-1}|, \quad \Pi_{\nu_{i+1}}^{(i+1)} = |\xi_{i+1}\rangle\langle\xi_{i+1}| \quad (2.10)$$

と書くことができ、

$$\begin{aligned} & P(a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_{i-1}}^{(i-1)}, a_{\nu_i}^{(i)}, a_{\nu_{i+1}}^{(i+1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)}) \\ &= \langle\psi| \Pi_{\nu_n}^{(n)} \dots \Pi_{\nu_{i+1}}^{(i+1)} \Pi_{\nu_i}^{(i)} \Pi_{\nu_{i-1}}^{(i-1)} \dots \Pi_{\nu_1}^{(1)} |\psi\rangle \\ &= \langle\psi| \Pi_{\nu_n}^{(n)} \dots \Pi_{\nu_{i+2}}^{(i+2)} |\xi_{i+1}\rangle\langle\xi_{i+1}| \Pi_{\nu_i}^{(i)} |\xi_{i-1}\rangle\langle\xi_{i-1}| \Pi_{\nu_{i-2}}^{(i-2)} \dots \Pi_{\nu_1}^{(1)} |\psi\rangle \end{aligned} \quad (2.11)$$

および

$$\begin{aligned} & P(a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_{i-1}}^{(i-1)}, a_{\nu_{i+1}}^{(i+1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)}) \\ &= \langle\psi| \Pi_{\nu_n}^{(n)} \dots \Pi_{\nu_{i+1}}^{(i+1)} \Pi_{\nu_{i-1}}^{(i-1)} \dots \Pi_{\nu_1}^{(1)} |\psi\rangle \\ &= \langle\psi| \Pi_{\nu_n}^{(n)} \dots \Pi_{\nu_{i+2}}^{(i+2)} |\xi_{i+1}\rangle\langle\xi_{i+1}| \Pi_{\nu_{i-1}}^{(i-1)} |\xi_{i-1}\rangle\langle\xi_{i-1}| \Pi_{\nu_{i-2}}^{(i-2)} \dots \Pi_{\nu_1}^{(1)} |\psi\rangle \end{aligned} \quad (2.12)$$

が成り立つので、(2.5) は

$$P(a_{\nu_i}^{(i)} | a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_{i-1}}^{(i-1)}, a_{\nu_{i+1}}^{(i+1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)}) = \frac{\langle\xi_{i+1}| \Pi_{\nu_i}^{(i)} |\xi_{i-1}\rangle}{\langle\xi_{i+1}|\xi_{i-1}\rangle} \quad (2.13)$$

に等しい。物理量 $A^{(i)}$ の“条件付き期待値” (conditional expected value) を

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(A^{(i)} | a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_{i-1}}^{(i-1)}, a_{\nu_{i+1}}^{(i+1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)}) \\ &:= \sum_{\nu_i} a_{\nu_i}^{(i)} P(a_{\nu_i}^{(i)} | a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_{i-1}}^{(i-1)}, a_{\nu_{i+1}}^{(i+1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

で定めれば、

$$\mathbb{E}(A^{(i)} | a_{\nu_1}^{(1)}, \dots, a_{\nu_{i-1}}^{(i-1)}, a_{\nu_{i+1}}^{(i+1)}, \dots, a_{\nu_n}^{(n)}) = \frac{\langle\xi_{i+1}| A^{(i)} |\xi_{i-1}\rangle}{\langle\xi_{i+1}|\xi_{i-1}\rangle} \quad (2.15)$$

が成り立つ。とくに 2 つの物理量 $A^{(1)}, A^{(2)}$ についての“結合確率” $\langle\psi| \Pi_{\nu_2}^{(2)} \Pi_{\nu_1}^{(1)} |\psi\rangle$ における $\Pi_{\nu_2}^{(2)}$ が 1 次元射影演算子 $\Pi_{\nu_2}^{(2)} = |\xi\rangle\langle\xi|$ であれば、後件で条件付けられた確率は

$$P(a_{\nu_1}^{(1)} | a_{\nu_2}^{(2)}) = \frac{\langle\psi| \Pi_{\nu_2}^{(2)} \Pi_{\nu_1}^{(1)} |\psi\rangle}{\langle\psi| \Pi_{\nu_2}^{(2)} |\psi\rangle} = \frac{\langle\psi|\xi\rangle\langle\xi| \Pi_{\nu_1}^{(1)} |\psi\rangle}{\langle\psi|\xi\rangle\langle\xi|\psi\rangle} = \frac{\langle\xi| \Pi_{\nu_1}^{(1)} |\psi\rangle}{\langle\xi|\psi\rangle} \quad (2.16)$$

となる。この数値は「始状態が $|\psi\rangle$ であり終状態が $|\xi\rangle$ であるという条件のもとで、始状態から終状態に至る途中で $A^{(1)}$ の値が $a_{\nu_1}^{(1)}$ である確率」であると解釈される。この確率による $A^{(1)}$ の期待値は

$$\mathbb{E}(A^{(1)} | a_{\nu_2}^{(2)}) := \sum_{\nu_1} a_{\nu_1}^{(1)} P(a_{\nu_1}^{(1)} | a_{\nu_2}^{(2)}) = \frac{\langle \xi | A^{(1)} | \psi \rangle}{\langle \xi | \psi \rangle} \quad (2.17)$$

これはアハラノフ・アルバート・ヴェイドマン [7, 8, 9] によって弱値と名付けられた数量である。深く考えずに解釈すれば、 $\mathbb{E}(A^{(1)} | a_{\nu_2}^{(2)})$ は「始状態 $|\psi\rangle$ と終状態 $|\xi\rangle$ を指定した条件のもとで、始状態から終状態に至る途中で $A^{(1)}$ の期待値」ということになる。問題は、このような数量を実測できるか、ということなのだが、アハラノフたちは弱測定 (weak measurement) という方法を提案して、(2.17) の値を測定できることを示した。

それと、もう一つコメントすると、結合確率が負になることはパンチャラトナムの位相 (Pancharatnam's phase) の一種として理解することもできる。 $(\Pi_{\nu_i}^{(i)} = |\xi_i\rangle\langle\xi_i|$ と書ける場合、) 一つの物理量 $A^{(2)}$ の値の確率分布

$$P(a_{\nu_2}^{(2)}) = \langle \psi | \Pi_{\nu_2}^{(2)} | \psi \rangle = \langle \psi | \xi_2 \rangle \langle \xi_2 | \psi \rangle = \left| \langle \xi_2 | \psi \rangle \right|^2 \quad (2.18)$$

はつねに非負実数値であるが、二つの物理量 $A^{(1)}, A^{(2)}$ の値についての“結合確率”は

$$\begin{aligned} P(a_{\nu_1}^{(1)}, a_{\nu_2}^{(2)}) &= \langle \psi | \Pi_{\nu_2}^{(2)} \Pi_{\nu_1}^{(1)} | \psi \rangle = \langle \psi | \xi_2 \rangle \langle \xi_2 | \xi_1 \rangle \langle \xi_1 | \psi \rangle = \text{Tr} \left(\Pi_{\nu_2}^{(2)} \Pi_{\nu_1}^{(1)} | \psi \rangle \langle \psi | \right) \\ &= re^{i\theta} \end{aligned} \quad (2.19)$$

となる。これは一般に複素数値であり、その位相 θ はパンチャラトナムの位相 [10, 11, 12, 13] と呼ばれる。

擬確率が負になったり、弱値が固有値よりも大きな値になったりすることは、以下のように幾何学的に理解できる。図形的には (2.18) は図 1(a) のように表現できる。ヒルベルト空間の単位ベクトル $|\psi\rangle$ が与えられたとき、そのスカラー倍が張る 1 次元部分空間を射線 (ray) と呼ぶ。(2.18) の中の $|\xi_2\rangle\langle\xi_2|\psi\rangle$ は、ベクトル $|\psi\rangle$ を $|\xi_2\rangle$ の射線に射影したベクトルになっている。これを再び $|\psi\rangle$ の射線に射影すると、 $|\psi\rangle\langle\psi|\xi_2\rangle\langle\xi_2|\psi\rangle$ となり、このベクトルは、必ず元のベクトル $|\psi\rangle$ と同じ向きを向いており、その長さが確率 (2.18) に等しい。

同様に (2.19) も図 1(b), (c) のように表現できる。ベクトル $|\psi\rangle$ を、まず $|\xi_1\rangle$ の射線に射影する。次に $|\xi_2\rangle$ の射線に射影し、もう一度 $|\psi\rangle$ の射線に射影してできるベクトル $|\psi\rangle\langle\psi|\xi_2\rangle\langle\xi_2|\xi_1\rangle\langle\xi_1|\psi\rangle$ の $|\psi\rangle$ に対する比が擬確率 (2.19) に等しい。図 1(b) と (c) とでは $|\xi_1\rangle$ の選び方が異なっている。図 1(c) のように、最後の射影で作られたベクトルが元のベクトル $|\psi\rangle$ の逆方向を向いていれば (2.19) の値は負になる。この図から、互いに直交していない射線が 3 本以上あれば、擬確率は負になりうるということがわかる。一般に、可換な物理量演算子の固有ベクトル空間は一致するか直交するかのどちらかであるから、同時対角化できない非可換物理量があるときに限って、擬確率が負になることがある。ここにも、量子性＝物理量の非可換性 $\Rightarrow$ 物理量の値の同時実在性の否定、負の確率という関係が見える。

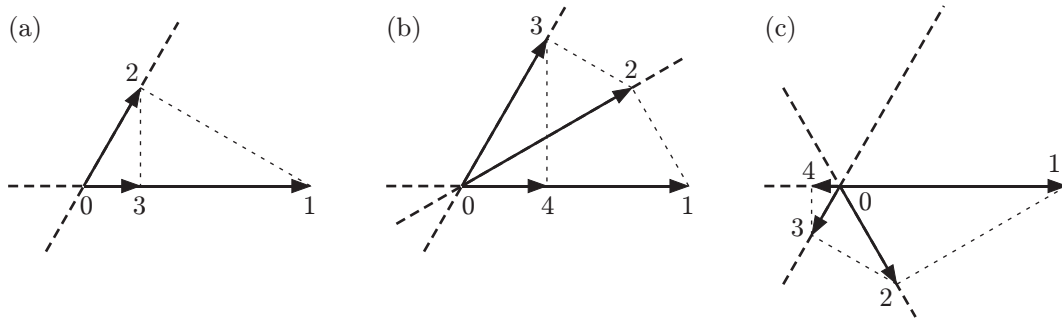


図 1: 擬確率の幾何学的描像。(a) 0 を始点とし 1 を終点とする単位ベクトル $\vec{01} = |\psi\rangle$ を $|\xi_2\rangle$ の射線に射影したのが $\vec{02} = |\xi_2\rangle\langle\xi_2|\psi\rangle$ 。これをもう一度射影した $\vec{03} = |\psi\rangle\langle\psi|\xi_2\rangle\langle\xi_2|\psi\rangle$ の長さが確率 (2.18) に等しい。(b), (c) ともに $\vec{01} = |\psi\rangle$, $\vec{02} = |\xi_1\rangle\langle\xi_1|\psi\rangle$, $\vec{03} = |\xi_2\rangle\langle\xi_2|\xi_1\rangle\langle\xi_1|\psi\rangle$, $\vec{04} = |\psi\rangle\langle\psi|\xi_2\rangle\langle\xi_2|\xi_1\rangle\langle\xi_1|\psi\rangle$ 。最後のベクトル $\vec{04}$ の長さが擬確率 (2.19) に等しい。(c) では最終的にできるベクトル $\vec{04}$ は $\vec{01}$ の逆を向いている。このとき擬確率 (2.19) が負になる。

直線偏光の状態は、射線の図と相似対応する。別のところ [14] でも述べたが、光学の実験で 2 枚の偏光フィルターを偏光軸が直交するように重ねると、光はまったく透過しない (図 2(a))。しかし、2 枚の直交偏光フィルターの上に斜めの偏光フィルターを挿入すると光が少しは通る (図 2(b))。2 枚重ねで光が通らないのに、3 枚重ねた方が光が通るとするのは、直観に反していてちょっとした驚きである。これは 2 状態の遷移確率 (2.18) はゼロであっても、中間状態を指定した遷移確率はゼロではないという状況になっている。さらに中間状態を取り換えると、最終状態に遷移したときに負号が反転することもある (図 2(c))。形式的に、図 2(c) の遷移過程 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ で中間状態 2 を通る確率を正とするなら、遷移過程 $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ で中間状態 4 を通る確率は負だということになる。

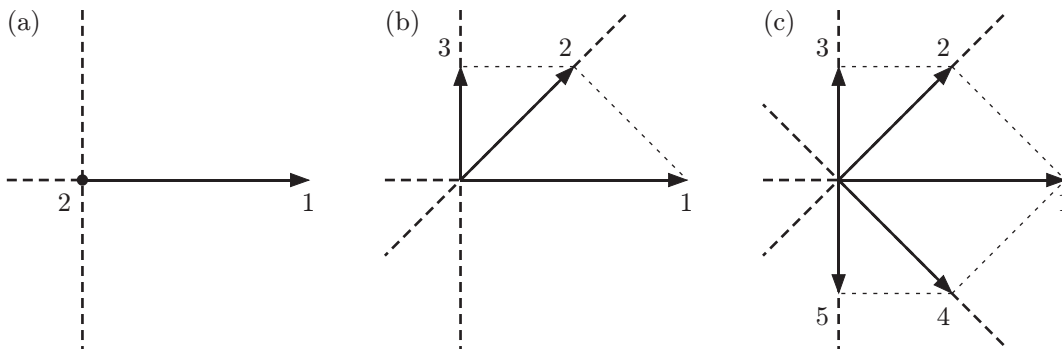


図 2: (a) 直交する偏光状態の遷移確率はゼロ。(b) 途中で斜めの偏光状態に射影すると遷移確率は正になる。(c) 別の中間状態に対する遷移確率もゼロではない。

上の例では正負の擬確率が出て来るようには見えない。正負の違いを浮き上がらせるためには、3 枚目の偏光フィルターの軸をわずかに傾けるとよい。射影したベクトルの長さの比は三角関数 $\cos$ で決まる。重なった 2 枚のフィルターの偏光軸のなす角 (ラジアン) を $\theta \mp \delta$

とすると,

$$\cos(\theta \mp \delta) = \cos \theta \cos \delta \pm \sin \theta \sin \delta \quad (2.20)$$

であり, $\theta = \frac{\pi}{2}$ のときは微小角 δ に対して近似的に

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \mp \delta\right) \approx \pm \delta \quad (2.21)$$

が成り立つ。 $\theta = \frac{\pi}{4}$ のときは微小角 δ に対して

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} \mp \delta\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm \delta) \quad (2.22)$$

という近似が成り立つ。図 2(a) で直交していた軸をわずかな角 δ だけ傾けたものが図 3(a) である。図 3(b) で番号 1 を付けられたベクトルは初期状態 $|\psi\rangle$ である。 $+45^\circ$ 傾いた中間状態を $|\xi_{1+}\rangle$, -45° 傾いた中間状態を $|\xi_{1-}\rangle$ とする。直角から $-\delta$ だけ傾いた終状態を $|\xi_2\rangle$ とする。図 3(a) に見られるように, 始状態 $|\psi\rangle$ から終状態 $|\xi_2\rangle$ に遷移する全確率 (2.18) は

$$P_{\text{fin}} := \left| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \right|^2 \approx \delta^2 \quad (2.23)$$

となる。中間状態 $|\xi_{1\pm}\rangle$ を指定した“結合確率” (2.19) を, 図 3(b) を見ながら計算する。始状態 $|\psi\rangle$ から中間状態 $|\xi_{1+}\rangle$ を経て終状態 $|\xi_2\rangle$ に遷移する“結合確率”は, 図 3(b) では $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ の順の射影で与えられ,

$$P_+ := \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx \frac{1}{2}\delta(1 + \delta) \quad (2.24)$$

となる。同様に, 始状態 $|\psi\rangle$ から中間状態 $|\xi_{1-}\rangle$ を経て $|\xi_2\rangle$ に遷移する“結合確率”は, 図 3(b) の $1 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7$ の順の射影で与えられ,

$$P_- := \cos\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \delta\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx -\frac{1}{2}\delta(1 - \delta) \quad (2.25)$$

となる。 δ が正の微小量なら P_- は負の数である。このとき“条件付き確率”は

$$C_+ := \frac{P_+}{P_{\text{fin}}} \approx \frac{1}{2\delta^2}\delta(1 + \delta) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\delta}\right), \quad (2.26)$$

$$C_- := \frac{P_-}{P_{\text{fin}}} \approx -\frac{1}{2\delta^2}\delta(1 - \delta) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\delta}\right) \quad (2.27)$$

となる。例えば $\delta = \frac{1}{100}$ ならば,

$$C_+ = \frac{1}{2}\left(1 + 100\right) = \frac{101}{2}, \quad C_- = \frac{1}{2}\left(1 - 100\right) = -\frac{99}{2} \quad (2.28)$$

となる。つまり, 終状態 $|\xi_2\rangle$ に達する途中で状態 $|\xi_{1+}\rangle$ を通過した“条件付き確率” C_+ は絶対値の大きな正の数になり, 状態 $|\xi_{1-}\rangle$ を通過した“条件付き確率” C_- は絶対値の大きな負の数になる。ただし $C_+ + C_- = 1$ は成り立っている。このような極端な大小関係になるのは, P_+ は δ のオーダーの正の数, P_- は絶対値が δ のオーダーの負の数でありながら, 和 $P_{\text{fin}} = P_+ + P_-$ は δ^2 のオーダーの正の数だからだ。

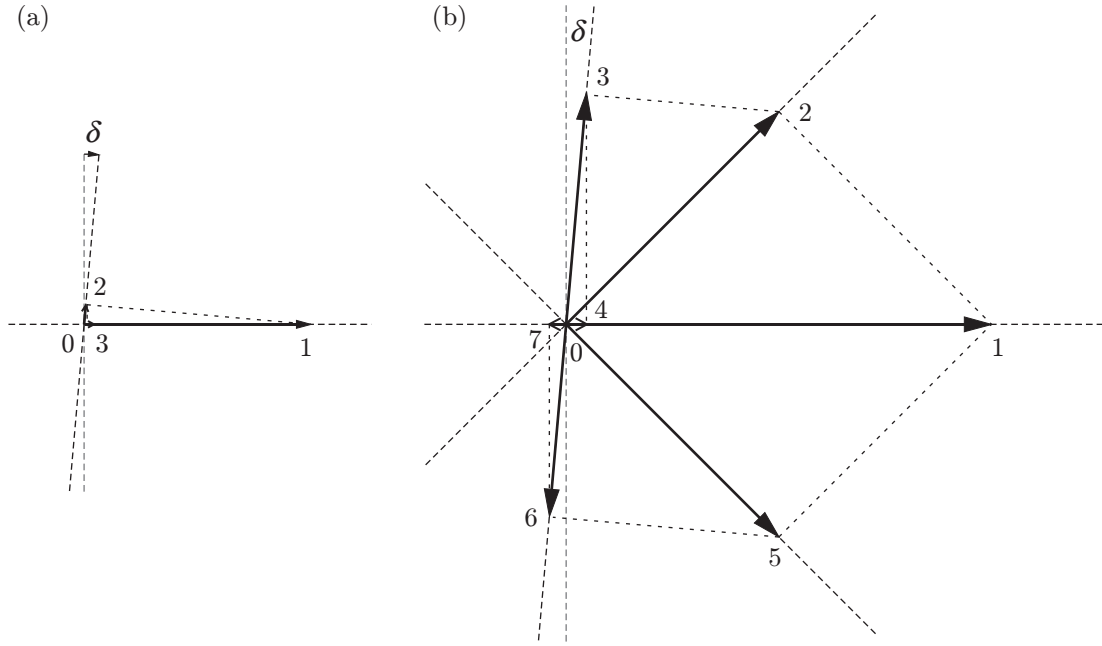


図 3: (a) 直交していた偏光軸をわずかな角 δ の分だけ傾けると、 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ の順に射影されたベクトルは元のベクトルの δ^2 倍程度の大きさになる。(b) 斜め 45° の偏光を中間状態とする射影 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ は、元のベクトルの δ 倍程度の大きさで元と同じ向きのベクトルを与える。 -45° の偏光を中間状態とする射影 $1 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7$ は、元のベクトルの δ 倍程度の大きさで元と逆向きのベクトルを与える。

さらに、便宜的に $a_- < a_+$ として、状態 $|\xi_{1+}\rangle$ を固有値 a_+ の固有ベクトル、状態 $|\xi_{1-}\rangle$ を固有値 a_- の固有ベクトルとする物理量 $A^{(1)}$ があると、その“条件付き期待値”（弱値）は

$$\begin{aligned} a_w &:= \mathbb{E}\left(A^{(1)} \middle| |\xi_2\rangle\right) = C_+ a_+ + C_- a_- = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)a_+ + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\delta}\right)a_- \\ &= \frac{1}{2}(a_+ + a_-) + \frac{1}{2\delta}(a_+ - a_-) \quad (2.29) \end{aligned}$$

となる。 δ の絶対値が小さいと、弱値 (2.29) は、 $a_- < a_w < a_+$ の範囲に収まらず、極端に大きな値になる。このような条件がそろえば、(2.17) のアハラノフ・アルバート・ヴェイDMANの弱値は、異常に大きな値になり得る。これが弱値の増幅と呼ばれる現象である。この条件では終状態に達する確率 P_{fin} は非常に小さいので（ $\delta = \frac{1}{100}$ の例では $P_{\text{fin}} \approx 10^{-4}$ ），測定実験を多数回繰り返して、所望の終状態に達したサンプルを集める必要がある。始状態と終状態とが直交からほんの少しだけずれていて、かすかな信号が検出されるときに、弱値は異常に大きくなることは、定義式 (2.17) からわかることだが、スダルシャンら [15] や細谷氏 [16] も物理的な例を通して示している。

参考文献

- [1] 谷村省吾「アインシュタインの夢 ついえる—測っていない値は実在しない」日経サイエンス 2019 年 2 月号 pp.64–71.

- [2] R. ハンソン, K. シャルム (訳者 熊谷玲美, 監修 谷村省吾)「最終決着:「ベルの不等式」の破れの実験」日経サイエンス 2019 年 2 月号 pp.54–62.
- [3] 谷村省吾「揺らぐ境界—非実在が動かす実在」日経サイエンス 2013 年 7 月号 pp.36–45 (別冊日経サイエンス No.199「量子の逆説」(2014 年) pp.66–75 に再録) . 補足解説が日経サイエンス社ウェブサイトで公開されている: <http://www.nikkei-science.com/?p=37107>
- [4] 谷村省吾「量子論と代数—思考と表現の進化論」数理科学 2018 年 3 月号 pp.42–48. 補足解説がサイエンス社ウェブサイトで公開されている: http://www.saiensu.co.jp/index.php?page=support_details&sup_id=511
- [5] J. Lee and I. Tsutsui, “Quasi-probabilities in conditioned quantum measurement and a geometric/statistical interpretation of Aharonov’s weak value”, Prog. Theor. Exp. Phys. 052A01 (146pp) (2017). Hashed operators という概念を用いて, 無数にある擬確率を特徴付けている。
- [6] A. Fine, “Hidden variables, joint probability, and the Bell inequality,” Phys. Rev. Lett. **48**, 291–295 (1982).
- [7] Y. Aharonov, D. Z. Albert, and L. Vaidman, “How the result of a measurement of a component of the spin of a spin- $\frac{1}{2}$ particle can turn out to be 100,” Phys. Rev. Lett. **60**, 1351–1354 (1988).
- [8] 古田彩「存在確率マイナス 1」; Y. アハラノフ (語り), 古田彩 (聞き手), 鹿野豊・細谷暁夫 (監修)「宇宙の未来が決める現在」; 井元信之・横田一広「量子の“開かずの間”をのぞき見る」: 日経サイエンス 2009 年 10 月号 pp.22–35 (別冊日経サイエンス 186 号「実在とは何か?」(2012 年) pp.46–59 に再録)。粒子がある経路を通る確率が -1 であると考えざるを得ない現象も, アハラノフの弱値概念を使えば“理論どおり”に説明できる。
- [9] 細谷暁夫「「光子の裁判」再び—波乃光子は本当に無罪か」; Y. アハラノフ (語り), 古田彩 (聞き手), 鹿野豊 (監修)「光子は未来を知っている」: 別冊日経サイエンス No.199「量子の逆説」(2014 年) pp.40–51, pp.60–63.
- [10] S. Pancharatnam, “Generalized theory of interference, and its applications”, Proc. Ind. Acad. Sci. A **44**, 247–262 (1956). http://www-old.ias.ac.in/j_archive/proca/44/5/247-262/viewpage.html
- [11] 谷村省吾「トムとベリー: 量子力学および古典力学の微分幾何学的側面とゲージ理論について」素粒子論研究 85 巻 1 号, 1–89 (1992 年 4 月). ベリーの位相に関する般論と具体例を提示している。パンチャラトナムの位相についても解説あり。 https://www.jstage.jst.go.jp/article/soken/85/1/85_KJ00004707115/_article/-char/ja/
- [12] S. Tamate, H. Kobayashi, T. Nakanishi, K. Sugiyama, and M Kitano, “Geometrical aspects of weak measurements and quantum erasers”, New Journal of Physics **11**, 093025 (11pp) (2009).

- [13] H. Kobayashi, S. Tamate, T. Nakanishi, K. Sugiyama, and M. Kitano, “Observation of geometric phases in quantum erasers”, J. Phys. Soc. Jpn. **80**, 034401 (6pp) (2011).
- [14] 谷村省吾「光子の逆説」日経サイエンス 2012 年 3 月号 pp.32–43（別冊日経サイエンス No.199「量子の逆説」pp.6–17 に再録。とくにこの中の p.11 と p.15 の図説を参照）。
- [15] I. M. Duck, P. M. Stevenson, and E. C. G. Sudarshan, “The sense in which a weak measurement of a spin- $\frac{1}{2}$ particle’s spin component yields a value 100,” Phys. Rev. D **40**, 2112–2117 (1989). Aharonov らの論文 [7] の謎解き・解説論文。
- [16] 細谷暁夫「「光子の裁判」再び—波乃光子は本当に無罪か」日経サイエンス 2014 年 1 月号 pp.34–43（別冊日経サイエンス No.199「量子の逆説」（2014 年）pp.42–51 に再録）。詳しい計算も書かれた補足解説「ヤングの 2 重スリットの実験と「弱値」」がウェブに公開されている：<http://www.nikkei-science.com/?p=39695>
- [17] ニールス・ボーア（山本義隆 編訳）「因果性と相補性」岩波書店 (1999). 「記号的な作用素が非可換であるということは、そのそれぞれに対応する物理量の正確な定義を可能とするような実験設定が相互に背反的であるということを直接に反映しているのである. (p.308)」, 「相補性 (Komplementarität) : 一見したところその共存が科学の基本原則とは相容れないように見える新しい諸法則に対して、物理学の法則としての地位を与えているのは、もっぱら相補的な物理量の曖昧さのない定義を可能とする二つの実験手続きが互いに排他的であることのみによる. (p.114)」, 「考察している対象の振る舞いに関して、異なる設定の実験によって私たちが手に入れる、見かけ上は互いに相容れない情報は、明らかに従来のやり方では相互に関係付けることはできないけれども、(経験全体の包括的な説明にとっては同様に欠かすことのできないものであって、) それらは互いに相補的であると見なし得るのです. (p.124)」
- [18] H. F. Hofmann, “On the resolution of quantum paradoxes by weak measurements,” arXiv: 0911.0071 (2009). 弱値を用いて、負の確率を定義し、ベル不等式の破れを説明した。「ベル不等式の破れは、局所性を否定しているのではなく、実在を否定しているのだ」という見解はこの論文にも書かれている。
- [19] B. L. Higgins, M. S. Palsson, G. Y. Xiang, H. M. Wiseman, and G. J. Pryde, “Using weak values to experimentally determine “negative probabilities” in a two-photon state with Bell correlations”, Physical Review A **91**, 012113 (8pp) (2015). ベル不等式が破れる状況で負の確率を弱測定の方法で測ったという報告。この論文は最初 2011 年に電子アーカイブ (arXiv: 1112.3664) に公開され、2012 年に Physical Review A に投稿された後、2015 年によりよく掲載されている。