

# モノポール磁場と中心力場中を動く荷電粒子の幾何学的力学

Geometric mechanics

of a charged particle in monopole magnetic field and central force field

谷村 省吾

名古屋大学大学院情報学研究科

## 1 問題設定と主結果

質量  $m$  の質点の時刻  $t$  における 3 次元空間中の位置を  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  とし,  $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  とする. 中心力  $F_c$  を受けて運動する質点の角運動量  $L$  は保存し,  $L$  に直交する一定の平面上を質点は動く:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_c = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{L} := m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \text{const}, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{r} = 0. \quad (1.3)$$

さらに, 質点は電荷  $e$  を持っているとし, 中心力の他に中心からの距離の 2 乗に反比例するモノポール磁場  $B$  によるローレンツ力も受けると, 保存角運動量の定義が若干変更され, 質点は一定の円錐面上を動く:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_c + e\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (1.4)$$

$$\mathbf{B} = \frac{g}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{J} := m\mathbf{r} \times \mathbf{v} - eg \frac{\mathbf{r}}{r} = \text{const}, \quad (1.6)$$

$$\mathbf{J} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = -eg. \quad (1.7)$$

$g$  はモノポールの磁荷と呼ばれ, 古典力学では  $g$  は任意の実数値をとり得る. 直交座標  $(x, y, z)$  の  $z$  軸が  $\mathbf{J}$  の向きと一致するように座標を選び, 極座標  $x = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \phi$ ,  $z = r \cos \theta$  に変換すると,

$$\cos \theta = -\frac{eg}{J} \quad (1.8)$$

が保存量となり, 質点の位置を表す角度  $\theta$  は時間によらず一定となることから, 質点は一定の円錐面上を動くことがわかる. さらに,

$$\xi := \phi \sin \theta, \quad X := r \cos \xi, \quad Y := r \sin \xi \quad (1.9)$$

という変数を導入すると， $\mathbf{X} = (X, Y)$  は円錐を平面に展開した座標になり，運動方程式 (1.4) は

$$m \frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2} = \mathbf{F}_c \quad (1.10)$$

と等価であることがわかる．従って，中心力場中の平面運動を円錐に変換すれば，モノポール磁場が加わった場合の運動になる．

磁気モノポール自体はその存在が実証されたことがないが，この問題と解法は力学の演習問題として使えるだろう．とくに，中心力場中の質点の運動方程式が解ければ，モノポール磁場もある場合の運動方程式も自動的に解けたことになる点は注目する価値があると思われる．文献を見ると，モノポール磁場だけがあるとき荷電粒子の軌道が円錐上の測地線になることはよく知られているようだが，モノポール磁場に加えて任意の中心力場が作用していても軌道が円錐面上に限定され，しかも円錐を展開すれば中心力場だけだった場合の軌道になることは，指摘されていないようである．磁極近傍の荷電粒子の運動軌道は円錐面に限定されるという性質は，オーロラのモデルとしても使えそうである．この問題をハミルトニアン形式で扱ったらどうなるか，閉軌道条件はどうなるか，同様の問題を量子力学で扱ったときの幾何学的特性はいかなるものか，といった問題にも興味がある．

なお，本研究の主要な部分は，山脇拓也君の修士論文『モノポール場における荷電粒子の古典論的散乱問題』（京都大学大学院情報学研究科 2011 年 2 月提出）でも発表されている．山脇君の修士論文では，中心力がゼロの場合とクーロン力場の場合について運動方程式を解き，ハミルトン・ヤコビ方程式の解も求め，モノポール場による散乱断面積や散乱軌道の包絡面を求めている．

岩手大学で開催された日本物理学会秋季大会にて 2017 年 9 月 22 日に本研究内容の一部を「モノポール磁場と中心力場中を動く荷電粒子の運動についての幾何学的考察」と題して講演発表した．このノートはその講演の補足資料として位置づけられる．

## 2 証明・計算

運動方程式 (1.4) の両辺に  $\mathbf{r} \times$  をかけて

$$\begin{aligned} m \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{r} \times \mathbf{F}_c + \frac{eg}{r^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \\ m \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) &= 0 + \frac{eg}{r^3} \left( (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{v} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{r} \right) = eg \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{r}}{r} \\ \frac{d}{dt} \left( m \mathbf{r} \times \mathbf{v} - eg \frac{\mathbf{r}}{r} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

を得る．ゆえに

$$\mathbf{J} := m \mathbf{r} \times \mathbf{v} - eg \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.2)$$

は保存量である．また，中心力  $\mathbf{F}_c$  に対して

$$\mathbf{F}_c = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.3)$$

を満たす位置エネルギー  $U(r)$  が存在するが，運動方程式 (1.4) の両辺に  $\mathbf{v} \cdot$  をかけると

$$\begin{aligned} m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{v} + \frac{eg}{r^3} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) &= -\frac{d}{dt} U + 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 + U \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

となり，

$$E := \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 + U \quad (2.5)$$

もまた保存量である．独立かつ可換な保存量が  $J_z, \mathbf{J}^2, E$  の3つあるので (1.4) は (ハミルトン系の意味で) 可積分である．ベクトル  $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{J}$  のなす角を  $\theta$  とすると，

$$rJ \cos \theta = \mathbf{r} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{r} \cdot \left( m\mathbf{r} \times \mathbf{v} - eg \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = -egr \quad (2.6)$$

となり，ゆえに

$$\cos \theta = -\frac{eg}{J} = \text{const} \quad (2.7)$$

である．つまり，粒子の軌道は  $\mathbf{J}$  を軸とし角度  $\theta$  だけ開いた円錐面上にある． $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$  と  $\mathbf{r}$  は直交するので

$$J^2 = \mathbf{J}^2 = m^2(\mathbf{r} \times \mathbf{v})^2 + (eg)^2 = L^2 + (eg)^2 \quad (2.8)$$

となる．ゆえに  $L^2$  も保存量である． $\mathbf{r} \times \mathbf{v} \neq 0$  ならば  $J > |eg|$  となる．つまり，質点が原点を通る直線上を運動していないならば， $\cos \theta \neq 0$  である．つまり，軌道は原点を通る平面上にはない．

極座標を使ってもう少し細かく調べてみよう．規格直交ベクトル  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$  を導入する：

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

時間  $t$  についての微分は

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_\phi, \quad (2.10)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r + \dot{\phi} \cos \theta \mathbf{e}_\phi, \quad (2.11)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\phi = -\dot{\phi} (\sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta) \quad (2.12)$$

となる．これは一見規則性がないように見えるが，

$$(\dot{\mathbf{e}}_r, \dot{\mathbf{e}}_\theta, \dot{\mathbf{e}}_\phi) = (\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi) \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta} & -\dot{\phi} \sin \theta \\ \dot{\theta} & 0 & -\dot{\phi} \cos \theta \\ \dot{\phi} \sin \theta & \dot{\phi} \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

と書くと係数は反対称行列にまとまっている．さて

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ J \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

とにおいて速度と加速度を求めると

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r \\ &= \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\mathbf{e}_\phi\end{aligned}\quad (2.15)$$

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{e}}_r \\ &\quad + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{e}}_\theta \\ &\quad + (\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + r\ddot{\phi}\sin\theta + r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta)\mathbf{e}_\phi + r\dot{\phi}\sin\theta\dot{\mathbf{e}}_\phi \\ &= \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}(\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\mathbf{e}_\phi) \\ &\quad + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\mathbf{e}_r + \dot{\phi}\cos\theta\mathbf{e}_\phi) \\ &\quad + (\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + r\ddot{\phi}\sin\theta + r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta)\mathbf{e}_\phi + r\dot{\phi}\sin\theta(-\dot{\phi})(\sin\theta\mathbf{e}_r + \cos\theta\mathbf{e}_\theta) \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\mathbf{e}_r \\ &\quad + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\mathbf{e}_\theta \\ &\quad + (2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + r\ddot{\phi}\sin\theta)\mathbf{e}_\phi\end{aligned}\quad (2.16)$$

となる．運動方程式 (1.4) の右辺の力は

$$\begin{aligned}m\frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{F}_c + e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ &= F(r)\mathbf{e}_r + \frac{eg}{r^2}(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\mathbf{e}_\phi) \times \mathbf{e}_r \\ &= F(r)\mathbf{e}_r + \frac{eg}{r^2}(-r\dot{\theta}\mathbf{e}_\phi + r\dot{\phi}\sin\theta\mathbf{e}_\theta)\end{aligned}\quad (2.17)$$

となるので，運動方程式 (1.4) は

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta) = F(r), \quad (2.18)$$

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta) = \frac{eg}{r}\dot{\phi}\sin\theta, \quad (2.19)$$

$$m(2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + r\ddot{\phi}\sin\theta) = -\frac{eg}{r}\dot{\theta} \quad (2.20)$$

という連立方程式になる． $\mathbf{J}$  の定義式 (2.2) は

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= m\mathbf{r} \times \mathbf{v} - eg\frac{\mathbf{r}}{r} \\ &= mr\mathbf{e}_r \times (\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\mathbf{e}_\phi) - eg\mathbf{e}_r \\ &= mr(r\dot{\theta}\mathbf{e}_\phi - r\dot{\phi}\sin\theta\mathbf{e}_\theta) - eg\mathbf{e}_r\end{aligned}\quad (2.21)$$

となる．(2.7) で見たように，いま， $\theta = \text{const}$  となるような座標系をとっているので，

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= -mr^2\dot{\phi}\sin\theta\mathbf{e}_\theta - eg\mathbf{e}_r \\ &= -mr^2\dot{\phi}\sin\theta \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\phi \\ \cos\theta \sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} - eg \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\phi \\ \sin\theta \sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (2.22)$$

となる．さらに  $J$  の成分は (2.14) のようになっているので，

$$-mr^2\dot{\phi}\sin\theta\cos\theta\cos\phi - eg\sin\theta\cos\phi = 0, \quad (2.23)$$

$$-mr^2\dot{\phi}\sin\theta\cos\theta\sin\phi - eg\sin\theta\sin\phi = 0, \quad (2.24)$$

$$mr^2\dot{\phi}\sin\theta\sin\theta - eg\cos\theta = J \quad (2.25)$$

という連立方程式が成立する．ゆえに， $\sin\theta = 0$  かつ  $J = -eg$  (この場合，質点は原点を通る直線運動をする)，または

$$-mr^2\dot{\phi}\cos\theta - eg = 0 \quad (2.26)$$

であり，(2.7) より  $eg = -J\cos\theta$  なので

$$mr^2\dot{\phi} = J \quad (2.27)$$

が成立する．また， $\theta = \text{const}$ ， $eg = -J\cos\theta$ ， $mr^2\dot{\phi} = J$  を使うと運動方程式の第 2 成分 (2.19) は自動的に成立していることがわかる．以上より，残りの運動方程式 (2.18), (2.20) は

$$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta) = F(r), \quad (2.28)$$

$$m(2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + r\ddot{\phi}\sin\theta) = 0 \quad (2.29)$$

となる．さらに (1.9) で導入した  $\xi = \phi\sin\theta$ ， $X = r\cos\xi$ ， $Y = r\sin\xi$  という変数変換を施すと (2.28), (2.29) は

$$m(\ddot{r} - r\dot{\xi}^2) = F(r), \quad (2.30)$$

$$m(2\dot{r}\dot{\xi} + r\ddot{\xi}) = 0 \quad (2.31)$$

となり，これらは連立方程式

$$m\ddot{X} = F(r)\cos\xi, \quad (2.32)$$

$$m\ddot{Y} = F(r)\sin\xi \quad (2.33)$$

と等価である．このことを確かめよう：

$$X = r\cos\xi, \quad (2.34)$$

$$\dot{X} = \dot{r}\cos\xi - r\dot{\xi}\sin\xi, \quad (2.35)$$

$$\ddot{X} = (\ddot{r} - r\dot{\xi}^2)\cos\xi - (2\dot{r}\dot{\xi} + r\ddot{\xi})\sin\xi, \quad (2.36)$$

$$Y = r\sin\xi, \quad (2.37)$$

$$\dot{Y} = \dot{r}\sin\xi + r\dot{\xi}\cos\xi, \quad (2.38)$$

$$\ddot{Y} = (\ddot{r} - r\dot{\xi}^2)\sin\xi + (2\dot{r}\dot{\xi} + r\ddot{\xi})\cos\xi. \quad (2.39)$$

(2.36), (2.39) を使えば，(2.30), (2.31) から (2.32), (2.33) を導くことができるし，その逆もできる．以上より，3次元空間のモノポール場プラス中心力場中の荷電粒子の運動は2次元空間中の中心力場だけの運動方程式 (1.10) に帰着されることが証明された．

### 3 求積法による解

方程式 (2.30), (2.31) を形式的に解いておこう . (2.31) に  $r$  を掛けたものは

$$2r\dot{\xi} + r^2\ddot{\xi} = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\xi}) = 0 \quad (3.1)$$

となり ,

$$r^2\dot{\xi} = \text{const} = \frac{J}{m} \sin \theta \quad (3.2)$$

が保存量であることを意味する . これと位置エネルギー  $U(r)$  を用いて (2.30) は

$$m(\ddot{r} - r\dot{\xi}^2) = m\ddot{r} - \frac{J^2 \sin^2 \theta}{mr^3} = -\frac{dU}{dr} \quad (3.3)$$

と書き換えられる . これに  $\dot{r}$  を掛けると

$$\dot{r} \left( m\ddot{r} - \frac{J^2 \sin^2 \theta}{mr^3} + \frac{dU}{dr} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{J^2 \sin^2 \theta}{2mr^2} + U \right) = 0 \quad (3.4)$$

となり ,

$$\frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{J^2 \sin^2 \theta}{2mr^2} + U = \text{const} = E \quad (3.5)$$

も保存量である . これを求積すると

$$\pm \int \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U(r) - \frac{J^2 \sin^2 \theta}{2mr^2})}} dr = t - t_0 \quad (3.6)$$

という解を得る . この積分は関数  $r(t)$  の逆関数を決定する .  $r(t)$  を求めることができれば , (3.2) に代入して求積

$$\xi - \xi_0 = \frac{J \sin \theta}{m} \int \frac{1}{r^2(t)} dt \quad (3.7)$$

により関数  $\xi(t)$  が決まる .

### 4 軌道の方程式と MIC-Kepler 系

(3.6) は時間  $t$  の関数としての  $r(t)$  を決定する式だが , この積分を陽に求めることは難しい . じつは , それよりも角度  $\phi$  の関数としての  $r(\phi)$  の方が求めやすい . しかも ,

$$u = \frac{1}{r}, \quad r = \frac{1}{u} \quad (4.1)$$

で定められる変数  $u$  を  $\phi$  の関数として求めることを目指すとうまくいく . つまり , 力学の問題設定としては質点の動径座標  $r(t)$  は時刻  $t$  の関数なのだが , 角度  $\phi(t)$  もまた  $t$  の関数であり , 少なくとも局所的には  $t(\phi)$  という逆関数があると考えられ , 従って  $r(t)$  を  $r(t(\phi))$  と

いう関数に書くことは悪くない．そうすると，(4.1) で導入した  $u$  も  $\phi$  の関数  $u(\phi)$  とみなせる．そのように考えながら (2.27) を用いると

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} \\ &= -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} \\ &= -r^2 \frac{du}{d\phi} \frac{J}{mr^2} \\ &= -\frac{J}{m} \frac{du}{d\phi}\end{aligned}\tag{4.2}$$

がわかる．さらに

$$\begin{aligned}\frac{d^2r}{dt^2} &= -\frac{J}{m} \frac{d^2u}{d\phi^2} \frac{d\phi}{dt} \\ &= -\frac{J}{m} \frac{d^2u}{d\phi^2} \frac{J}{mr^2} \\ &= -\frac{J^2}{m^2} \frac{d^2u}{d\phi^2} u^2\end{aligned}\tag{4.3}$$

もわかる．中心力は

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dr} &= \frac{dU}{du} \frac{du}{dr} \\ &= -\frac{dU}{du} \frac{1}{r^2} \\ &= -\frac{dU}{du} u^2\end{aligned}\tag{4.4}$$

となる．以上より  $r(t)$  についての微分方程式 (3.3) は

$$\begin{aligned}m \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{J^2 \sin^2 \theta}{mr^3} + \frac{dU}{dr} &= 0 \\ -m \frac{J^2}{m^2} \frac{d^2u}{d\phi^2} u^2 - \frac{J^2 \sin^2 \theta}{m} u^3 - \frac{dU}{du} u^2 &= 0 \\ \frac{d^2u}{d\phi^2} + (\sin^2 \theta) u + \frac{m}{J^2} \frac{dU}{du} &= 0\end{aligned}\tag{4.5}$$

となる．この方程式の両辺に  $\frac{du}{d\phi}$  を掛ければ，

$$\frac{d}{d\phi} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{du}{d\phi} \right)^2 + \frac{1}{2} (\sin^2 \theta) u^2 + \frac{m}{J^2} U \right) = 0\tag{4.6}$$

を得る．ここから先を求積法で解いてもよいが，ちょっと別の視点から (4.5) を解こう．

(2.7) より (4.5) は

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u - \frac{(eg)^2}{J^2} u + \frac{m}{J^2} \frac{dU}{du} = 0\tag{4.7}$$

と書ける．この方程式の主要な部分は“調和振動子”

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u - u_0 = 0\tag{4.8}$$

の方程式に見える．ただ，独立変数を時間  $t$  とする運動方程式ではなく， $\phi$  を独立変数とする方程式である．ここで  $u_0$  は，“ばね”の原点をずらす定数である．実際，もしも関数  $U$  が

$$-\frac{(eg)^2}{J^2}u + \frac{m}{J^2}\frac{dU}{du} = -u_0 \quad (4.9)$$

を満たしていれば (4.7) は (4.8) に帰着する．(4.9) を満たす  $U$  は

$$U = \frac{(eg)^2}{2m}u^2 - \frac{J^2u_0}{m}u + C \quad (4.10)$$

である．これは  $r$  の関数として書くと

$$U(r) = \frac{(eg)^2}{2mr^2} - \frac{J^2u_0}{mr} + C \quad (4.11)$$

である．位置エネルギーの定数項  $C$  は質点の運動に関係ないので， $C = 0$  として，これを書き換えると

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{r} + \frac{(eg)^2}{2mr^2} = -\frac{GMm}{r} + \frac{(eg)^2}{2mr^2} \quad (4.12)$$

と書くと，第 1 項は物理学者に慣れ親しんだ形に見える．ここで

$$u_0 = \frac{Ze^2m}{J^2} = \frac{GMm^2}{J^2} \quad (4.13)$$

とおいた．(4.12) の位置エネルギー  $U(r)$  は， $r$  に反比例するクーロン引力または重力のポテンシャルと， $r^2$  に反比例する斥力ポテンシャルの和であり，このような位置エネルギーを持つ質点の力学は MIC-Kepler 問題と呼ばれる．

MIC-Kepler 問題は調和振動子の方程式 (4.8) に帰着し（そうなるように位置エネルギーの関数形を選んだ），その解は

$$u(\phi) = u_0 + a \cos(\phi - \phi_0) \quad (4.14)$$

で与えられる．従って軌道の形は

$$r(\phi) = \frac{1}{u_0 + a \cos(\phi - \phi_0)} = \frac{\lambda}{1 + \varepsilon \cos(\phi - \phi_0)} \quad (4.15)$$

で決まる．この解の著しい性質として， $r$  が  $\phi$  の周期  $2\pi$  の周期関数になっている点が目を引く．分数式 (4.15) の分母がゼロにならなければ，質点の運動は有界かつ周期的である，つまり 3 次元空間中の同じ軌道を繰り返しなぞる閉軌道になる．

調和振動子 (4.8) の解は任意の初期条件に対して同じ周期の周期運動となるが，その性質を引き継いで MIC-Kepler 系は任意の初期条件の下で有界軌道が閉軌道になるという著しい特徴を持つのである．

この式 (4.15) は平面上の円錐曲線の極座標表示になっている．離心率  $\varepsilon$  が  $0 \leq \varepsilon < 1$  なら楕円， $\varepsilon = 1$  なら放物線， $1 < \varepsilon$  なら双曲線である． $\phi = \xi/(\sin \theta)$  とおいて極座標  $(r, \xi)$  で平面上に軌道を描いてから平面を半頂角  $\theta$  の円錐形に丸めれば，MIC-Kepler 系の軌道になる．

## 5 ラグランジュ形式

前節ではニュートン運動方程式を用いて質点の運動を分析したが，ラグランジアンを用いるとモノポール磁場プラス中心力場中の質点の運動が，平面上の中心力場中の運動を円錐に変換したものになっていることがすぐにわかる．

モノポール磁場

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{g}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (5.1)$$

を与えるベクトルポテンシャルは，もちろんゲージ不定性はあるが，例えば

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{g}{r(r+z)}(x \mathbf{e}_y - y \mathbf{e}_x) \quad (5.2)$$

とすれば， $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$  が成り立つ．微分形式で書くと

$$\begin{aligned} B &= g \sin \theta d\theta \wedge d\phi \\ &= \frac{g}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy), \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} A &= g(1 - \cos \theta)d\phi \\ &= g \frac{r-z}{r} \cdot \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \\ &= g \frac{r-z}{r(r^2 - z^2)}(x dy - y dx) \\ &= g \frac{1}{r(r+z)}(x dy - y dx) \end{aligned} \quad (5.4)$$

となり， $dA = B$  が成り立つ．中心力場と磁場の中を運動する荷電粒子のラグランジアンは

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - U(r) + e\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - U(r) + eg(1 - \cos \theta)\dot{\phi} \end{aligned} \quad (5.5)$$

である．(2.7) の関係式  $\cos \theta = -\frac{eg}{J}$  により  $\theta$  は初期条件で決まる定数なので，この系は

$$L_1 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - U(r) + \frac{d}{dt}(eg(1 - \cos \theta)\phi) \quad (5.6)$$

をラグランジアンとし  $r, \phi$  だけを力学変数とする系と同等である． $\theta$  が定数ならば最後の項  $eg(1 - \cos \theta)\dot{\phi}$  は時間による全微分であり，オイラー・ラグランジュ方程式には効かないので，なくしても力学系としては同等である．(1.9) でしたように  $\phi \sin \theta = \xi$  とおいて  $X, Y$  を導入すれば，このラグランジアンは

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\xi}^2) - U(r) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - U(r) \end{aligned} \quad (5.7)$$

に帰着する．これは2次元平面上で中心力ポテンシャル  $U(r)$  の下で運動する質点のラグランジアンに他ならない．

## 6 ハミルトン形式

“3次元の中心力場 + モノポール磁場”系が“2次元円錐上の中心力場”系に帰着することは、ハミルトン形式の力学でも鮮やかに見通せる。

(加筆予定)

## 7 量子力学

モノポール場プラス中心力場中の荷電粒子の運動を量子力学で扱うときは、球面調和関数を一般化した monopole harmonics と呼ばれる直交関数系を用いると、動径座標だけに依存するように波動関数を変数分離することが可能で、シュレーディンガー方程式は中心力場だけの問題に帰着する。古典力学のときに見られた円錐上の軌道のような直接的に幾何学的な特徴は量子力学では見にくいですが、群の表現論の立場から見るとモノポール場の中の荷電粒子の量子力学にも豊かな構造があることがわかる。

## 参考文献

- [1] I. R. Lapidus and J. L. Pietenpol, “Classical interaction of an electric charge with a magnetic monopole”, Am. J. Phys. **28**, 17 (1960).
- [2] G. Nadeau, “Concerning the classical interaction of an electric charge with a magnetic monopole”, Am. J. Phys. **28**, 566 (1960).
- [3] H. V. McIntosh and A. Cisneros, “Degeneracy in the presence of a magnetic monopole”, J. Math. Phys. **11**, 896 (1970).
- [4] E. F. Carter and H. A. Cohen, “The classical problem of charge and pole”, Am. J. Phys. **41**, 994 (1973).
- [5] T. T. Wu and C. N. Yang, “Dirac monopole without strings: Monopole harmonics”, Nuclear Physics B **107**, 365 (1976).
- [6] R. K. P. Zia, “Classical orbits of a charged particle in a magnetic monopole field”, Am. J. Phys. **47**, 700 (1979).
- [7] T. Iwai, “On a “conformal” Kepler problem and its reduction”, J. Math. Phys. **22**, 1633 (1981).
- [8] T. Iwai, “Quantization of the conformal Kepler problem and its application to the hydrogen atom”, J. Math. Phys. **23**, 1093 (1982).
- [9] F. H. J. Cornish, “The hydrogen atom and the four-dimensional harmonic oscillator”, J. Phys. A **17**, 323 (1984).

- [10] T. Iwai and Y. Uwano, “The four dimensional conformal Kepler problem reduces to the three dimensional Kepler problem with a centrifugal potential and Dirac’s monopole field. Classical theory”, *J. Math. Phys.* **27**, 1523 (1986).
- [11] T. Iwai and Y. Uwano, “The quantised MIC-Kepler problem and its symmetry group for negative energies”, *J. Phys. A* **21**, 4083 (1988).
- [12] 岩井敏洋, 片山登揚, 「Kepler 型対称性をもつ自由度 3 のハミルトン系」, 数理解析研究所講究録 **868**, 198 (1994).
- [13] T. Iwai and N. Katayama, “Multifold Kepler systems—Dynamical systems all of whose bounded trajectories are closed”, *J. Math. Phys.* **36**, 1970 (1995).
- [14] T. Iwai, Y. Uwano and N. Katayama “Quantization of the multifold Kepler system”, *J. Math. Phys.* **37**, 608 (1996).
- [15] T. Iwai, “The Poincaré compactification of the MIC-Kepler problem with positive energies”, *J. Phys. A* **34**, 1713 (2001).
- [16] B. Cordani, *The Kepler Problem*, Birkhauser (2003).
- [17] 谷村省吾, 「21 世紀の量子論入門 第 14 回: 惑星の古典力学と水素原子の量子力学」, 現代数学社 『理系への数学』 2011 年 6 月号 pp.58–64 (2011).