

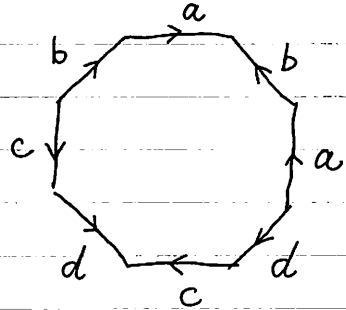
愛媛大学 量子物理学 令和元年 8月26~29日 谷村省吾

レポート課題 2019年9月9日(月) 15:00までに学科共通事務室に提出せよ。

~~1問目~~ $\{f: V \rightarrow \mathbb{R} \text{ 線形}\}$

① ベクトル空間 V の部分空間 S に対し、双対空間 V^* の部分空間 $S^\perp := \{f \in V^* \mid \forall s \in S, f(s) = 0\}$ を S の零化空間と呼ぶ。このとき次式が成り立つことを示せ:

$$S_1 \subset S_2 \Rightarrow (S_1)^\perp \supset (S_2)^\perp$$



② この展開図に対する完成図を描け:

③ $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ と $p = 1, 2, 3, \dots$ に対し

$$\|\psi\|_p := \left(\sum_j |\psi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|\psi\|_\infty := \max\{|\psi_1|, |\psi_2|, \dots, |\psi_n|\}$$

と定める。このとき $\lim_{p \rightarrow \infty} \|\psi\|_p = \|\psi\|_\infty$ が成り立つことを示せ。

また、 $\|\psi\|_\infty$ がノルムの条件(正定値性, スカラー倍, 三角不等式)を満たすことを示せ。

④ 演算子 \hat{A} の共役演算子 \hat{A}^\dagger を $\langle \hat{A}^\dagger x, \psi \rangle = \langle x, \hat{A} \psi \rangle$ (すなわち $\langle \hat{A} x, \psi \rangle = \langle x, \hat{A}^\dagger \psi \rangle$) で定める。 \hat{A} が $(\hat{A})_{ij}$ を成分とする行列であるとき $(\hat{A}^\dagger)_{ij} = (\hat{A})_{ji}^*$ であることを示せ。

⑤ $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ ならば \hat{A} の固有値は実数であり、異なる固有値に属する固有ベクトルは直交することを証明せよ。

⑥ 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1+2i \\ 1-2i & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

⑦ 次式を証明せよ: $\frac{d}{dt} \langle \psi(t), \psi(t) \rangle = \left\langle \frac{d\psi}{dt}, \psi \right\rangle + \left\langle \psi, \frac{d\psi}{dt} \right\rangle$

⑧ 群において単位元は一意的であることを示せ。
各元に対する逆元は一意的であることを示せ。

以上