日本物理学会2019年9月
岐阜大学

11pK13-2

量子論の弱値の幾何学的解釈、とくに負の確率の幾何学的描像

谷村 省吾

名古屋大学 大学院 情報学研究科

弱値 weak value

- 1988年に Aharonov, Albert, Vaidman が提唱した量子力学上の概念.
- 弱測定 weak measurement で測られる値だから weak value と名付けられた.
- 意味的には「初期状態と終状態で条件付けられた期待値」と呼んだ方がよい.

Yakir Aharonov

https://history.aip.org/phn/11408012.html

物理量と値を区別する

- 物理量 observable
  - 和・差・積・スカラー倍の演算ができる
  - 積は非可換かもしれない
  - 測れば値を出力する
- $L_1 + L_2 = L_3$
- $L = 2\pi r^2, \quad S = \pi r^2, \quad S = \frac{1}{2}ab$
- $E = mc^2, \quad E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + mgz$
- $H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kq^2, \quad qp - pq = i\hbar$
- $S_n = S_x + S_y$

物理量と値を区別する

- 値 value

  単位系を定めれば実数値として定まるもの.
- $\varepsilon(M) = 55\ \mathrm{kg}$　（ε : evaluation map）
- $M = 55\ \mathrm{kg}$ と書いてもよい.
- でも気持ち的には $M \to 55\ \mathrm{kg}$ あるいは $M \leftarrow 55\ \mathrm{kg}$
- $\varepsilon(L) = 1.67\ \mathrm{m}$

量子論における三種の値

1. 固有値 eigenvalue

$$\hat{A}|\varphi_i\rangle = a_i|\varphi_i\rangle$$

- $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$　スペクトル値ともいう.
- 一回一回の測定で得られる値.

2. 期待値 expectation value

$$\langle\hat{A}\rangle = \mathbf{E}[\hat{A}] = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$$

- 統計的平均値.

3. 弱値 weak value

$$w(\hat{A}) = \frac{\langle\psi_{\mathrm{fin}}|\hat{A}|\psi_{\mathrm{ini}}\rangle}{\langle\psi_{\mathrm{fin}}|\psi_{\mathrm{ini}}\rangle}$$

弱値の性質

弱値 weak value

$$w(\hat{A}) = \frac{\langle \psi_{\mathrm{fin}} | \hat{A} | \psi_{\mathrm{ini}} \rangle}{\langle \psi_{\mathrm{fin}} | \psi_{\mathrm{ini}} \rangle}$$

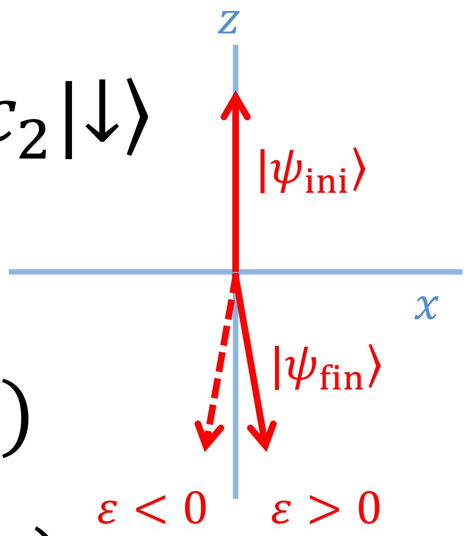
1. 一般に複素数値である（実部と虚部が別々に測れる）．
2. 状態ベクトルの位相変換$|\psi_k\rangle \to e^{i\theta_k}|\psi_k\rangle$のもとで不変
3. $\hat{A}$の最大固有値a_{max}と最小固有値a_{min}があっても

$$a_{\mathrm{min}} \le \mathbf{Re}\, w(\hat{A}) \le a_{\mathrm{max}}$$

は一般には成り立たない

弱値の計算例

スピン $\frac{1}{2}$（2状態系）$|\psi\rangle = c_1|\uparrow\rangle + c_2|\downarrow\rangle$



$$|\psi_{\mathrm{ini}}\rangle = |\uparrow\rangle$$

$$|\psi_{\mathrm{fin}}\rangle = \varepsilon|\uparrow\rangle + \sqrt{1-\varepsilon^2}|\downarrow\rangle \quad (|\varepsilon| \ll 1)$$

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$w(\hat{\sigma}_x) = \frac{\langle\psi_{\mathrm{fin}}|\hat{\sigma}_x|\psi_{\mathrm{ini}}\rangle}{\langle\psi_{\mathrm{fin}}|\psi_{\mathrm{ini}}\rangle} = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} \to \pm\infty$$

$$(\varepsilon \to \pm 0)$$

通常の期待値の性質

$\hat{A}$の最大固有値a_{max}と最小固有値a_{min} があるならば

$$a_{\mathrm{min}} \leq \langle \hat{A} \rangle \leq a_{\mathrm{max}}$$

が成り立つ.

なぜなら

$$a_{\mathrm{min}} \leq a_i \leq a_{\mathrm{max}}$$

と確率 p_i は $0 \leq p_i \leq 1,\ \sum_i p_i = 1$を満たすので

$$p_i a_{\mathrm{min}} \leq p_i a_i \leq p_i a_{\mathrm{max}}$$

$$a_{\mathrm{min}} = \sum_i p_i a_{\mathrm{min}} \leq \sum_i p_i a_i \leq \sum_i p_i a_{\mathrm{max}} = a_{\mathrm{max}}$$

弱値の確率解釈

$$w(\hat{A}) = \frac{\langle \psi_{\mathrm{fin}} | \hat{A} | \psi_{\mathrm{ini}} \rangle}{\langle \psi_{\mathrm{fin}} | \psi_{\mathrm{ini}} \rangle} = \sum_i p_i a_i$$

となる p_i（$0 \le p_i \le 1$, $\sum_i p_i = 1$）が存在するならば，$a_{\mathrm{min}} \le w(\hat{A}) \le a_{\mathrm{max}}$.

$a_{\mathrm{min}} \le w(\hat{A}) \le a_{\mathrm{max}}$が成り立たないならば，確率解釈を捨てるか，$0 \le p_i \le 1$, $\sum_i p_i = 1$のどちらかを放棄すべき.

$$w(\hat{1}) = \frac{\langle \psi_{\mathrm{fin}} | \hat{1} | \psi_{\mathrm{ini}} \rangle}{\langle \psi_{\mathrm{fin}} | \psi_{\mathrm{ini}} \rangle} = 1 = \sum_i p_i$$

は成立するので，放棄すべきは $0 \le p_i \le 1$.

弱値の測定モデル

対象系　$|\psi\rangle \in \mathfrak{H}$　$\hat{A} = \sum_a a\hat{\Pi}_a$　$\hat{B} = \sum_b b\hat{\Pi}_b$

測定器　$|\lambda\rangle \in \mathcal{L}$,　$\widehat{M}$ (meter observable)

複合系の状態　$|\psi\rangle \otimes |\lambda\rangle \in \mathfrak{H} \otimes \mathcal{L}$

相互作用　$|\psi\rangle \otimes |\lambda\rangle \mapsto \widehat{U}_g |\psi\rangle \otimes |\lambda\rangle$（$g$は結合定数）

$\hat{A}$ の値を知りたくて $\widehat{M}$ の値を読み取る.

終状態 $|\psi_{\mathrm{fin}}\rangle$ として $\hat{B}$ の固有状態 $|b\rangle$ を選ぶ.

$g \to 0$ の極限で $\widehat{U}_g \to \hat{1}$ と次式を仮定：

$$\frac{d\widehat{U}_g}{dg} \to -\frac{i}{\hbar}\hat{A} \otimes \hat{P}_M, \quad \left[\widehat{M}, \hat{P}_M\right] = i\hbar\hat{1}$$

このとき，　$\frac{d}{dg}\widehat{U}_g{}^{\dagger}\left(\hat{1} \otimes \widehat{M}\right)\widehat{U}_g \to \hat{A} \otimes \hat{1}$

弱値の公式

メーター読み取り値の条件付き期待値

$$\mathbf{E}\left[\widehat{M}|\widehat{B}=b\right]:=\frac{\langle\psi\otimes\lambda|\widehat{U}^{\dagger}\left(\widehat{\Pi}_b\otimes\widehat{M}\right)\widehat{U}|\psi\otimes\lambda\rangle}{\langle\psi\otimes\lambda|\widehat{U}^{\dagger}\left(\widehat{\Pi}_b\otimes\widehat{1}\right)\widehat{U}|\psi\otimes\lambda\rangle}$$

感受率の弱結合極限（厳密に成立）

$$\lim_{g\to 0}\frac{d}{dg}\mathbf{E}\left[\widehat{M}|\widehat{B}=b\right]=\mathbf{Re}\frac{\langle\psi|\widehat{\Pi}_b\widehat{A}|\psi\rangle}{\langle\psi|\widehat{\Pi}_b|\psi\rangle}$$

$$+\mathbf{Im}\left(\frac{\langle\psi|\widehat{\Pi}_b\widehat{A}|\psi\rangle}{\langle\psi|\widehat{\Pi}_b|\psi\rangle}\right)\frac{1}{\hbar}\left\{\frac{1}{2}\langle\psi|\left(\widehat{M}\widehat{P}_M+\widehat{P}_M\widehat{M}\right)|\psi\rangle-\langle\psi|\widehat{M}|\psi\rangle\langle\psi|\widehat{P}_M|\psi\rangle\right\}$$

Lee and Tsutsui, PTEP (2017), Eq. (4.63)をいまのモデルに合うように改変.

弱値の書き換え

$\hat{\Pi}_b = |b\rangle\langle b|$ が１次元固有空間への射影である場合,

$$\frac{\langle\psi|\hat{\Pi}_b\hat{A}|\psi\rangle}{\langle\psi|\hat{\Pi}_b|\psi\rangle} = \frac{\langle\psi|b\rangle\langle b|\hat{A}|\psi\rangle}{\langle\psi|b\rangle\langle b|\psi\rangle} = \frac{\langle b|\hat{A}|\psi\rangle}{\langle b|\psi\rangle} = \frac{\langle\psi_{\mathrm{fin}}|\hat{A}|\psi_{\mathrm{ini}}\rangle}{\langle\psi_{\mathrm{fin}}|\psi_{\mathrm{ini}}\rangle}$$

李・筒井の弱値の式は，Aharanov-Albert-Vaidman の式に帰着する.

弱値の書き換え 2

スペクトル分解 $\hat{A}=\sum_a a\hat{\Pi}_a$ を入れる：

$$\frac{\langle\psi|\hat{\Pi}_b\hat{A}|\psi\rangle}{\langle\psi|\hat{\Pi}_b|\psi\rangle}=\sum_a a\frac{\langle\psi|\hat{\Pi}_b\hat{\Pi}_a|\psi\rangle}{\langle\psi|\hat{\Pi}_b|\psi\rangle}$$

Bornの確率公式

$$\mathbf{P}\left[\hat{B}=b\right]\coloneqq\langle\psi|\hat{\Pi}_b|\psi\rangle$$

Kirkwood-Diracの擬確率（一般には複素数）

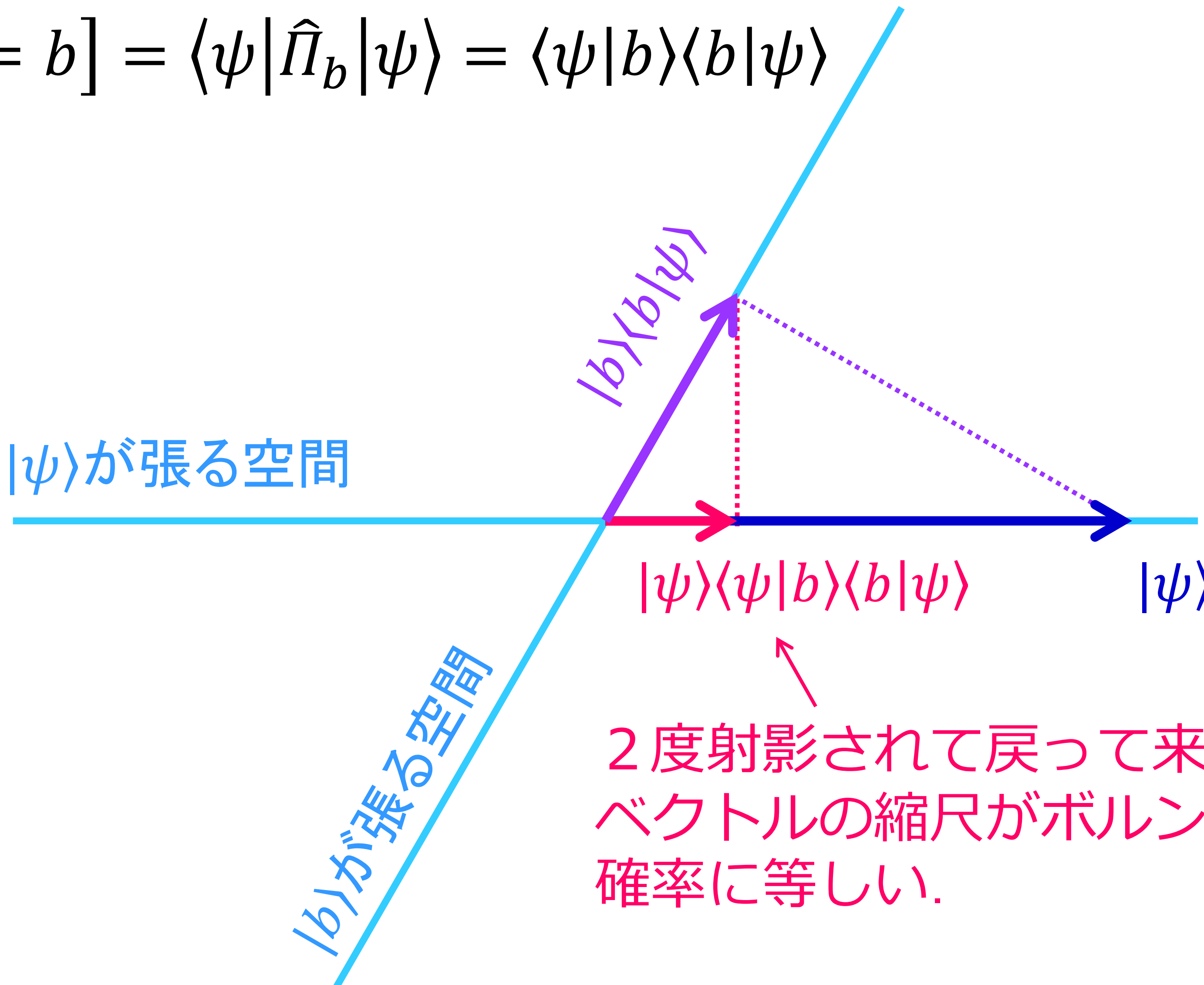
$$\mathbf{P}\left[\hat{A}=a,\hat{B}=b\right]\coloneqq\langle\psi|\hat{\Pi}_b\hat{\Pi}_a|\psi\rangle$$

条件付き擬確率

$$\mathbf{P}\left[\hat{A}=a\middle|\hat{B}=b\right]\coloneqq\frac{\mathbf{P}\left[\hat{A}=a,\hat{B}=b\right]}{\mathbf{P}\left[\hat{B}=b\right]}$$

Born確率の幾何学的解釈

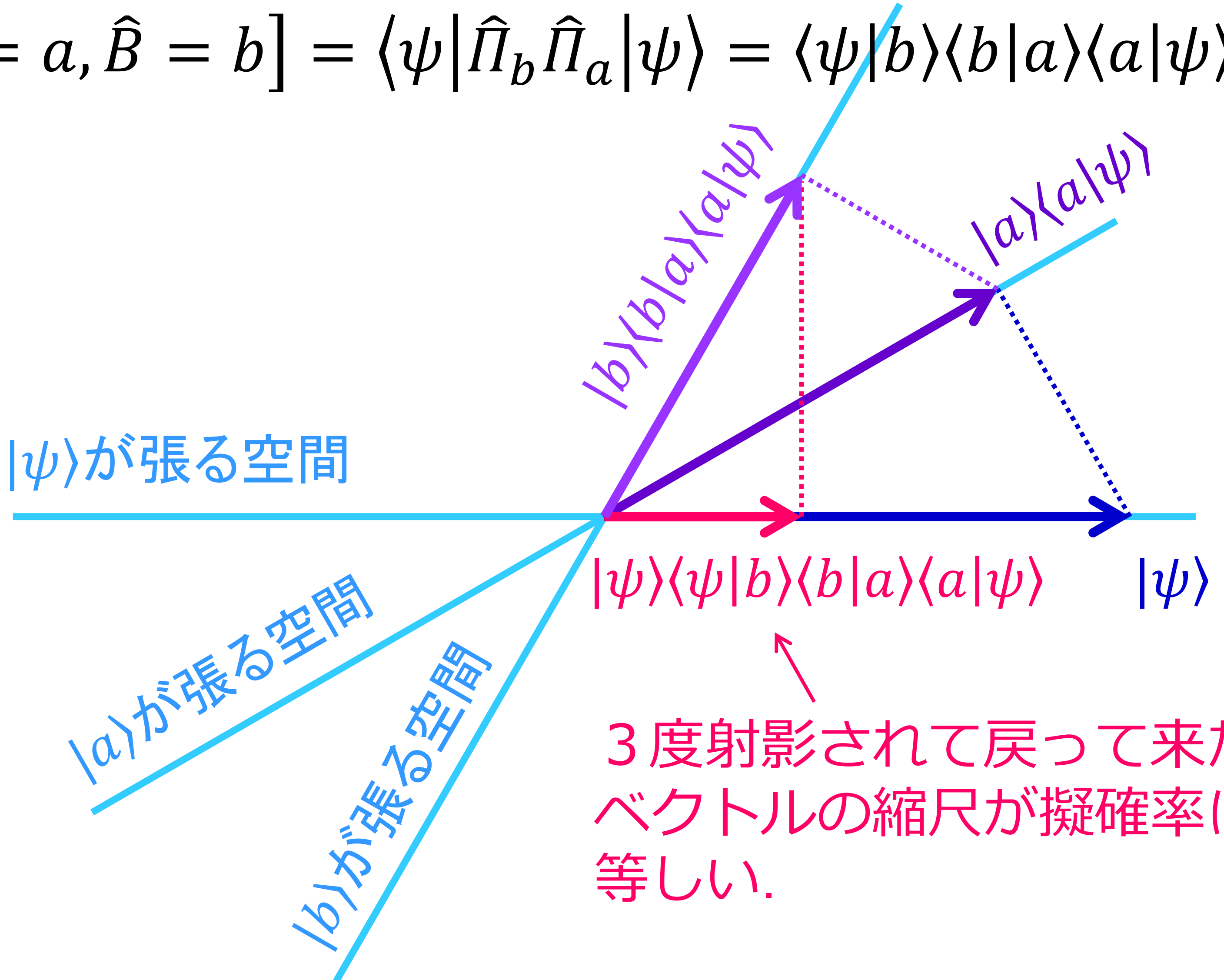
$$\mathbf{P}\left[\hat{B} = b\right] = \langle\psi\middle|\hat{\Pi}_b\middle|\psi\rangle = \langle\psi|b\rangle\langle b|\psi\rangle$$



２度射影されて戻って来たベクトルの縮尺がボルンの確率に等しい.

Kirkwood-Dirac擬確率の幾何学的解釈

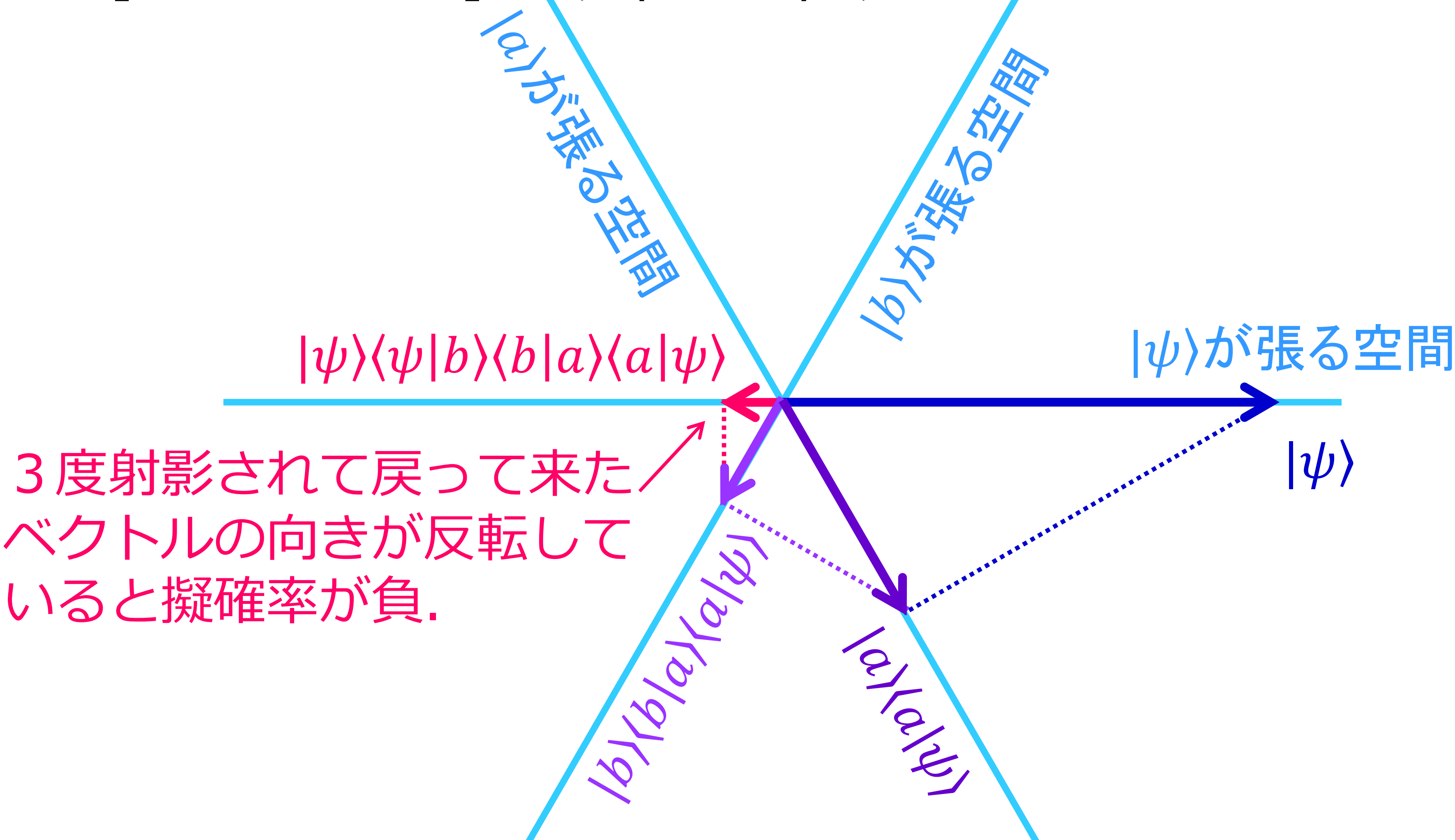
$$\mathbf{P}\left[\hat{A}=a,\hat{B}=b\right]=\langle\psi|\hat{\Pi}_b\hat{\Pi}_a|\psi\rangle=\langle\psi|b\rangle\langle b|a\rangle\langle a|\psi\rangle$$



３度射影されて戻って来たベクトルの縮尺が擬確率に等しい.

擬確率が負になるケース

$$\mathbf{P}\left[\hat{A}=a,\hat{B}=b\right]=\left\langle\psi\middle|\hat{\Pi}_b\hat{\Pi}_a\middle|\psi\right\rangle=\langle\psi|b\rangle\langle b|a\rangle\langle a|\psi\rangle$$



擬確率が確率になるケース

- 可換な自己共役演算子は同時対角化可能.
- それらの固有空間は互いに直交するか平行であるかしかない.
- そのような固有空間への射影演算子は必ず可換であり，joint probability が非負実数値で well-defined.

$$\mathbf{P}\left[\hat{A}=a,\hat{B}=b\right]=\left\langle\psi\middle|\hat{\Pi}_b\hat{\Pi}_a\middle|\psi\right\rangle=\left\langle\psi\middle|\hat{\Pi}_a\hat{\Pi}_b\middle|\psi\right\rangle$$

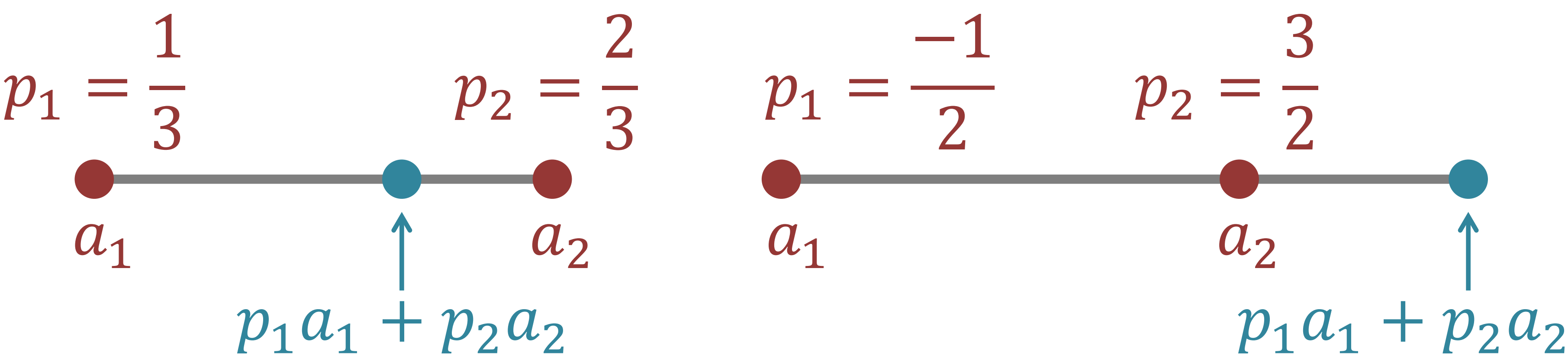
- そのような射影を何回やっても元のベクトルの逆向きのベクトルになることはない.

どういう場合に擬確率が負になるか

- 非可換演算子は同時対角化できない.
- 固有空間が直交もせず平行でもないケースがある.
- 射影を繰り返すことによってベクトルの向きが逆転しうる．このとき負の擬確率発生.
- 中間状態で弱値を測ろうとする物理量演算子$\hat{A}$と，終状態を定める物理量演算子$\hat{B}$とが非可換であることが，負の擬確率が生じるための必要条件.

負の擬確率で何がわかるか

- 期待値＝確率重みづけによるスペクトルの重心
- 確率が正なら，期待値は内分点
- 確率が負なら，期待値は外分点 ⇒いわゆる「弱値による増幅効果」



擬確率でわかること

- Bellの不等式の破れの特徴付け：擬確率が負になることが，Bellの不等式が破れるための必要十分条件（Fineの定理）．
- 複素数の擬確率の位相＝Pancharatnam phase.
- 弱値のしくみ（非可換物理量の存在・射影の非可換性・射影の合成が擬確率の符号や位相を決める）を理解することにより，弱値の“異常さ”がほぐれて，弱値を理解し，制御しやすくなる.

参考文献

1. 谷村省吾「アインシュタインの夢ついえる」（ベルの不等式の破れの検証実験の解説記事）日経サイエンス2019年2月号のウェブ補足解説.
2. Lee and Tsutsui, "Quasi-probabilities in conditioned quantum measurement and a geometric/statistical interpretation of Aharonov's weak value", PTEP (2017).
3. Tamate, Kobayashi, Nakanishi, Sugiyama, Kitano, "Geometrical aspects of weak measurements and quantum erasers", NJP (2009).

Thank you for your attention