2017年9月22日
日本物理学会 岩手大学 22aA42-9

モノポール磁場と中心力場中を動く荷電粒子の運動についての幾何学的考察

谷村 省吾

名古屋大学大学院情報学研究科

プレゼン資料をウェブ公開しました：
http://www.phys.cs.is.nagoya-u.ac.jp/~tanimura/

前置き

- 本講演の内容は、物理数学としては、既知の結果だろうと思います。
- 自分で答えを出した後で文献を調べたところ、似たような主張が書いてある文献を見つけることができました。
- それでもこれと同じ結論に至る計算や証明を明示している文献は見つかりませんでした。
- 内容は教育的であると思われるので、ご紹介します。

背景

- ３次元空間中の質点の運動方程式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} = F(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r} \quad = -\frac{\kappa}{r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

- 角運動量とエネルギーが保存
- 運動方程式は求積できる（形式的に解ける）
- 力の大きさが距離の２乗に反比例する中心力場（万有引力やクーロン電気力）の場合、解は具体的に求められる（楕円・放物線・双曲線）

問題

- モノポール磁場そのものは、距離の２乗に反比例する中心力的な場

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{g}{r^2} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

- 中心力に加えてモノポール磁場のローレンツ力が働く場合、質点の運動はいかなるものか？

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = F(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r} + e\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$$

答え

中心力に加えてモノポール磁場のローレンツ力が働く場合の質点の運動は、中心力だけを受けて平面上を動く質点の運動を、円錐面に変換した運動になる。軌道の形だけでなく時間依存性も。

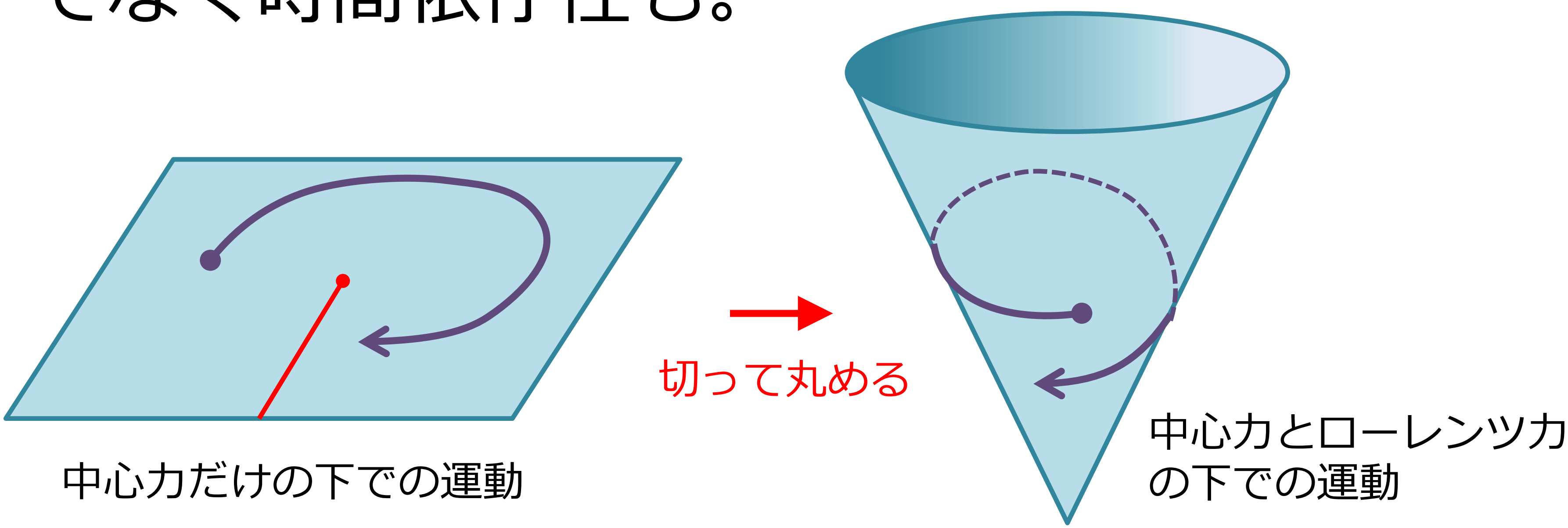


写真1

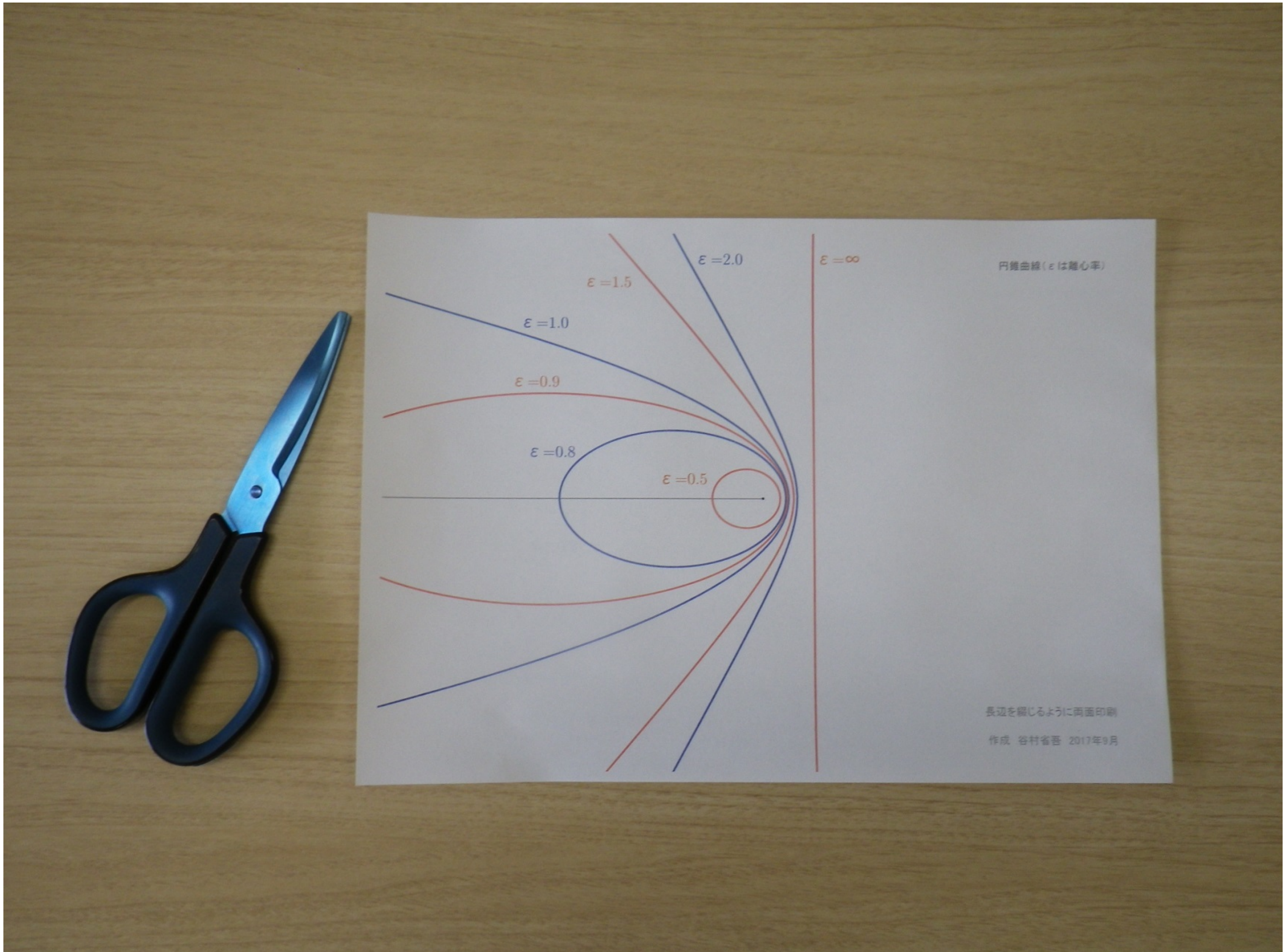

ε =2.0
ε =∞
ε =1.5
ε =1.0
ε =0.9
ε =0.8
ε =0.5
円錐曲線（εは離心率）
長辺を綴じるように両面印刷
作成　谷村省吾　2017年9月

写真2

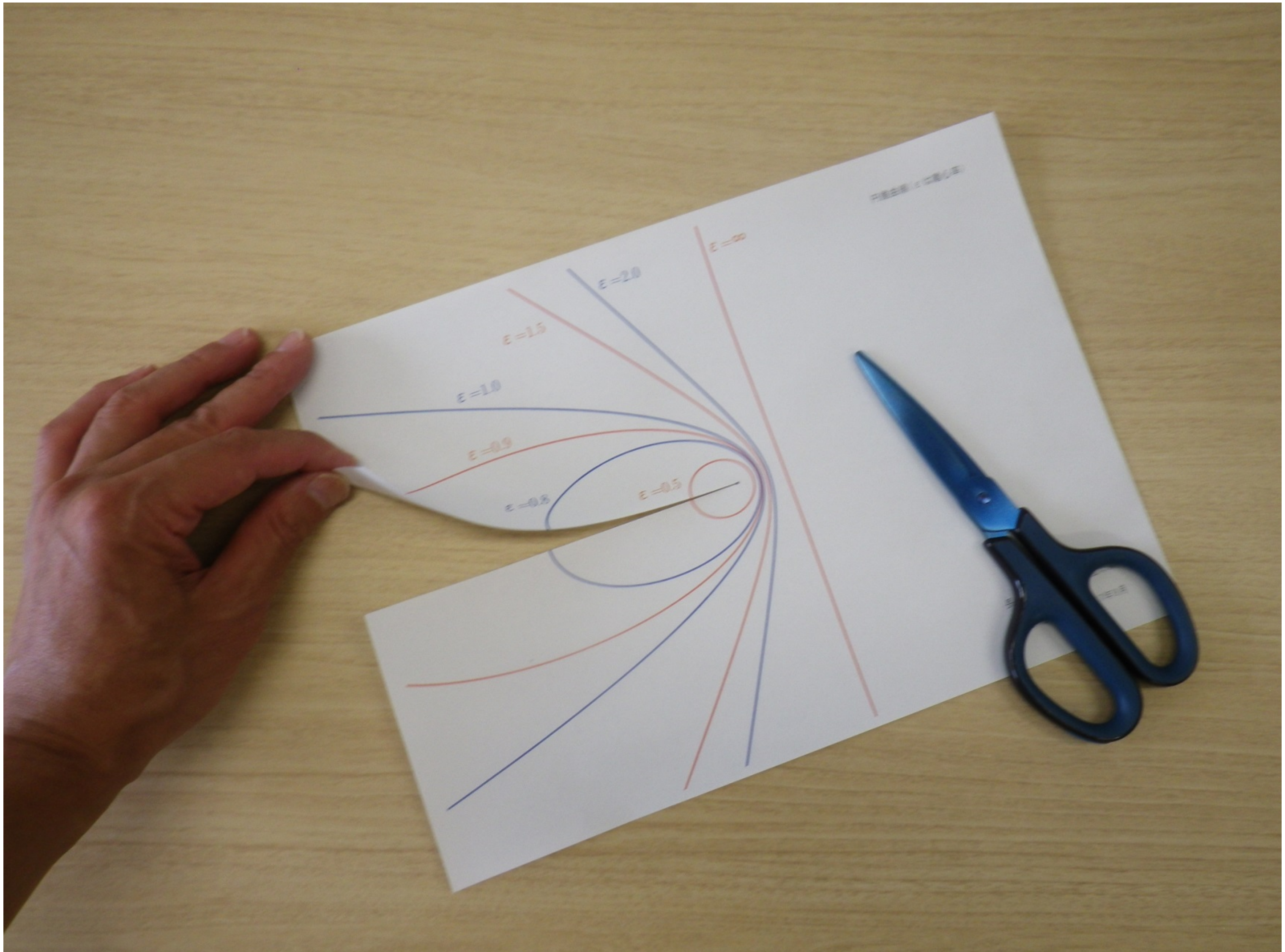


写真3

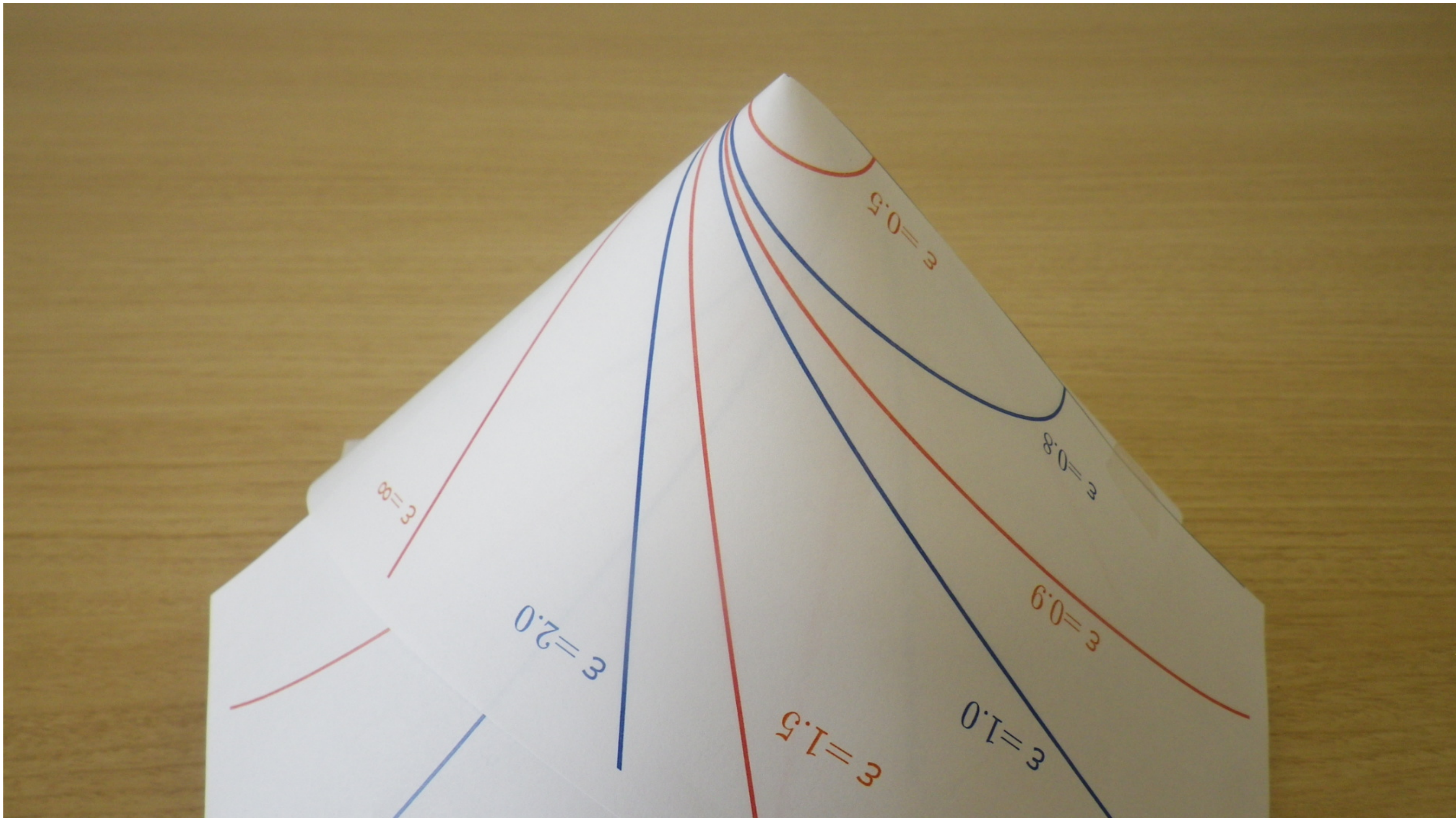


写真4

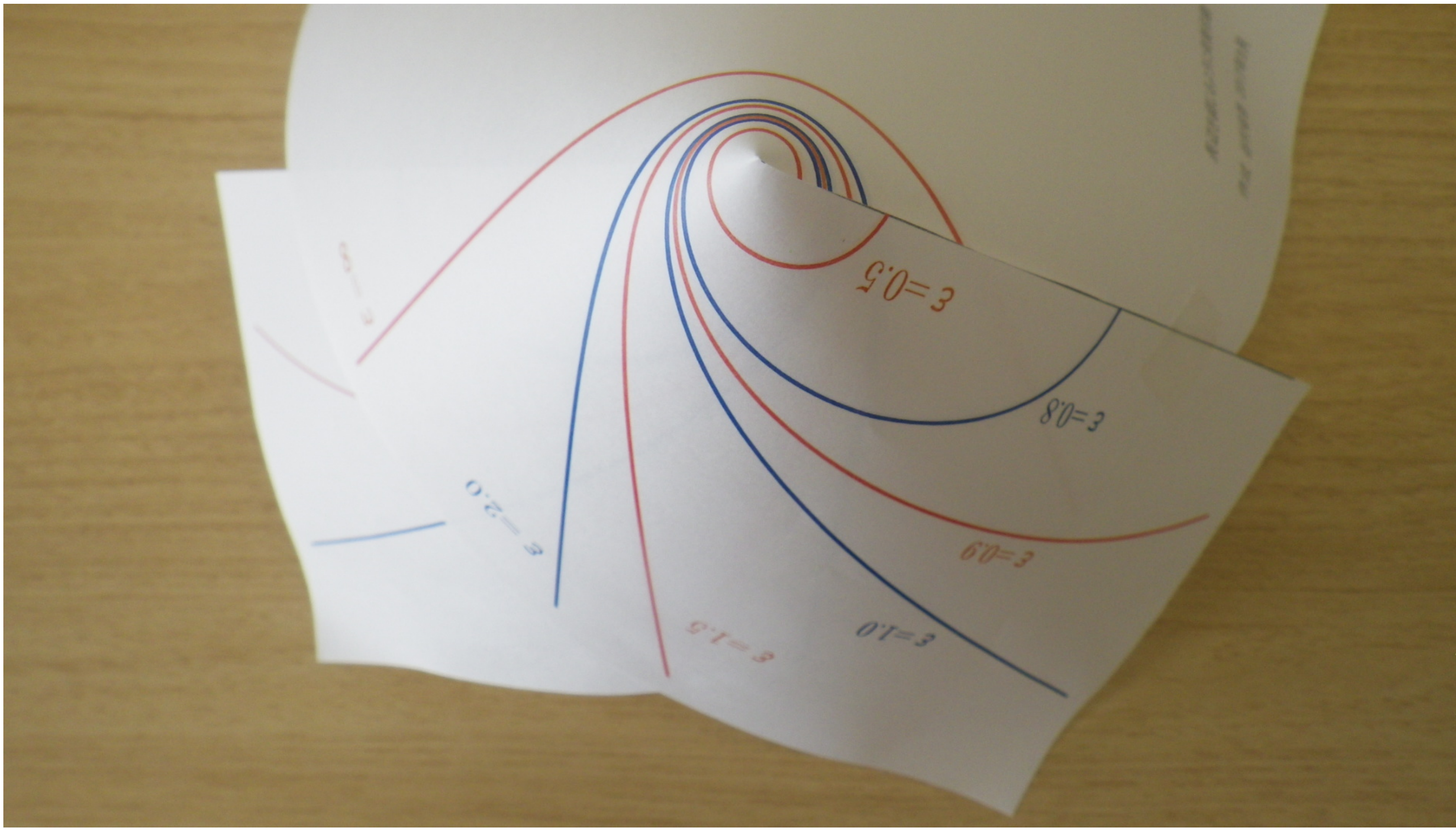
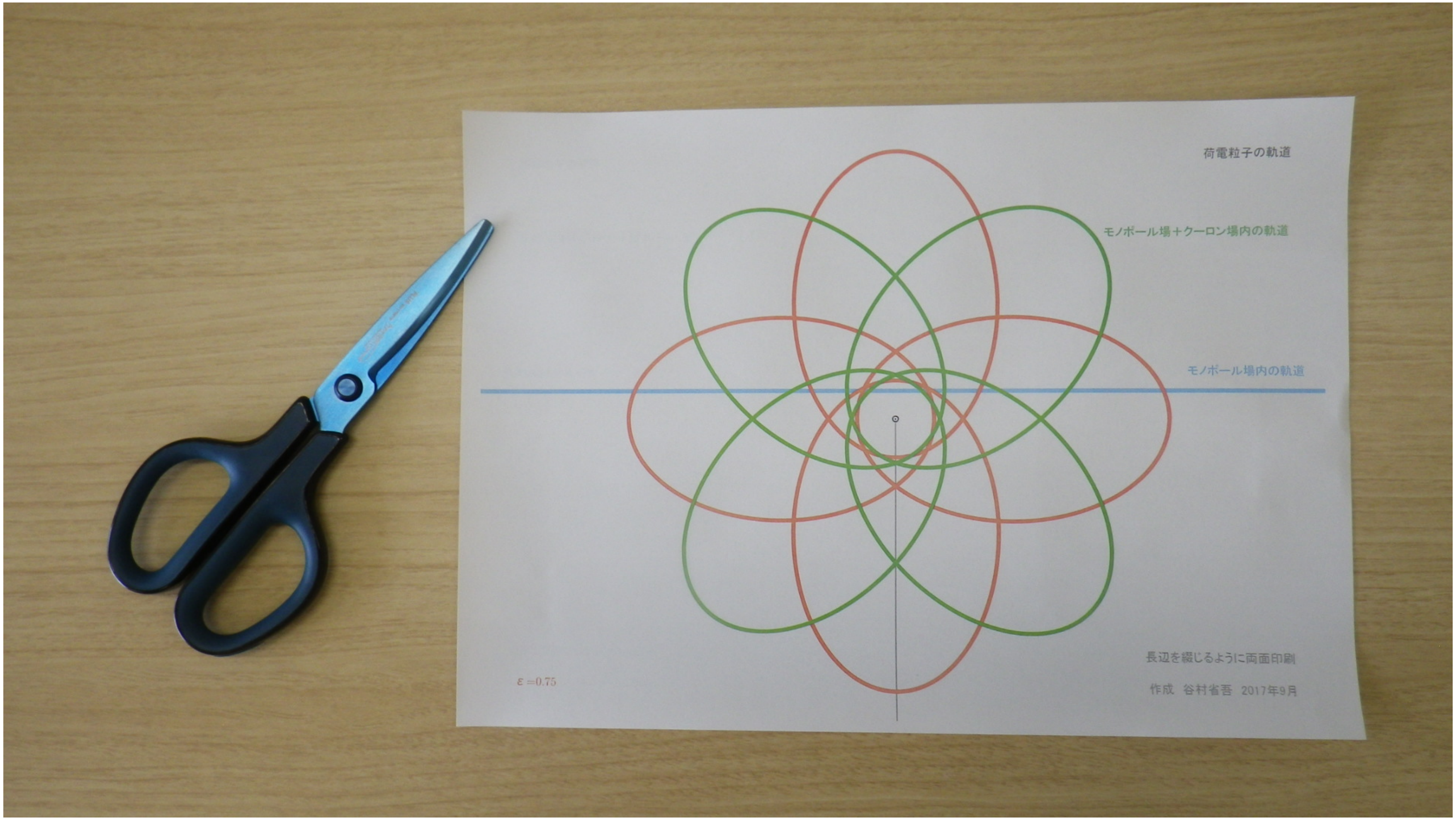


写真5



荷電粒子の軌道
モノポール場＋クーロン場内の軌道
モノポール場内の軌道
$\varepsilon = 0.75$
長辺を綴じるように両面印刷
作成　谷村省吾　2017年9月

写真6

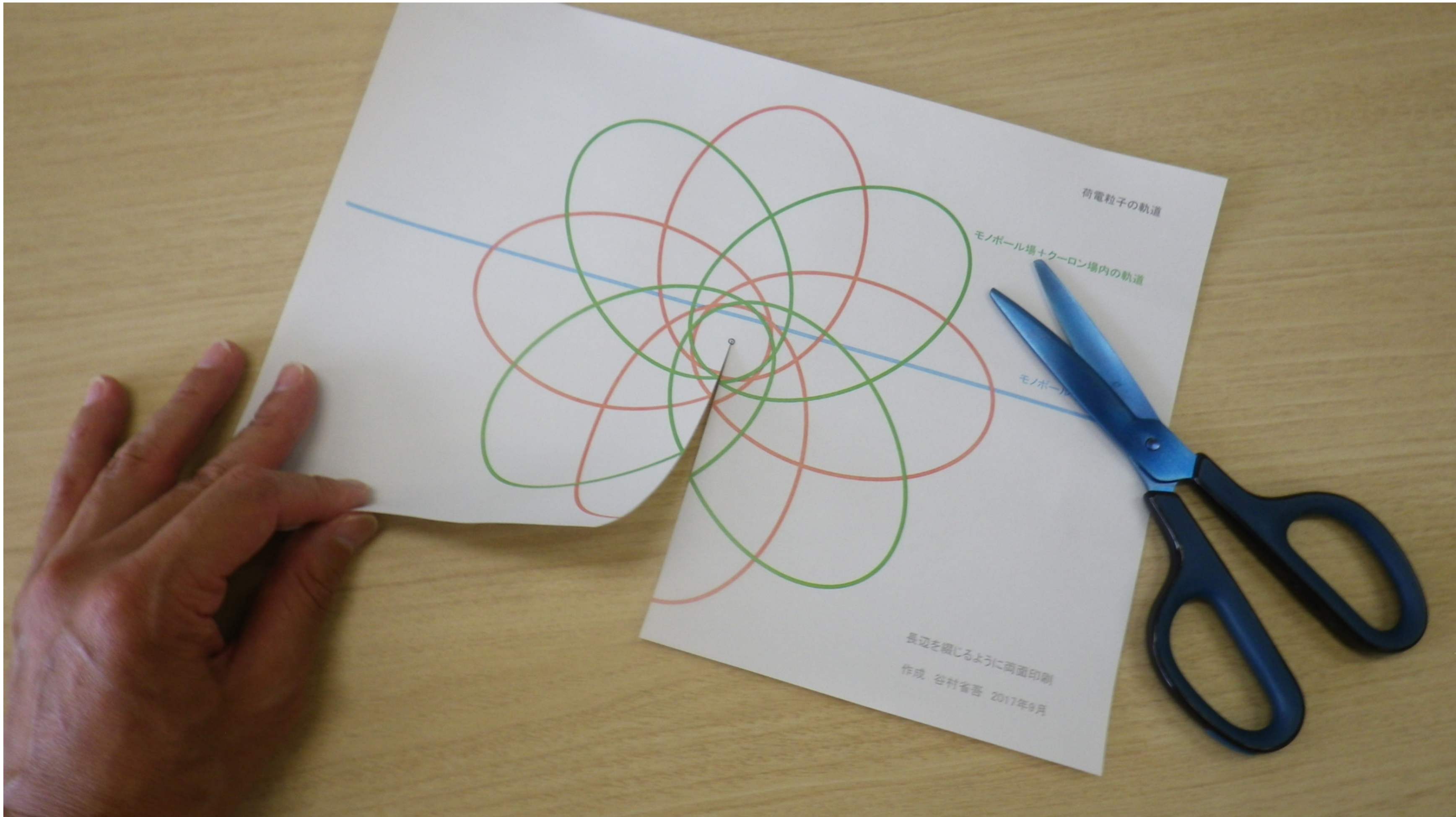


写真7

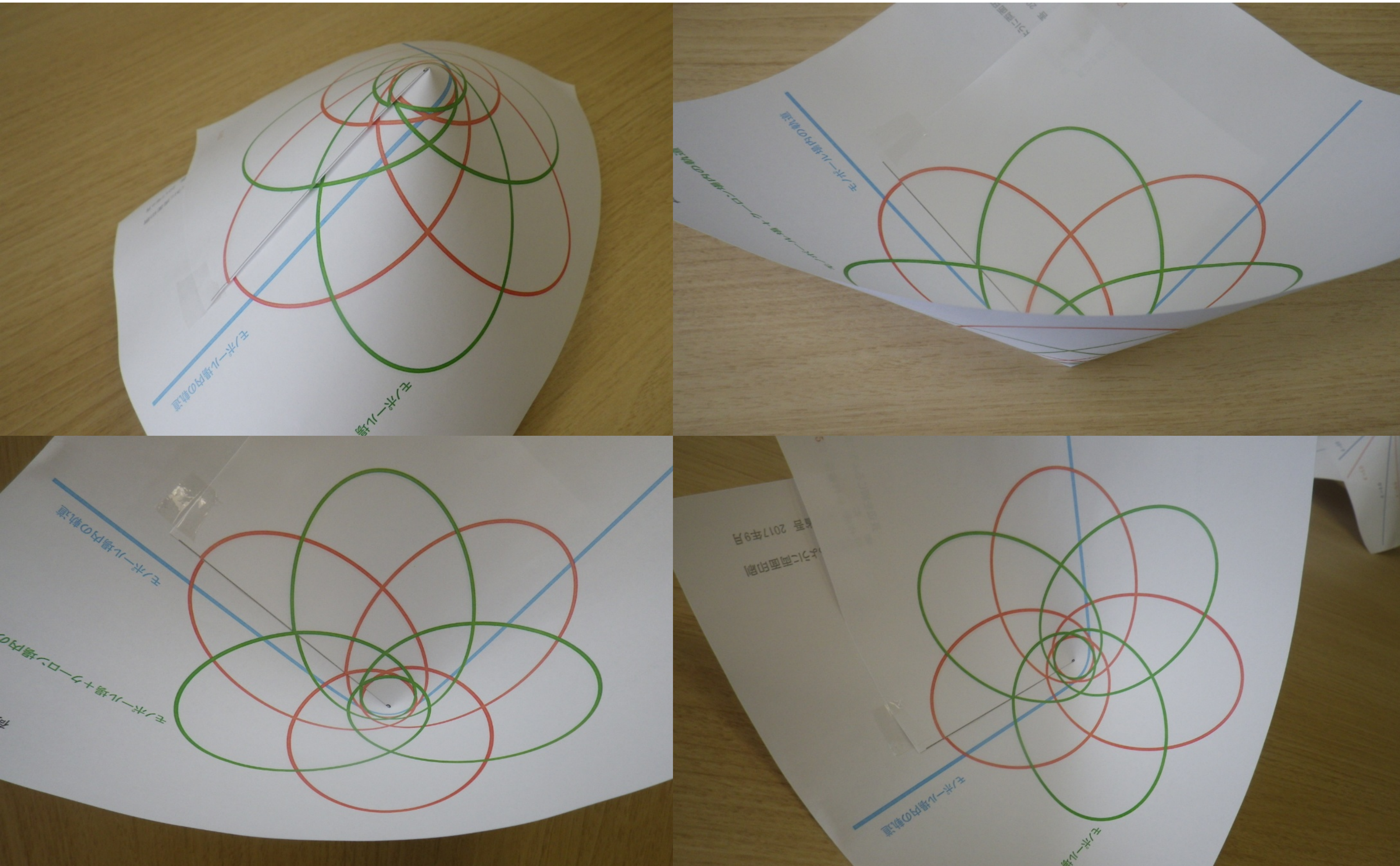
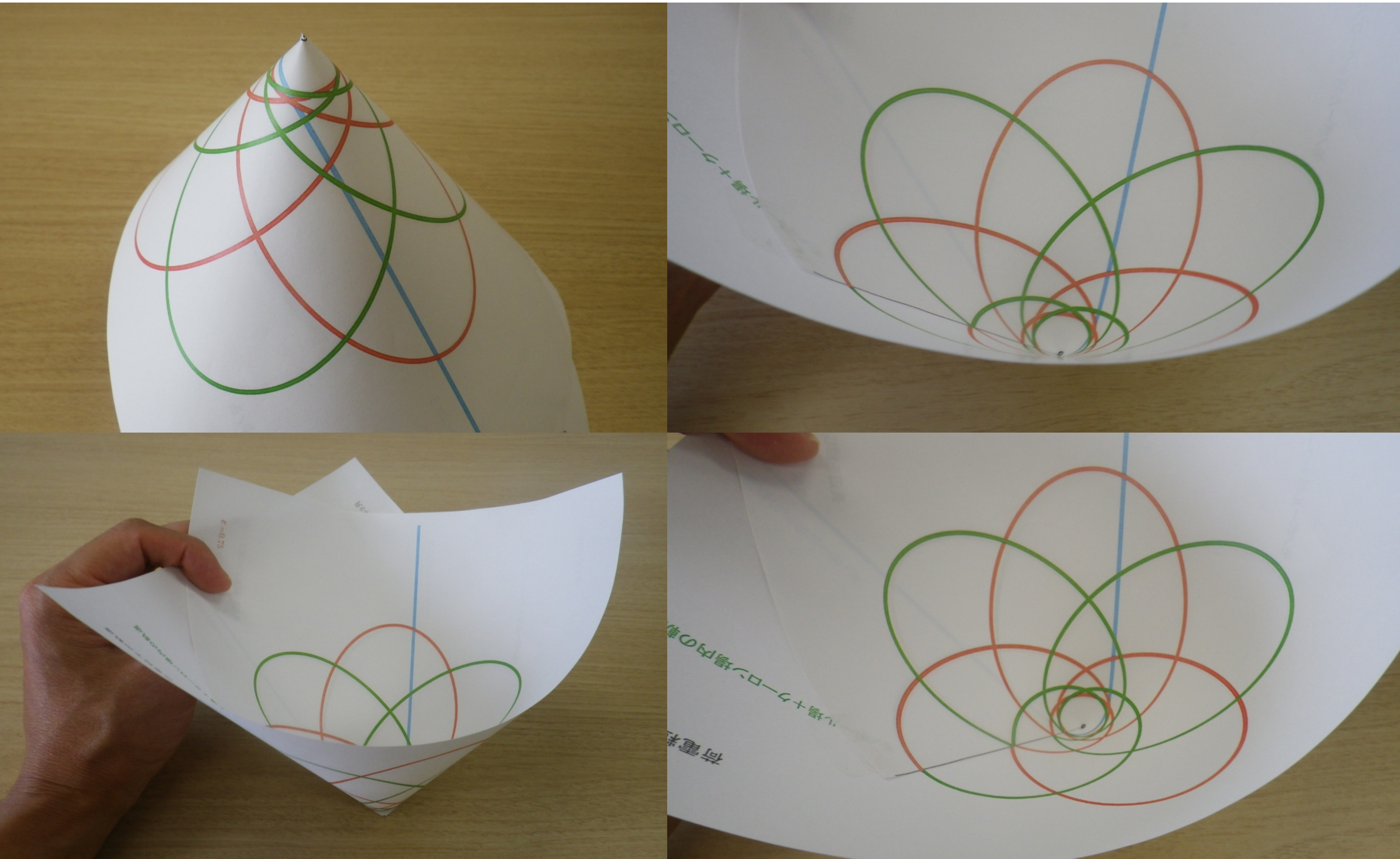


写真8



証明1

運動方程式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=F(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}+e\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\frac{g}{r^3}\boldsymbol{r}$$

の両辺に $\boldsymbol{r}\times$ をかけて

$$m\boldsymbol{r}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=F(r)\boldsymbol{r}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r}+e\boldsymbol{r}\times\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\frac{g}{r^3}\boldsymbol{r}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)=\boldsymbol{0}+eg\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}-eg\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=\boldsymbol{0}$$

証明2

修正された角運動量（ポアンカレ・ベクトル）の保存則

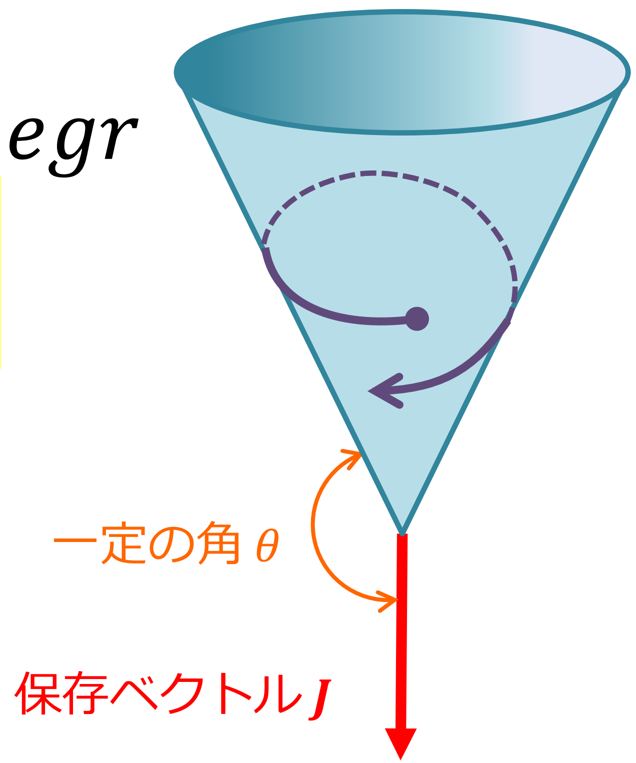
$$\boldsymbol{J} = m\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} - eg\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \text{const}$$

$\boldsymbol{J}$ と $\boldsymbol{r}$ のなす角を θ とすると

$$rJ\cos\theta = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{J} = -egr$$

$$\cos\theta = -\frac{eg}{J}$$

ゆえに、質点は $\boldsymbol{J}$ を軸とする一定の円錐面上を動く。



証明3

極座標(r, θ, ϕ)を用いて運動方程式を書き換えると

$$\begin{cases} m\left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \sin^2\theta\right) = F(r) \\ \cos\theta = -eg/J \\ m\left(2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + r\ddot{\phi}\sin\theta\right) = 0 \end{cases}$$

さらに $\xi = \phi\sin\theta, X = r\cos\xi, Y = r\sin\xi$

（これは円錐を平面に展開する座標になっている）とおくと、

$$\begin{cases} m\ddot{X} = F(r)\cos\xi = F_x \\ m\ddot{Y} = F(r)\sin\xi = F_y \end{cases}$$

まとめ

- 中心力とモノポール磁場のローレンツ力を受けて動く質点の運動は、中心力だけを受けて動く質点の平面上の運動を、円錐面に変換したものになっている。
- 作図によって平面上の軌道を円錐上の軌道に変換するのは容易であり、視覚的・触覚的に訴えることができる。
- 保存量を見つけ、適切な座標変換を施して運動方程式を解くという力学の演習問題にもってこいの課題だと思われる。

その他の話題

- 力の大きさが距離の２乗に反比例する引力場では、質点の有界軌道は初期条件によらず閉軌道になる（ケプラーの法則、ベルトランの定理）。
- モノポール磁場がある場合でも
$$U(r) = -\frac{\kappa}{r} + \frac{(eg)^2}{2r^2}$$
というポテンシャルの下では、有界軌道は必ず閉軌道になる（MIC-Kepler problem）。

公開資料

今回のプレゼン資料、紙工作の資料、詳しい計算ノート、参考文献リストをネットに公開してあります。

「谷村省吾」で検索してください。

http://www.phys.cs.is.nagoya-u.ac.jp/~tanimura/