

数学・物理通信

1 卷 1 号 2009 年 12 月

編集 新関章三・矢野 忠

2009 年 12 月 28 日

目次

ファインマン積分の一般論で現れたグラフ理論的不等式	2
1.1 問題の解説	2
1.2 2-樹木和の積に関する不等式	3
1.3 不等式の還元	4
1.4 証明の試みへのコメント	6
γ 行列と Spence 関数	7
2.1 はじめに	7
2.2 γ 行列の trace の公式	7
2.3 $\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\tau \gamma^\rho \gamma_5]$ から導かれる恒等式と独立なテンソル	8
2.4 Spence 関数	9
2.5 おわりに	11
編集後記	15
原稿の募集と投稿規定	16

ファインマン積分の一般論で現れた グラフ理論的不等式

中西 襄 (京都大学名誉教授)

1.1 問題の解説

よく知られているように、共变的摂動論では、素粒子反応の散乱振幅はファインマン・グラフをファインマン規則に従って計算すればよい。ファインマン・グラフがループを含む場合は、独立なループの個数だけの内線 4 次元運動量に関する積分が現れる。これがファインマン積分で、被積分関数はファインマン・プロパゲーターの積である。内線運動量の積分を遂行するには、ファインマン恒等式を用いてプロパゲーターの分母をまとめるか、あるいはフーリエ表示

$$\frac{1}{K_l - i0} = i \int_0^\infty dx_l \exp[-ix_l(K_l - i0)]$$

によりプロパゲーターの分母を指数関数の肩へもっていく。ここに K_l は内線 l に対応するプロパゲーターの分母の式で、内線および外線の 4 次元運動量の 2 次式である。実積分変数 x_l は、ファインマン恒等式を書くときに必要になるファインマン・パラメーターの逆数に相当するので、逆ファインマン・パラメーターと呼ばれる。

すべてのプロパゲーターをフーリエ表示すると、指数関数の肩は独立な内線 4 次元運動量の 2 次形式になるから、主軸変換によって運動量積分はガウス型の積分になり、あらわに積分が遂行できる。その結果、 x_l に関するパラメーター積分が得られる。被積分関数は外線運動量の 2 次形式の指数関数で、2 次形式に現れる係数およびパラメーター積分のウェイトは x_l の関数で、任意のファインマン・グラフに対応する一般公式が知られている。[1,2]

簡単のため、以下 4 点関数の場合について説明しよう。4 点関数とは、4 本の外線があるファインマン・グラフの場合で、それらの外線を A, B, C, D 、それぞれの外線 4 次元運動量を外向きに p_A, p_B, p_C, p_D とする。4 次元運動量の保存則から $p_A + p_B + p_C + p_D = 0$ なので、ローレンツ不変量として $p_A^2, p_B^2, p_C^2, p_D^2, (p_A + p_B)^2, (p_A + p_C)^2, (p_B + p_C)^2$ がある。これらは一次独立ではないが、差し支えない。指数関数の肩の関数はこれらのローレンツ・スカラーの 1 次式である。その係数はすべて x_l の有理関数で、分母は共通、そして分子も分母も $x_l > 0$ のとき正定値である。分子を $W_A, W_B, W_C, W_D, W_{AB}, W_{AC}, W_{BC}$ と書く。そうすると、次のような不等式が成立することが証明される。

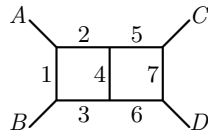
$$\begin{aligned} W_A W_D &\geq W_{AB} W_{AC}, & W_B W_C &\geq W_{AB} W_{AC} \\ W_A W_B &\geq W_{AC} W_{BC}, & W_C W_D &\geq W_{AC} W_{BC} \\ W_A W_C &\geq W_{BC} W_{AB}, & W_B W_D &\geq W_{BC} W_{AB} \end{aligned}$$

これらは名前の付け替えだけで、本質的には 1 種類の不等式である。

なぜこのような不等式が必要になったかについてはここで説明する余裕はないが、参考のため簡単に述べておく。散乱振幅は一般に外線ローレンツ・スカラーに関する解析関数で、その解析性は理論上も応用上も極めて

て重要である．共変的摂動論における解析性は，ファインマン積分を積分表示に直し，そのウェイト関数のサポートを調べればよいのだが，そのサポートを詳しく計算するのに上のような不等式が必要になったのである．

上記の不等式がどのようなものなのかを見るために，次のような具体的なファインマン・グラフについて説明しよう．



このファインマン・グラフについて， W_A は次のように与えられる．まずチャンネル A の中間状態，すなわちそれを切ると A を含む連結部分と BCD を含む連結部分とに分離するような内線の集合をすべてリストアップする．それは $\{1, 2\}$ と $\{1, 4, 5\}$ である．次に，それぞれの中間状態につき，それに属さない内線の，ループを含まない極大集合をすべてリストアップし，それぞれの集合によって指定される x_l の積を作る．最後に，それらをすべてを足しあげる．すなわち

$$W_A = x_3(x_4x_5x_6 + x_4x_5x_7 + x_4x_6x_7 + x_5x_6x_7) + x_2x_3x_6x_7$$

となる．同様に W_D は，チャンネル D の中間状態が $\{6, 7\}$ と $\{3, 4, 7\}$ なので，

$$W_D = (x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)x_5 + x_1x_2x_5x_6$$

を得る． W_{AB} については， AB と CD を分ける中間状態は $\{2, 3\}$ と $\{5, 6\}$ と $\{2, 4, 6\}$ と $\{3, 4, 5\}$ の4つがあるから，

$$W_{AB} = x_1(x_4x_5x_6 + x_4x_5x_7 + x_4x_6x_7 + x_5x_6x_7) + (x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)x_7 + x_1x_3x_5x_7 + x_1x_2x_6x_7$$

となる． AC と BD を分ける中間状態は $\{1, 4, 7\}$ のみなので，

$$W_{AC} = x_2x_3x_5x_6$$

となる．以上，いずれも4次斉次式である．

そこで，8次斉次式 $W_{AB}W_{AC}$ を作ってみると，そこに現れるすべての項は8次斉次式 W_AW_D の項の中に必ず現れることが確かめられる．すなわち，重複度を考慮した集合論的な意味において不等式 $W_AW_D \geq W_{AB}W_{AC}$ が成立している．これがどんな4本の外線をもつファインマン・グラフについても成立するであろうというのが，極めて確からしい予想である．

1.2 2-樹木和の積に関する不等式

前節の最後に述べた予想をきちんと定式化する．ファインマン・グラフのことは忘れてよい．

任意の連結グラフ G (線の数 N ，頂点の数 n) を考える． G の相異なる4頂点を選び， A, B, C, D と名付け，その全体を g と書く．線の集合で，その集合に属するすべての線を切断すると G が非連結になるようなもののうちで極小なものをカットセットといい，通常文字 S を使って表す．カットセットは g の分割を引き起こす．空でない $h \subset g$ に対し，分割 $\{h|g-h\}$ を引き起こすカットセットの全体を S_h または S_{g-h} と記す．

ループを含まない極大な線の集合 T を樹木と呼ぶ．樹木は G において連結で， G のどの頂点も T に属するどれかの線の端点になっており， $n-1$ 個の線から成る．樹木から1個の線を取り除いた集合を2-樹木という．もちろん2-樹木は，ループを含まず，非連結で， $n-2$ 個の線から成る． T^2 が2-樹木ならば， T^2 の補集合はただ1つのカットセットを含む．つまりそれを S とすると， $T^2 \cap S = \emptyset$ である． $S \subset S_h$ であるような T^2 の全体を T_h と書く．

G の線 l に変数 x_l を対応させる．そして次の 2-樹木和を定義する：

$$W_h \equiv \sum_{T^2 \in \mathcal{T}_h} \prod_{l \in T^2} x_l$$

$h = \{A\}, \{D\}, \{AB\}, \{AC\}$ などに対し，2-樹木和を W_A, W_D, W_{AB}, W_{AC} などと書く．

予想 [3]

$W_A W_D - W_{AB} W_{AC}$ を展開して，整係数 $2n - 4$ 次多項式 $F_G \equiv \sum_L k_L \prod_{l \in L} x_l$ のように書く．ここに L は重複（もちろん最大 2 回）を許した $2n - 4$ 個の線の集合である．このとき，いかなる G ，いかなる L に対してもつねに $k_L \geq 0$ ．

[注意 1] $W_A W_D$ に対し， $W_{AB} W_{BC}$ や $W_{AC} W_{BC}$ は許されない． S_{BC} に属するカットセットは， A と D を分離しないからである．

[注意 2] 予想は，左辺の選択が 6 通りあるから， A, B, C, D の置換により，同様な不等式がもう 5 つできる（前節参照）．

この予想の根拠は次の通りである．

(a) $N \leq 9$ なるすべての G について正しいことが確かめられる．これについては，次節で詳しく説明する．

(b) $x_l \geq 0$ のとき，代数的不等式 $W_A W_D - W_{AB} W_{AC} \geq 0$ の成立が行列式を用いて証明される．証明は原論文 [4] または拙著 [2] を見ていただきたい．代数的不等式では絶対不等式（たとえば $x_1^2 + x_2^2 \geq 2x_1 x_2$ ）を使うので，それから集合論的不等式は導けない．

1.3 不等式の還元

(a) のチェックは，問題を簡単なものに還元してから行う．

F_G において特定の線 l に対応する x_l が 2 回含まれている項の総和は，

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_l} \right)^2 F_G = \frac{\partial W_A}{\partial x_l} \frac{\partial W_D}{\partial x_l} - \frac{\partial W_{AB}}{\partial x_l} \frac{\partial W_{AC}}{\partial x_l}$$

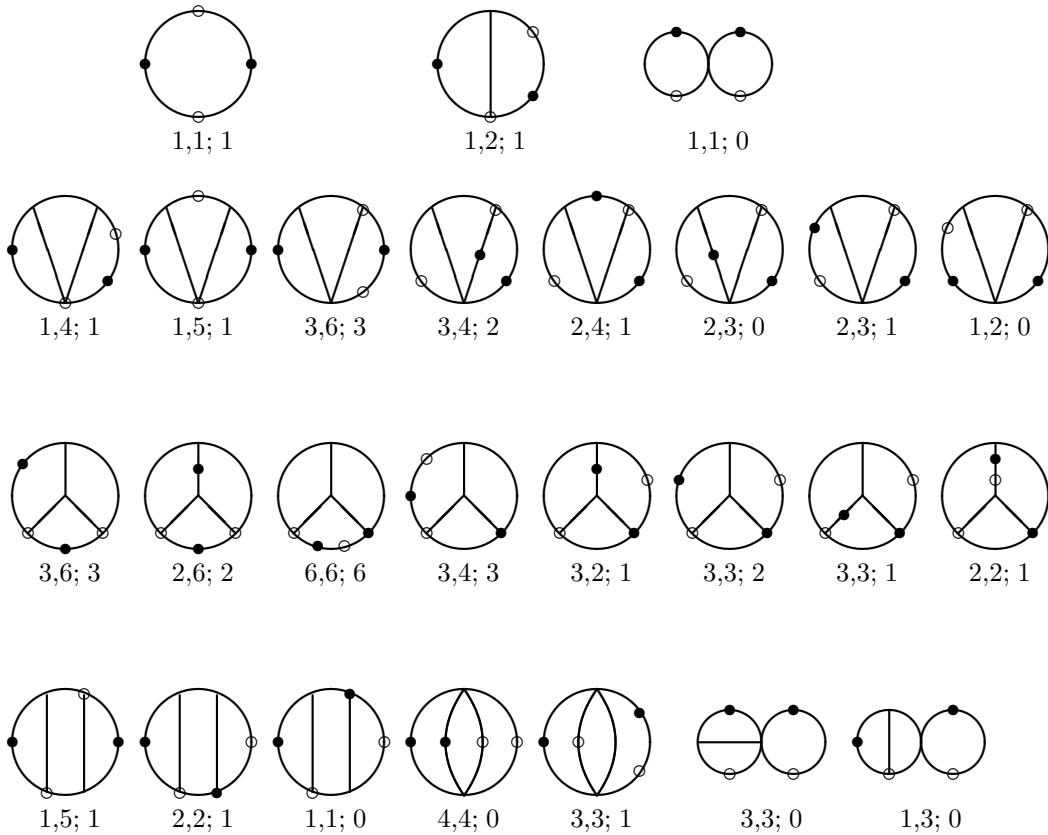
の $(x_l)^2$ 倍である．ここに， $\frac{\partial W_h}{\partial x_l}$ は， G で線 l を 1 点に縮めて得られるグラフ G/l の W_h に他ならない．なぜなら， $T^2 \in \mathcal{T}_h$ が $l \in T^2$ ならば G/l でも 2-樹木で， $l \notin T^2$ ならば G/l では 2-樹木にならない（ループを含むか，樹木になる）からである．ゆえに， $F_{G/l}$ に対する不等式に帰着する．他方， F_G において線 l が全く含まれていない項の総和は， $x_l = 0$ とおいて得られるから，それは F_{G-l} に他ならない．ただし F_{G-l} は， G から単純に l を消去して得られるグラフである．

このようにして，いかなる線もちょうど 1 回だけ含まれる項以外は， N がより小さいグラフの問題に帰着されることが分かる．従って， $N = 2n - 4$ であるようなグラフ G において， G の線の全体をちょうど 2 つの 2-樹木 (T_A と T_D に属するものの組，及び T_{AB} と T_{AC} に属するものの組) に分けられるような場合をすべて調べればよいことになる．このとき，自明に T_{AB} と T_{AC} に属する 2-樹木の組がないグラフ¹や $N - 2$ のグラフに自明に還元するグラフ²を除外してよい． $N = 4, 6, 8$ に対し，それ以外のすべてのグラフを列挙すると下図のようになる（ $\{A, D\}$ と $\{B, C\}$ の入れ替えで得られるものは $W_B W_C$ を考えることで代替）．ここに白丸は A または D を，黒丸は B または C を表す．それぞれのグラフの下に書かれた 3 つの数字は， $W_A W_D, W_B W_C,$

¹具体的には，1 つの線から成るカットセットを含むグラフ，ループ線（単独でループになっている線）を含むグラフ， A と D もしくは B と C が直接 1 つの線で結ばれているグラフである．

²具体的には，「直列」線を含むグラフ (A, B, C, D 以外で，ただ 2 つの線 l_1, l_2 の端点となっている頂点をもつグラフ) ，「並列」線を含むグラフ (2 つの線 l_1, l_2 から成るループを含むグラフ) は $(G - l_1)/l_2$ に還元する．

$W_{AB}W_{AC}$ に含まれる項 $\prod_{l \in G} x_l$ の係数を示す．第 3 の数字が第 1 の数字または第 2 の数字よりも大きいようなグラフはないことがわかる．



[注意 3] ループが 3 つ 1 列に並んだグラフがこの表にない理由は，それに A,B,C,D をどのように挿入しても，ループ線を含むか，あるいは「並列」線を含んでいて $N = 6$ のグラフに還元されるかのいずれかだからである．また，3 つのループが 1 点で接するグラフは， $N = 8$ にするためにどれかのループに A,B,C,D 以外の新しい頂点の挿入が必要になるから，「直列」線を含むことになり， $N = 6$ のグラフに還元される．

念のため，1 節で考えたファインマン・グラフ (G とする) の還元について説明しておこう． G は $N = 7 < 8 = 2n - 4$ なるグラフなので，どの項も必ずどれかの l について $(x_l)^2$ を含む．例えば $(x_3)^2$ を含む項を考えよう．それらの項はすべて，因子 $(x_3)^2$ を除き，内線 3 を 1 点に収縮させたグラフ $G/3$ に関するものと一致する．実際，

$$W_A^{(G/3)} = \partial W_A / \partial x_3 = x_4 x_5 x_6 + x_4 x_5 x_7 + x_4 x_6 x_7 + x_5 x_6 x_7 + x_2 x_6 x_7$$

$$W_D^{(G/3)} = \partial W_D / \partial x_3 = x_1 x_2 x_5 + x_1 x_4 x_5 + x_2 x_4 x_5$$

$$W_{AB}^{(G/3)} = \partial W_{AB} / \partial x_3 = x_1 x_2 x_7 + x_1 x_4 x_7 + x_2 x_4 x_7 + x_1 x_5 x_7$$

$$W_{AC}^{(G/3)} = \partial W_{AC} / \partial x_3 = x_2 x_5 x_6$$

である．そして， $x_1 x_2 x_4 x_5 x_6 x_7$ という項³の係数は， $W_A^{(G/3)} W_D^{(G/3)}$ で 2， $W_{AB}^{(G/3)} W_{AC}^{(G/3)}$ で 1 であることがわかる． $G/3$ は，上のグラフ一覧表の第 2 番目のグラフで白丸と黒丸を入れ替えたものであって，その下に書かれた第 2 の数字 2，第 3 の数字 1 がそれらの係数を示す．

³それ以外の項についてはさらに還元せよ．

1.4 証明の試みへのコメント

もしも任意の T_{AB} の 2-樹木と T_{AC} の 2-樹木の組に対して、重複度をこめて同じ合併集合を与えるような特定の T_A の 2-樹木と T_D の 2-樹木の組が必ず重複なしに対応すれば、証明ができたことになる。しかしそのような 2-樹木間対応を与える一般的規則は存在しないようである。具体例であたって見ると、両方の組の現れ方は極めて不規則で、グラフ的変形のような簡単な手段では結びつかないように思われる。実際、上述の還元結果から分かるように、問題は $N = 2n - 4$ のグラフにおいて、すべての線の集合を 2 つの 2-樹木に分解する仕方の数を勘定することなのである。

一般にグラフ理論の問題における推論は極めて思い違いをし易いので、証明ができたと思っても必ずその推論が妥当かどうかを多くの具体例でチェックすることが肝要である。

参考文献

- [1] 中西襄, 場の量子論 (培風館, 1975)
- [2] N. Nakanishi, *Graph Theory and Feynman Integrals* (Gordon and Breach, 1971)
- [3] N. Nakanishi, *Prog. Theor. Phys.* **26** (1961), 927
- [4] J. B. Boyling, *J. Math. Phys* **6** (1965), 1469

γ 行列と Spence 関数

矢野 忠⁴

2.1 はじめに

中西先生がファインマン積分に関連した論文を投稿されたのでそれに触発されて γ 行列と Spence 関数について書く。これは 1985 年当時の広島大学の牟田さんのグループで $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ の輻射補正のファインマンのループ積分を計算していたときに出てきたものである。これについてはすでに愛媛大学工学部の紀要 [1] の付録として発表した¹が、この紀要を見る人などいないだろうからここにもう一度書く。しかし、この「数学・物理通信」は愛媛大学工学部の紀要よりももっとマイナーかもしれない。

2.2 γ 行列の trace の公式

この節ではあまり文献でみかけない γ 行列の trace の公式とその証明とを述べる。記号やメトリック等は Bjorken-Drell のテキスト [2] にしたがっている。

Trace についてつぎの公式が成り立つ。

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\tau \gamma^\rho \gamma_5] = 4i(g^{\mu\nu} \epsilon^{\lambda\sigma\tau\rho} - g^{\mu\lambda} \epsilon^{\nu\sigma\tau\rho} + g^{\nu\lambda} \epsilon^{\mu\sigma\tau\rho} + g^{\sigma\tau} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} - g^{\sigma\rho} \epsilon^{\mu\nu\lambda\tau} + g^{\tau\rho} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}) \quad (2.1)$$

(証) $A^{\mu\nu\lambda\sigma\tau\rho} \equiv \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\tau \gamma^\rho \gamma_5]$ と定義する。よく知られた関係

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

$$\gamma^\mu \gamma_5 + \gamma_5 \gamma^\mu = 0$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma_5] = 4i\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$$

を用いて上の trace についての公式 (2.1) を証明する。

$$\begin{aligned} A^{\mu\nu\lambda\sigma\tau\rho} &= 2g^{\mu\nu} \times 4i\epsilon^{\lambda\sigma\tau\rho} - A^{\nu\mu\lambda\sigma\tau\rho} \\ &= 8i[g^{\mu\nu} \epsilon^{\lambda\sigma\tau\rho} - g^{\mu\lambda} \epsilon^{\nu\sigma\tau\rho}] + A^{\nu\lambda\mu\sigma\tau\rho} \\ &= 8i[g^{\mu\nu} \epsilon^{\lambda\sigma\tau\rho} - g^{\mu\lambda} \epsilon^{\nu\sigma\tau\rho} + g^{\nu\lambda} \epsilon^{\mu\sigma\tau\rho}] - A^{\lambda\nu\mu\sigma\tau\rho} \\ &= 8i[g^{\mu\nu} \epsilon^{\lambda\sigma\tau\rho} - g^{\mu\lambda} \epsilon^{\nu\sigma\tau\rho} + g^{\nu\lambda} \epsilon^{\mu\sigma\tau\rho} - g^{\sigma\tau} \epsilon^{\lambda\nu\mu\rho}] + A^{\lambda\nu\mu\tau\sigma\rho} \\ &= 8i[g^{\mu\nu} \epsilon^{\lambda\sigma\tau\rho} - g^{\mu\lambda} \epsilon^{\nu\sigma\tau\rho} + g^{\nu\lambda} \epsilon^{\mu\sigma\tau\rho} - g^{\sigma\tau} \epsilon^{\lambda\nu\mu\rho} + g^{\sigma\rho} \epsilon^{\lambda\nu\mu\tau}] - A^{\lambda\nu\mu\tau\sigma\rho} \\ &= 8i[g^{\mu\nu} \epsilon^{\lambda\sigma\tau\rho} - g^{\mu\lambda} \epsilon^{\nu\sigma\tau\rho} + g^{\nu\lambda} \epsilon^{\mu\sigma\tau\rho} - g^{\sigma\tau} \epsilon^{\lambda\nu\mu\rho} + g^{\sigma\rho} \epsilon^{\lambda\nu\mu\tau} - g^{\tau\rho} \epsilon^{\lambda\nu\mu\sigma}] + A^{\lambda\nu\mu\tau\sigma\rho} \end{aligned}$$

ところで

$$\begin{aligned} A^{\lambda\nu\mu\tau\sigma\rho} &= \text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\tau \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma_5] \\ &= -\text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\tau \gamma^\sigma \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_5] \\ &= -A^{\mu\nu\lambda\sigma\tau\rho} \end{aligned}$$

⁴yanotad@earth.ocn.ne.jp

ここで，最後の等式への変形には $\text{Tr}[\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_n}] = \text{Tr}[\gamma^{\mu_n}\gamma^{\mu_{n-1}}\dots\gamma^{\mu_1}]$ の性質が用いられた．
したがって

$$A^{\mu\nu\lambda\sigma\rho} = 4i[g^{\mu\nu}\epsilon^{\lambda\sigma\rho} - g^{\mu\lambda}\epsilon^{\nu\sigma\rho} + g^{\nu\lambda}\epsilon^{\mu\sigma\rho} - g^{\sigma\tau}\epsilon^{\lambda\nu\mu\rho} + g^{\sigma\rho}\epsilon^{\lambda\nu\mu\tau} - g^{\tau\rho}\epsilon^{\lambda\nu\mu\sigma}] \quad (2.2)$$

が得られ，Levi-Civita 記号の添字の交換の反対称性を用いると，証明すべき式が得られる．

この公式の証明ではガンマ行列の指標が 6 個あるが，右辺の前の 3 つのガンマ行列の順序を左辺のガンマ行列の順序とは逆順にし，かつ右辺の後の 3 つのガンマ行列の順序を左辺のガンマ行列の順序と逆順にするように式を変形したことである．ただし，2 つの 3 個のガンマ行列のかたまりの順序は変えなかった．

この公式は故小平治郎氏（当時広島大）と江沢康生氏（元愛媛大）によって独立に導出されていた．この証明法は小平氏によるものである．この証明を教示された小平氏に感謝する．

2.3 $\text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma\gamma^\tau\gamma^\rho\gamma_5]$ から導かれる恒等式と独立なテンソル

コンピュータでの REDUCE3 での γ_5 行列を含む trace の計算において，計算結果が見かけ上，手による計算と結果が異なっている場合がある．このときに以下に示す 6 つの恒等式を用いてやれば，コンピュータによる計算と一致するが，このときに単にこれらの恒等式を単純に用いるだけでは計算が一致することを示せないことがある．一般には，以下に示すような 6 階のテンソルの間の独立性を考慮する必要がある．

前節の trace の公式の導き方と同じようだが，ちょっとちがった変形をして今度は恒等式を導こう．前節と同様に $A^{\mu\nu\lambda\sigma\rho} \equiv \text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma\gamma^\tau\gamma^\rho\gamma_5]$ と定義する．このとき

$$\begin{aligned} A^{\mu\nu\lambda\sigma\rho} &= 2g^{\mu\nu} \times 4i\epsilon^{\lambda\sigma\rho} - A^{\nu\mu\lambda\sigma\rho} \\ &= 8i[g^{\mu\nu}\epsilon^{\lambda\sigma\rho} - g^{\mu\lambda}\epsilon^{\nu\sigma\rho}] + A^{\nu\lambda\mu\sigma\rho} \\ &= 8i[g^{\mu\nu}\epsilon^{\lambda\sigma\rho} - g^{\mu\lambda}\epsilon^{\nu\sigma\rho} + g^{\mu\sigma}\epsilon^{\nu\lambda\tau\rho}] - A^{\nu\lambda\sigma\mu\tau\rho} \\ &= 8i[g^{\mu\nu}\epsilon^{\lambda\sigma\rho} - g^{\mu\lambda}\epsilon^{\nu\sigma\rho} + g^{\mu\sigma}\epsilon^{\nu\lambda\tau\rho} - g^{\mu\tau}\epsilon^{\nu\lambda\sigma\rho}] + A^{\nu\lambda\sigma\tau\mu\rho} \\ &= 8i[g^{\mu\nu}\epsilon^{\lambda\sigma\rho} - g^{\mu\lambda}\epsilon^{\nu\sigma\rho} + g^{\mu\sigma}\epsilon^{\nu\lambda\tau\rho} - g^{\mu\tau}\epsilon^{\nu\lambda\sigma\rho} + g^{\mu\rho}\epsilon^{\nu\lambda\sigma\tau}] - A^{\nu\lambda\sigma\tau\rho\mu} \end{aligned}$$

ところで

$$\begin{aligned} A^{\nu\lambda\sigma\tau\rho\mu} &= \text{Tr}[\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma\gamma^\tau\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma_5] \\ &= -\text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma\gamma^\tau\gamma^\rho\gamma_5] \\ &= -A^{\mu\nu\lambda\sigma\rho} \end{aligned}$$

であるから

$$A^{\mu\nu\lambda\sigma\rho} = 8i[g^{\mu\nu}\epsilon^{\lambda\sigma\rho} - g^{\mu\lambda}\epsilon^{\nu\sigma\rho} + g^{\mu\sigma}\epsilon^{\nu\lambda\tau\rho} - g^{\mu\tau}\epsilon^{\nu\lambda\sigma\rho} + g^{\mu\rho}\epsilon^{\nu\lambda\sigma\tau}] + A^{\mu\nu\lambda\sigma\rho}$$

となるので

$$g^{\mu\nu}\epsilon^{\lambda\sigma\rho} - g^{\mu\lambda}\epsilon^{\nu\sigma\rho} + g^{\mu\sigma}\epsilon^{\nu\lambda\tau\rho} - g^{\mu\tau}\epsilon^{\nu\lambda\sigma\rho} + g^{\mu\rho}\epsilon^{\nu\lambda\sigma\tau} = 0 \quad (2.3)$$

という恒等式が得られる．

同様にして

$$g^{\nu\lambda}\epsilon^{\mu\sigma\tau\rho} - g^{\nu\sigma}\epsilon^{\mu\lambda\tau\rho} + g^{\nu\tau}\epsilon^{\mu\lambda\sigma\rho} - g^{\nu\rho}\epsilon^{\mu\lambda\sigma\tau} = g^{\nu\mu}\epsilon^{\lambda\sigma\tau\rho} \quad (2.4)$$

$$g^{\lambda\sigma}\epsilon^{\mu\nu\tau\rho} - g^{\lambda\tau}\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} + g^{\lambda\rho}\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} = g^{\lambda\nu}\epsilon^{\mu\sigma\tau\rho} - g^{\lambda\mu}\epsilon^{\nu\sigma\tau\rho} \quad (2.5)$$

$$g^{\sigma\tau}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} - g^{\sigma\rho}\epsilon^{\mu\nu\lambda\tau} = g^{\sigma\mu}\epsilon^{\nu\lambda\tau\rho} - g^{\sigma\nu}\epsilon^{\mu\lambda\tau\rho} + g^{\sigma\lambda}\epsilon^{\mu\nu\tau\rho} \quad (2.6)$$

$$g^{\tau\rho}\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} = -g^{\tau\mu}\epsilon^{\nu\lambda\sigma\rho} + g^{\tau\nu}\epsilon^{\mu\lambda\sigma\rho} - g^{\tau\lambda}\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} + g^{\tau\sigma}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \quad (2.7)$$

の恒等式が得られる．

計量テンソルと反対称な Levi-Civita 記号とからつくられる 6 階のテンソルは 6 つの指標から任意の 2 つを選ぶ数, ${}_6C_2 = {}_6P_2/2! = 15$ 個あるが, この 15 個の間に (2.3)-(2.7) の 5 つの条件があるから, したがって, そのうちで独立なテンソルは 10 個となる. それらを (2.3)-(2.7) を用いて, たとえば

$$\begin{aligned} &g^{\mu\nu}\epsilon^{\lambda\sigma\tau\rho}, \quad g^{\mu\lambda}\epsilon^{\nu\sigma\tau\rho}, \quad g^{\mu\sigma}\epsilon^{\nu\lambda\tau\rho}, \quad g^{\mu\tau}\epsilon^{\nu\lambda\sigma\rho} \\ &g^{\nu\lambda}\epsilon^{\mu\sigma\tau\rho}, \quad g^{\nu\sigma}\epsilon^{\mu\lambda\tau\rho}, \quad g^{\nu\tau}\epsilon^{\mu\lambda\sigma\rho} \\ &g^{\lambda\sigma}\epsilon^{\mu\nu\tau\rho}, \quad g^{\lambda\tau}\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \\ &g^{\sigma\tau}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \end{aligned} \quad (2.8)$$

と選べば, 6 階の残りの 5 個のテンソル

$$g^{\mu\rho}\epsilon^{\nu\lambda\sigma\tau}, \quad g^{\nu\rho}\epsilon^{\mu\lambda\sigma\tau}, \quad g^{\lambda\rho}\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau}, \quad g^{\sigma\rho}\epsilon^{\mu\nu\lambda\tau}, \quad g^{\tau\rho}\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \quad (2.9)$$

は (2.3)-(2.7) を用いて上に選んだ 10 個の独立なテンソルによって表すことができる.

2.4 Spence 関数

一般にループ運動量積分を行うと最終的に Spence 関数 (dilogarithm 関数) の和で表されることが知られている. その Spence 関数についてのいくつかの有用な等式 (F.1)-(F.9) が [3] に与えられている. この節ではそれらの等式の証明を与える.

まず Spence 関数の定義は

$$\text{Sp}(z) = - \int_0^z dt \frac{\ln(1-t)}{t} \quad (2.10)$$

である. $\text{Sp}(z)$ は複素変数 z の解析関数で $z = 1$ から $z = \infty$ までの branch cut をもつ. (2.10) で $t = z\theta$ とおくと

$$\text{Sp}(z) = - \int_0^1 d\theta \frac{\ln(1-z\theta)}{\theta}$$

となり, これを部分積分すれば

$$\begin{aligned} \text{Sp}(z) &= -z \int_0^1 d\theta \frac{\ln \theta}{1-z\theta} \\ &= \int_0^1 d\theta \frac{\ln \theta}{\theta - \frac{1}{z}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

したがって, (2.11) を (2.10) のかわりに Spence 関数の定義として用いてもよい. (2.11) では branch cut は $0 \leq 1/z \leq 1$ となっている.

つぎに, Spence 関数の間に成立するいくつかの関係を導いておく. まず (2.10) を部分積分すれば,

$$\text{Sp}(z) = -\ln z \ln(1-z) - \int_0^z dt \frac{\ln t}{1-t}$$

いま, $1-t = \theta$ とおけば

$$\begin{aligned} \text{Sp}(z) &= -\ln z \ln(1-z) + \int_1^{1-z} d\theta \frac{\ln(1-\theta)}{\theta} \\ &= -\ln z \ln(1-z) + \int_0^{1-z} d\theta \frac{\ln(1-\theta)}{\theta} - \int_0^1 d\theta \frac{\ln(1-\theta)}{\theta} \\ &= -\ln z \ln(1-z) - \text{Sp}(1-z) + \text{Sp}(1) \end{aligned}$$

したがって

$$\text{Sp}(z) + \text{Sp}(1-z) = \text{Sp}(1) - \ln z \ln(1-z) \quad (2.12)$$

が得られる .

さらに , $\text{Sp}(-z)$ についての関係を求めよう .

$$\text{Sp}(-z) = - \int_0^{-z} dt \frac{\ln(1-t)}{t}$$

いま $t = \frac{1}{\theta}$ とおけば ,

$$\begin{aligned} \text{Sp}(-z) &= \int_{\infty}^{-\frac{1}{z}} d\theta \frac{\ln(1-\theta)}{\theta} - \int_{\infty}^{-\frac{1}{z}} d\theta \frac{\ln(-\theta)}{\theta} \\ &= \int_0^{-\frac{1}{z}} d\theta \frac{\ln(1-\theta)}{\theta} + \int_{\infty}^0 d\theta \frac{\ln(1-\theta)}{\theta} + \int_{\infty}^{-\frac{1}{z}} d\theta \frac{\ln(-\theta)}{(-\theta)} \\ &= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

とおく . ここで , I_1, I_2, I_3 は付録 1 と 2 に示すように

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{-\frac{1}{z}} d\theta \frac{\ln(1-\theta)}{\theta} \\ &= -\text{Sp}\left(-\frac{1}{z}\right) \\ I_2 &= - \int_0^{\infty} d\theta \frac{\ln(1-\theta)}{\theta} \\ &= 2\text{Sp}(-1) + \int_0^1 d\theta \frac{\ln \theta}{\theta} \\ I_3 &= \int_{\infty}^{-\frac{1}{z}} d\theta \frac{\ln(-\theta)}{(-\theta)} \\ &= -\frac{1}{2}(\ln z)^2 - \int_0^1 du \frac{\ln u}{u} \end{aligned}$$

となる . これらの I_1, I_2, I_3 を足し合わせれば ,

$$\begin{aligned} \text{Sp}(-z) &= I_1 + I_2 + I_3 \\ &= -\text{Sp}\left(-\frac{1}{z}\right) + 2\text{Sp}(-1) - \frac{1}{2}(\ln z)^2 \end{aligned}$$

したがって

$$\text{Sp}(-z) + \text{Sp}\left(-\frac{1}{z}\right) = 2\text{Sp}(-1) - \frac{1}{2}(\ln z)^2 \quad (2.13)$$

が得られる .

三番目の Spence 関数の関係を導こう . これは x が実変数で $x < 1$ のときに成立する関係である . まず

$$\text{Sp}(x) = - \int_0^x dt \frac{\ln(1-t)}{t}$$

からはじめよう . これは (2.10) で複素数 z を実数 x に置換えた式である . ここで , $u = -\frac{t}{1-t}$ とおけば ,

$$\begin{aligned} \text{Sp}(x) &= - \int_0^{-\frac{x}{1-x}} du \frac{\ln(1-u)}{u(u-1)} \\ &= - \int_0^{-\frac{x}{1-x}} du \frac{\ln(1-u)}{u-1} + \int_0^{-\frac{x}{1-x}} du \frac{\ln(1-u)}{u} \\ &= -\text{Sp}\left(-\frac{x}{1-x}\right) + \int_0^{-\frac{x}{1-x}} du \frac{\ln(1-u)}{1-u} \end{aligned}$$

一番最後の辺の第 2 項の積分で $1 - u = \theta$ とおけば,

$$\begin{aligned} \text{Sp}(x) &= -\text{Sp}\left(-\frac{x}{1-x}\right) - \int_1^{\frac{1}{1-x}} d\theta \frac{\ln \theta}{\theta} \\ &= -\text{Sp}\left(-\frac{x}{1-x}\right) - \frac{1}{2}[\ln(1-x)]^2 \end{aligned}$$

したがって,

$$\text{Sp}(x) + \text{Sp}\left(-\frac{x}{1-x}\right) = -\frac{1}{2}[\ln(1-x)]^2, \quad x < 1 \quad (2.14)$$

が得られる.

最後に $|z| \leq 1$ のときの Spence 関数のべき級数表示を求めておく. (2.10) で $\ln(1-t)$ を t のべき級数に展開すれば,

$$\begin{aligned} \text{Sp}(z) &= \int_0^z dt \left(1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t^2 + \dots\right) \\ &= \left[\frac{1}{1^2}t + \frac{1}{2^2}t^2 + \frac{1}{3^2}t^3 + \dots\right]_0^z \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \quad |z| \leq 1 \end{aligned} \quad (2.15)$$

(2.15) から

$$\text{Sp}(1) = \frac{\pi^2}{6} \quad (2.16)$$

$$\text{Sp}(-1) = -\frac{\pi^2}{12} \quad (2.17)$$

また, (2.14) の x に $x = \frac{1}{2}$ を代入して (2.17) を用いれば,

$$\text{Sp}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\ln 2)^2 \quad (2.18)$$

が得られる.

さらに, (2.16), (2.17) を (2.12), (2.13) に代入すれば, これらの式は

$$\text{Sp}(z) + \text{Sp}(1-z) = \frac{\pi^2}{6} - \ln z \ln(1-z) \quad (2.19)$$

$$\text{Sp}(-z) + \text{Sp}\left(-\frac{1}{z}\right) = -\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}(\ln z)^2 \quad (2.20)$$

となる. ここで導いた (2.12)-(2.20) は [3] の (F.1)-(F.9) である.

2.5 おわりに

このエッセイでは γ 行列の trace の公式と Spence 関数について述べた. これらは少し専門的にはなるが, 素粒子反応の輻射補正のループ積分の計算をするときによく出てくるものである.

Spence 関数についてはこれだけで十分ではない. 実験と理論を比べるには Spence 関数を数値的に計算する必要があるからである. 二宮市三先生 (元中部大学) によってつくられた, Spence 関数の値を計算する能率のよいプログラムがある. これは私が先生にお願いしてつくってもらったものであるが, 一般にはまだよく知られていないとは思われないので, その計算法を説明したいが, それは別の機会に譲ろう.

また、このエッセイを書いた後で複素変数の dilogarithm 関数の総合的な論文 [4] がいまでは出版されていることや二宮先生のプログラムの紹介が Web 上 [5] でされていることを知った。

またこの Spence 関数は超幾何関数の一つであることも知った。学校で学ぶ関数の 95% が超幾何関数で表されるとソーヤーの本 [6] で知って、エッセイを書いたのが 2008 年 1 月 [7] であるが、それらを統一的に私に理解できる日が来ればと期待している。

付録 1 I_2, I_3 の計算

この付録では I_2, I_3 の計算の詳細を述べる。

まず I_2 は

$$\begin{aligned} I_2 &= - \int_0^\infty d\theta \frac{\ln(1-\theta)}{\theta} \\ &= - \int_{-1}^\infty d\theta \frac{\ln(1-\theta)}{\theta} - \int_0^{-1} d\theta \frac{\ln(1-\theta)}{\theta} \\ &= \text{Sp}(-1) - \int_{-1}^\infty d\theta \frac{\ln(1-\theta)}{\theta} \end{aligned}$$

ところで、後の付録 2 で示すように

$$- \int_{-1}^\infty d\theta \frac{\ln(1-\theta)}{\theta} = \text{Sp}(-1) + \int_0^1 d\theta \frac{\ln \theta}{\theta} \quad (2.21)$$

となるから、したがって、

$$I_2 = 2\text{Sp}(-1) + \int_0^1 d\theta \frac{\ln \theta}{\theta}$$

つぎに、 I_3 は

$$I_3 = \int_\infty^{-\frac{1}{z}} d\theta \frac{\ln(-\theta)}{(-\theta)}$$

であるが、いま $\theta = -\frac{1}{u}$ とおけば

$$\begin{aligned} I_3 &= - \int_0^z du \frac{\ln u}{u} \\ &= - \int_1^z du \frac{\ln u}{u} - \int_0^1 du \frac{\ln u}{u} \\ &= -\frac{1}{2}(\ln z)^2 - \int_0^1 du \frac{\ln u}{u} \end{aligned}$$

付録 2 I_2, I_3 の補助計算

まず付録 1 で結果を述べた (2.21)

$$- \int_{-1}^\infty d\theta \frac{\ln(1-\theta)}{\theta} = \text{Sp}(-1) + \int_0^1 d\theta \frac{\ln \theta}{\theta}$$

の導出を述べる．いま $\theta = \frac{1}{u}$ とおけば，

$$\begin{aligned}
 -\int_{-1}^{\infty} d\theta \frac{\ln(1-\theta)}{\theta} &= -\int_{-1}^0 \frac{du}{u} \ln\left(\frac{u-1}{u}\right) \\
 &= \int_{-1}^0 \frac{\ln(1-u)}{u} - \int_{-1}^0 \frac{\ln(-u)}{u} \\
 &= -\int_0^{-1} \frac{\ln(1-u)}{u} + \int_{-1}^0 du \frac{\ln(-u)}{-u} \\
 &= \text{Sp}(-1) - \int_1^0 dw \frac{\ln w}{w} \\
 &= \text{Sp}(-1) + \int_0^1 d\theta \frac{\ln \theta}{\theta}
 \end{aligned}$$

これで I_2 に現れる積分 (2.21) が求められた．

つぎに I_3 に現れる積分が

$$I = \int_1^z du \frac{\ln u}{u} = \frac{1}{2}(\ln z)^2 \quad (2.22)$$

となることを証明しよう．

部分積分して

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^z du \frac{\ln u}{u} \\
 &= (\ln u)^2 \Big|_1^z - \int_1^z du \frac{\ln u}{u} \\
 &= (\ln z)^2 - I
 \end{aligned}$$

したがって，求める積分 I は

$$I = \frac{1}{2}(\ln z)^2$$

となる．これで，(2.22) が求められた．

関連図書

- [1] 矢野 忠, 江沢康生, 名島隆一, 若泉誠一, 渡辺敏雄, 愛媛大学工学部紀要 11 巻 2 号 (Feb. 1987) 9-19
- [2] J. D. Bjorken and S. D. Drell, Relativistic Quantum Mechanics (McGraw-Hill, 1964)
- [3] K-I. Aoki, Z. Hioki, R. Kawabe, M. Konuma and T. Muta, Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 73 (1982) 1-225
- [4] L. C. Maximon, Proc. Roy. Soc. A **459** (2003) 2807-2819
- [5] <http://netnumpac.fuis.fukui-u.ac.jp/~graphic/3d/newApplet/Cspence.html>
- [6] W. W. ソーヤー (宮本敏雄, 田中勇訳)「数学へのプレリュード」(みすず書房, 1978) 32-34, 76-79
- [7] 矢野 忠, 超幾何関数 1, 研究と実践 (愛数協) 投稿中

編集後記

ようやく創刊号を発刊の運びとなった。どれくらいこの通信が続けられるか。編集人にもわからない。2, 3号で続かなくなるか。それとも数十号まで続くのか。年4回の発行では40号に達するのは十年後だから、私たち編集人の年齢を考えたら、どうも40号まではいかないかも知れない。

こんなミニ通信が誰にも覚えていてもらえなくてもそれはそれで良しとしたい。自己満足ではあろうが、自己満足も残らなければどうしようもない。これは大学院でセミナーをしてくれた池田峰夫先生が学問をするときの心がまえとしてよく私に個人的に話してくれたことである。

この通信としては今回の論文は程度がちょっと高すぎたかもしれない。編集人としては一般的にはもっと程度の低いエッセイの投稿を想定している。また、一方でこの程度のものは許容されるということである。原稿の募集要領とか投稿規程を見て判断をして投稿をお願いしたい（矢野 忠）

原稿の募集と投稿規定

原稿の募集

1. 雑誌の編集者と発行人

この「数学・物理通信」は新関章三（元高知大学）と矢野 忠（元愛媛大学）が編集および発行する、主にメールで配布する個人的な季刊の雑誌もっと精確にはサーキュラーです（以後簡単のために「通信」という）。

2. 雑誌の目的

この通信はインフォーマルに数学や物理の情報を関心ある人に知らせる目的で発行されるものです。したがって、興味深くて、面白いと思われるもので、どこかに発表しておきたいこととか研究としては価値がないかもしれないが、教育上の意味があると考えられるような論文とかエッセイとかを publishing を目的とします。それで専門的でありすぎるものとか、もしオリジナリティを強く主張されたいような場合には適切な別の雑誌に投稿されるようにお願いします。この通信の程度は中学校以上の数学から大学程度の数学を使う数学や物理の話題を対象とします。読者は中学校、高校、大学の理数系の学生、教師、研究者や元教師、元研究者、研究所の研究者、会社の技術者その他これに準ずる方とします。アマチュアの方でもかまいませんが、その場合には誰か推薦者がいることが必要です。

3. 編集の方針

この通信は投稿されたものをそのままの形で掲載します。したがって、内容の審査は行いませんが、もちろん公序良俗に反するものとか、理性に反するような内容とか数学や物理に関係しないことは掲載をお断りすることがあります。原稿に目次をつけられる場合にはページ数を号のページ数に合わせるために変更することはありかもしれません。しかし、文章の責任はすべて著者にあります。また、将来において著者がその投稿原稿を自分の著書等に再録することは自由ですが、再録した場合には初出を明記することをお願いします。一号のページ数は 26 ページを目途とします。原稿のページ数があまり多いようなら、何回かに分けて出すことをお願いします。投稿は 1 回当たりのページ数を 10 ページ前後でお願いをしたいと思います。短いのは半ページでも数行でもかまいません。

4. 発行の方針

発行は基本的に Latex で入稿されたものを集めてサーキュラーの形に編集して PDF にして出力してメールで配布します。もちろん少数のプリントアウトも原理的には発行できますが、これは例外とします。また原則として季刊としますが、編集発行人の都合によってはこの原則が変更になることがあります。

5. その他

基本的には自由であることを旨としますが、何か問題が起これば、その都度著者と相談をします。

投稿規定

1. 投稿先と原稿のフォーマット

Latex で A4paper の原稿と dvi のファイルを e-mail に添付書類として yanotad@earth.ocn.ne.jp の矢野忠宛てに送付する。タイトルはセンタリング, 所属, 氏名等はセンタリングまたは右寄せにしてください。上下の余白は 3cm, 左右は 2.5cm を原則としますが, 編集者の都合で変更されることがあります。図や表は本文の該当箇所に張り込んでください。またキャプションをつけてください。白黒印刷であることにご留意ください。

2. 投稿の受付と掲載決定

投稿を受付ければ受付けた旨のメールを確認のため送ります。もっともこれは原稿を受けつけたことの確認であって, そのまま掲載決定にはなりません。掲載ができないときはその後メールをします。特に掲載できない旨のメールが行かなければ, 掲載を認めたものとします。早く結果を知りたい場合は再度確認のメールを上記のメールアドレス宛に下さい。もっとも編集方針でも述べたように普通の良識的な論文やエッセイの場合には受付と同時にほぼ掲載決定とお考えください。

3. 発行時期

季刊で 3 月, 6 月, 9 月, 12 月を原則としますが, 編集者の都合によりその季節の中で前後することがあります。