

数学・物理通信

1 卷 3 号 2010 年 6 月

編集 新関章三・矢野 忠

2010 年 6 月 19 日

目次

厳密解が求まる 2 変数の積分方程式	2
1.1 2 変数の積分方程式とその厳密解	2
1.2 準備	3
1.3 解の確認	4
1.4 原論文の概要	5
樹木ファインマン・グラフの双対変換とその表現	7
2.1 円順列ファインマン・グラフ	7
2.2 双対変換	8
2.3 交差対称方程式とその解	10
2.4 双対変換の表現	11
2.5 歴史的背景	15
三角形の 3 頂点までの距離の和が最小となる点	18
3.1 はじめに (問題の発端)	18
3.2 幾何学上の一定理	19
3.3 終わりに (新ハドロン?)	21
編集者への手紙とその返事	23
編集後記	24
原稿の募集と投稿規定	25

厳密解が求まる2変数の積分方程式

中西 襄 (京都大学名誉教授)

1.1 2変数の積分方程式とその厳密解

ソリトン方程式は、厳密解が求まる非線形偏微分方程式として興味があるものである。しかし、多変数積分方程式については、特別な対称性があるとか、偏微分方程式に変換できるとかいう場合を除いて、級数展開ではない閉じた形で厳密解が求まるノントリヴィアルな例というのは、あまり知られていないのではないだろうか。この論説では、私がたまたま見つけた厳密解が求まる2変数の積分方程式について述べてみたい。この積分方程式がどのような問題で現れたのか、それをどのようにして解いたのか、そしてその結果からどのようなことが得られたのかについては最後の節で解説することにし、本節ではこの積分方程式を純粋に数学的对象として考察することにする。

積分方程式は次のようなものである。独立変数の変域は、 $x \geq 0$, $-1 \leq z \leq 1$ である。

$$f(x, z) = 1 + \frac{1}{2}\lambda \int_{-1}^1 dz' \int_0^{xR(z, z')} dx' \frac{x'}{(1+x')^2} f(x', z'). \quad (1.1)$$

ここに、 λ は任意定数、

$$R(z, z') \equiv \frac{1+z}{1+z'}\theta(z'-z) + \frac{1-z}{1-z'}\theta(z-z') \quad (1.2)$$

で、 $\theta(t)$ は、 t が正のとき1、負のとき0の階段関数である。 $R(z, z')$ は次のような性質を持つ。 $R(\pm 1, z') = 0$, $0 \leq R(z, z') \leq 1$, $R(-z, -z') = R(z, z')$, そして任意の定数 m に対し、

$$D_m(z) \equiv (1-z^2)\left(\frac{d}{dz}\right)^2 + 2(m-1)z\frac{d}{dz} - m(m-1) \quad (1.3)$$

とするとき、¹

$$D_m(z)[R(z, z')]^m = -2m\delta(z-z') \quad (1.4)$$

である。ここに δ はディラックのデルタ関数で、 θ の微分から生ずる。

さて、(1.1) は本質的に第2種ヴォルテラ型の積分方程式だから、逐次近似法により λ の冪級数として解くことができる。しかしそれでは解の具体的な形は全く分からない。実際、 λ^2 の項まで計算するだけでもかなりの労力が要るので、とても一般項を見つけることはできないし、ましてや級数を足し上げることなどほとんど不可能であろう。

ところが、(1.1) の厳密解は実にきれいな形に求まるのである。

$$f(x, z) = F(-\nu, \nu+1; 1; -X) = P_\nu(1+2X). \quad (1.5)$$

ここに、 F は超幾何関数、 P_ν は第1種ルジャンドル関数、 ν は2次方程式 $\nu(\nu+1) = \lambda$ の解、すなわち

$$\nu = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{4\lambda+1}), \quad (1.6)$$

¹ $D_m(z)$ に基づく固有値問題の固有関数は、ゲーゲンバウアー多項式 $C_n^{m+\frac{1}{2}}(z)$ を用いて書ける。

そして,

$$X \equiv \frac{x^2(1-z^2)}{4(1+x)} \quad (1.7)$$

である.

2つの独立変数が X という塊になるところがミソである. しかしもちろん, こんな塊が出てくることは, (1.1) をいくら眺めていても分からない. 実際に解いてみてはじめて分かったことである. はじめて解くときは, いわばブルートフォースで解いたわけだが, 答えが分かってしまえば, (1.5) が (1.1) の解であることを証明するのはもっとエレガントにやれる. 以下でそれを説明しよう.

1.2 準備

次の公式を証明する ($n \geq 0, k \geq 0$).

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 dz' [R(z, z')]^{2n+k+2} (1-z'^2)^n \\ &= \frac{1}{2} (2n+k+2) \frac{n!k!}{(n+k+1)!} \sum_{j=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^j (n+k-j)!}{2^{2j} (n+j+1)! (k-2j)!} (1-z^2)^{n+j+1}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

$[k/2]$ はガウスの記号で, $k/2$ を超えない整数ということだが, 分母に $(k-2j)!$ があるから, ∞ としておいても差し支えない.

z' 積分を遂行すること自体は, それほど大変なことではない. しかしそれを右辺のように $1-z^2$ の多項式の形に書き直すのは, 相当大変な作業である. (2.1) を導くのでなく, 証明するだけなら, (1.4) を利用するのが便利である. まず, 明らかに両辺とも $z = \pm 1$ でゼロである. 次に, 左辺に $D_{2n+k+2}(z)$ を作用させると, (1.4) により,

$$D_{2n+k+2}(z) \int_{-1}^1 dz' [R(z, z')]^{2n+k+2} (1-z'^2)^n = -2(2n+k+2)(1-z^2)^n \quad (2.2)$$

となる. 従って, (2.1) の右辺に $D_{2n+k+2}(z)$ を作用させたとき, (2.2) の右辺と同じになることを示せば, 証明が完了することになる.

初等的な計算により,

$$\begin{aligned} D_{2n+k+2}(z)(1-z^2)^{n+j+1} &= -4(n+j+1)(n+k-j+1)(1-z^2)^{n+j} \\ &\quad - (k-2j-1)(k-2j)(1-z^2)^{n+j+1} \end{aligned} \quad (2.3)$$

が得られる. 従って,

$$\begin{aligned} D_{2n+k+2}(z) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (n+k-j)!}{2^{2j} (n+j+1)! (k-2j)!} (1-z^2)^{n+j+1} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1} (n+k-j+1)!}{2^{2j-2} (n+j)! (k-2j)!} (1-z^2)^{n+j} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} (n+k-j)!}{2^{2j} (n+j+1)! (k-2j-2)!} (1-z^2)^{n+j+1} \end{aligned} \quad (2.4)$$

となるが, 右辺第1項は, その $j=0$ の部分を除き, $j=j'+1$ とおいて j' に関する和に書き直すと, ちょうど右辺第2項とキャンセルすることが分かる. 右辺第1項の $j=0$ の部分は, (2.1) の右辺の和記号の前の因子をかけると, たしかに (2.2) の右辺の式に一致する. \square

1.3 解の確認

後知恵であるが，解が (1.7) の X のみに依存することが分かっているので，解を X の冪級数

$$f(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n \quad (c_0 = 1) \quad (3.1)$$

に展開する．そこで次の積分を計算することになる．

$$I_n(x, z) \equiv \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dz' \left(\frac{1-z'^2}{4} \right)^n J_n(x, z; z'), \quad (3.2)$$

$$J_n(x, z; z') \equiv \int_0^{xR(z, z')} dx' \frac{x'^{2n+1}}{(1+x')^{n+2}}. \quad (3.3)$$

まず，(3.3) の計算であるが，被積分関数を部分分数に分けるより，冪級数に展開する方がよい．

$$J_n(x, z; z') = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n+k+1)!}{(n+1)! k!} \cdot \frac{[xR(z, z')]^{2n+k+2}}{2n+k+2}. \quad (3.4)$$

(3.4) を (3.2) に代入し，公式 (2.1) を用いると，

$$I_n(x, z) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=2j}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} (n+k-j)!}{2^{2n+2j+2} (n+j+1)! (k-2j)!} x^{2n+k+2} (1-z^2)^{n+j+1} \quad (3.5)$$

となる．ただし和の順序を入れ替えた． $k = 2j + m$ と置いて， m についての和を遂行すると，

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (n+j+m)!}{m!} x^{2n+2j+2+m} = (n+j)! \frac{x^{2n+2j+2}}{(1+x)^{n+j+1}} \quad (3.6)$$

であるから，

$$I_n(x, z) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{n+j+1} \left(\frac{x^2(1-z^2)}{4(1+x)} \right)^{n+j+1} \quad (3.7)$$

となって，確かに X の冪級数で書ける²．従って，(1.1) に (3.1) を代入し (3.7) の結果を使えば，

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n = 1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{n+j+1} X^{n+j+1} \quad (3.8)$$

を得る． X^n の係数を比較すれば³，漸化式

$$c_n = \frac{\lambda}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k-1}}{k+1} c_k, \quad c_0 = 1 \quad (3.9)$$

が得られる．この漸化式の解が

$$c_n = \frac{\prod_{j=0}^{n-1} [\lambda - j(j+1)]}{(n!)^2} \quad (3.10)$$

であることは，数学的帰納法により簡単に証明できる⁴．従って，

$$f(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{n-1} [\lambda - j(j+1)]}{(n!)^2} X^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{n-1} (-\nu + j)(\nu + j + 1)}{(n!)^2} (-X)^n \quad (3.11)$$

² $n = 0$ のとき $I_0(x, z) = \log(1+X)$ で，これが $f(x, z)$ の λ^1 次の項である．

³右辺で n を k と書き換え，あらためて $k+j+1 = n$ とおく．

⁴帰納法の仮定を使えば， c_{n+1} が直ちに c_n で書ける．

となる．これは，(1.5) の展開式に他ならない．□

漸化式によらない方法も可能である．(3.7) の右辺は

$$\int_0^X dX' \frac{\int_0^{X'} dX'' X''^m}{X'(1+X')} \quad (3.12)$$

と書けるから，元の積分方程式 (1.1) は，

$$f(X) = 1 + \lambda \int_0^X dX' \frac{\int_0^{X'} dX'' f(X'')}{X'(1+X')} \quad (3.13)$$

に還元することになる．これを微分方程式に書き直すと，

$$X(1+X)f''(X) + (1+2X)f'(X) - \lambda f(X) = 0 \quad (3.14)$$

という超幾何微分方程式になる．(3.14) を初期条件 $f(0) = 1$, $f'(0) = \lambda$ のもとに解けば，

$$f(X) = F(-\nu, \nu + 1; 1; -X) \quad (3.15)$$

が得られる．

(1.1) という積分方程式は，2変数が X という自明でない特別な塊を作るという，非常に面白い性質を持っているわけである．このような例は他に知られているのだろうか．

1.4 原論文の概要

以上で述べた積分方程式は，1964年の論文⁵で考察したものである．

この論文の目的は，場の量子論的なモデルにおいて交差チャンネル (t チャンネルという) のレッジエの振る舞いを詳しく分析することであった．場の量子論で散乱振幅を計算するのは，通常ファインマン・グラフに対応するファインマン振幅を計算すればよいのだが，有限個のファインマン・グラフを勘定したのでは，レッジエの振る舞いは出せない．そこで考えたのは，いわゆる梯子モデルのベーテ・サルピーター方程式である．

一番簡単なモデルとして，等質量 m をもつ2つのスカラー粒子が，質量ゼロのスカラー粒子を何度も交換する状況を考える．系の全4次元運動量を P_μ (定数)，相対4次元運動量を p_μ (変数) とし， $(\frac{1}{2}P + p)^2 = v$, $(\frac{1}{2}P - p)^2 = w$ と書く．このとき梯子型のファインマン・グラフの総和 $F(p_\mu)$ は次の積分方程式を満たす⁶．

$$(m^2 - v)(m^2 - w)F(p_\mu) = \frac{1}{\mu^2 - (p - q)^2 - i0} + \frac{\lambda}{\pi^2 i} \int d^4 p' \frac{F(p'_\mu)}{-(p - p')^2 - i0}. \quad (4.1)$$

ここに， μ は赤外発散を避けるために梯子の第1段目だけに導入した質量， q_μ は $(\frac{1}{2}P + q)^2 = (\frac{1}{2}P - q)^2 = m^2$ を満たす定数4次元運動量， λ は結合定数から決まる任意パラメーターである．(4.1) を逐次近似で解くと λ の冪級数になるが，その収束半径の外へ解析接続することが重要である．

(4.1) は4変数の積分方程式であるが，ローレンツ不変性により， $F(p_\mu)$ は3変数 v, w 及び $t = (p - q)^2$ の関数 $F(v, w, t)$ になること分かる．さらにファインマン積分の一般論 (及びモデルの特殊性) から，それは次の積分表示ができること分かる．

$$F(v, w, t) = \int_0^1 dy (1 - y) \int_{-1}^1 dz \frac{\varphi(y, z)}{\{(1 - y)[\frac{1}{2}(1 + z)(m^2 - v) + \frac{1}{2}(1 - z)(m^2 - w)] + y(\mu^2 - t) - i0\}^3}. \quad (4.2)$$

⁵N. Nakanishi, Asymptotic Behavior of the Scattering Amplitude and Normal and Abnormal Solutions of the Bethe-Salpeter Equation, Phys. Rev. **135** (1964), B1430.

⁶ $-i0$ は無限小虚部で，ミンコフスキー計量のため生ずる特異点避ける積分路の取り方を指示する．

(4.2) を (4.1) に代入して 4 次元運動量に関する積分を遂行すると、ウェイト関数 $\varphi(y, z)$ に関する 2 変数の積分方程式が得られる。変数変換 $y = (1+x)^{-1}$ を行い、 $\varphi(y, z) \equiv \psi(x, z)$ とすると、それは

$$\psi(x, z) = 1 + \frac{1}{2}\lambda \int_{-1}^1 dz' \int_0^{xR(z, z')} dx' \frac{x'}{(1+x')\mu^2 + x'^2[m^2 - \frac{1}{4}(1-z^2)s]} \psi(x', z') \quad (4.3)$$

という積分方程式になる。ただし、 $s = P^2$ である。

ここで特に $s = 0$ ⁷、 $\mu = 2m$ の場合を考える。このとき (4.3) の積分核の分母は $(2+x')^2$ となる (因子 m^{-2} は λ の定義に吸収した)。最初に掲げた積分方程式 (1.1) は、ここで $\psi(2x, z) \equiv f(x, z)$ としたものに他ならない。

原論文では、 X のようなものの存在は予め分からないから、

$$\psi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z) x^n \quad (4.4)$$

と展開した。ただし、 $a_0(z) = 1$ 、 $a_1(z) = 0$ である。これを積分方程式に代入して逐次 $a_2(z)$ 以下を計算していくと、その結果は幸いあまり複雑ではないので、その一般形が推定できるオーダーまで計算が可能である。一般項は

$$a_{n+2}(z) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^n (n-k)! \prod_{j=0}^k [\lambda - j(j+1)]}{2^{n+2k+4} [(k+1)!]^2 k! (n-2k)!} (1-z^2)^{k+1} \quad (n \geq 0) \quad (4.5)$$

であると考えられる。しかし、(4.5) をきちんと証明するのは、さまざまな技巧を用いた複雑な計算が必要だった。さて、(4.5) を (4.4) に代入して、和の順序を入れ替えると、

$$\psi(x, z) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_k(x) \prod_{j=0}^k [\lambda - j(j+1)]}{2^{2k+2} [(k+1)!]^2} (1-z^2)^{k+1} \quad (4.6)$$

となる。ただし、

$$h_k(x) \equiv \sum_{n=2k}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-k)!}{k! (n-2k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2} = \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-k-1} \quad (4.7)$$

である。これを (4.6) に代入して、あらためて $k+1 = n$ と書くと、

$$\psi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{n-1} [\lambda - j(j+1)]}{(n!)^2} \left[\frac{x^2(1-z^2)}{8(2+x)} \right]^n \quad (4.8)$$

が得られる。これは (1.5) のように、超幾何関数で書ける。

論文の目的は、 $F(v, w, t)$ の $t \rightarrow \infty$ での漸近展開を調べることである。(4.2) から分かるように、 $t \rightarrow \infty$ における挙動は $y \rightarrow 0$ における挙動で決まる。つまり $x \rightarrow \infty$ における挙動で決まる。それを見るには、超幾何関数を変数の逆数の超幾何関数の一次結合で表す変換公式を利用すればよい。その結果は、

$$F(v, w, t) \sim F_0(v, w)(-t)^{\nu-1} + F_1(v, w)(-t)^{\nu-2} + F_2(v, w)(-t)^{\nu-3} + \dots \quad (4.9)$$

のようになる。ここに、 $F_j(v, w)$ ($j = 0, 1, 2$) の具体的な式が計算された。 ν はもちろん (1.6) で定義したものである。⁸

⁷ $s = 0$ は P_μ が光錐的な場合であって、 $P_\mu = 0$ とは異なる。後者の場合は、 $v = w$ で 1 変数の積分方程式に帰着し、超幾何微分方程式に変換できてすぐに解ける。

⁸ 参考のために述べておくと、角運動量量子数 l は本来は整数であるが、レッジェ理論ではそれを複素数に解析接続する。主たるレッジェ軌跡を $l = \alpha(s)$ とすると、(4.9) は $\alpha(0) = \nu - 1$ であることを示している。 $F_j(v, w)$ は束縛状態のベテ・サルピーター振幅に対応するものだが、ベテ・サルピーター方程式の「異常解」(非相対論近似でシュレディンガーの波動関数に対応しない解) がどのように影響するかを調べたのである。

樹木ファインマン・グラフの双対変換とその表現

中西 襄 (京都大学名誉教授)

2.1 円順列ファインマン・グラフ

ここで考える話は、 ϕ^3 理論に現れる樹木 (tree) ファインマン・グラフに関する話題である。ファインマン・グラフはグラフ理論におけるグラフとは少し異なる。グラフ理論の線は必ず両端点を持つが、ファインマン・グラフではそのような線は内線と呼び、1 端点しか持たない外線と呼ばれるものも考える (連結グラフだけを考えるので、端点を全く持たない線は考えないことにする。) ϕ^3 理論に現れるファインマン・グラフは、どの頂点もすべて 3 本の線の端点になっているので齊次グラフと呼ばれるものに似ているが、外線もカウントするので外線を無視すると齊次グラフにはならない。

樹木とは、ループを含まない連結グラフである。すなわち、どの 2 頂点に対してもそれらを結ぶパスがただ 1 つあるようなグラフである。 ϕ^3 理論の樹木ファインマン・グラフでは、外線の数を n ($n \geq 3$) とすると、その内線の数は $n - 3$ であることが数学的帰納法によりすぐに示される ($n = 3$ のとき内線はなく、外線を 1 本付け加えると内線も 1 本増える)。

樹木は必ず線のクロスなしに平面上に描くことができる。樹木ファインマン・グラフでは、外線は無限遠にまで延びている線として描くものとする。もちろんその描き方は一通りではない。異なる描き方の数は、円順列の数

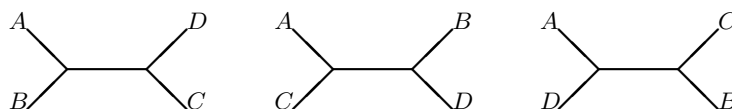
$$N_V(n) = \frac{1}{2}(n-1)!$$

に等しい。ファインマン・グラフで外線の円順列の区別をしたことを特に強調したい場合、「円順列ファインマン・グラフ」と呼ぶことにしよう。もちろん円順列ファインマン・グラフの概念はループのあるグラフにも拡張できるが、今は関係ない。

n 本の外線を持つ樹木ファインマン・グラフの数は

$$N_T(n) = (2n-5)!! = \frac{(2n-4)!}{2^{n-2}(n-2)!}$$

で与えられる。ここに記号 !! は奇数のみの積を表す。例えば $n = 4$ のとき、次図のように $N_T(4) = 3$ である。



証明は数学的帰納法による。まず、 $N_T(3) = 1$ であることは明らかである。従って、 $N_T(n+1) = (2n-3)N_T(n)$ であることを示せばよい。 n 本の外線を持つ樹木ファインマン・グラフにおいて、その内線、外線のいずれかに新しい外線を添加すれば $n+1$ 本の外線を持つ樹木ファインマン・グラフが得られる。従って、その仕方の数は $(n-3) + n = 2n-3$ であるから、この漸化式が成り立つ。

特定の樹木ファインマン・グラフに対する円順列ファインマン・グラフの数は、

$$\mathfrak{N}_T(n) = 2^{n-3}$$

で与えられる。

証明はやはり数学的帰納法による。まず、 $\mathfrak{N}_T(3) = 1$ であることは明らかである。従って $\mathfrak{N}_T(n+1) = 2\mathfrak{N}_T(n)$ であることを示せばよい。このことは、平面上に新しく $n+1$ 番目の外線を描くとき元のグラフの線のどちらかの側に描くわけだから、描き方はつねに 2 通りであることから従う。

特定の円順列で実現できる樹木ファインマン・グラフの数を $\mathfrak{N}_V(n)$ と書くと、 n 本の外線を持つ樹木円順列ファインマン・グラフの総数は、2 通りの式 $N_V(n)\mathfrak{N}_V(n)$ と $N_T(n)\mathfrak{N}_T(n)$ で書けるから、両者は等しいはずである。すなわち

$$N_V(n)\mathfrak{N}_V(n) = N_T(n)\mathfrak{N}_T(n)$$

である。これに上で得た結果を代入すれば、

$$\mathfrak{N}_V(n) = \frac{(2n-4)!}{(n-1)!(n-2)!}$$

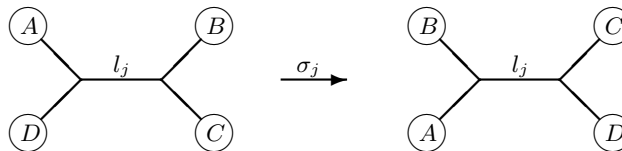
であることが分かる。

この $\mathfrak{N}_V(n)$ は、実は、凸 n 角形の 3 角形分割の仕方の数 T_n に等しい。その理由は次のようにして分かる。樹木ファインマン・グラフの双対図を考える。ここに双対図というのは、平面上に描かれたファインマン・グラフによってできる各領域内に 1 頂点を描き、2 領域が線で相接するとき対応する 2 頂点を線で結ぶことによって得られるグラフのことである。双対図では、外線に対応する線は n 角形（これを凸多角形にすることはいつでも可能である）の辺になっている。内線に対応するのはその対角線である。考えているファインマン・グラフの頂点には必ず 3 つの領域が集まっているから、双対図では対角線で 3 角形分割をしていることになる。相異なる樹木ファインマン・グラフは相異なる 3 角形分割に対応するから、樹木の数 $\mathfrak{N}_V(n)$ と 3 角形分割の仕方の数 T_n は等しい⁹。

2.2 双対変換

本節では、外線の円順列は特定のものに固定しておくものとする。内線を l_j ($j = 1, 2, \dots, n-3$) とする。内線が 1 つもないと困るので、以下 $n \geq 4$ とする。

まず双対変換を定義する。内線 l_j に隣る線は必ず 4 本であるが、その円順列を変えることなくその 4 本の接続の仕方を変えるのは、次の図で見られるように、ただ 1 通りである。この変換を内線 l_j に関する「双対変換」と呼び、 σ_j と書く。¹⁰



⁹ T_n は、凸多角形 $(a_1 a_2 \dots a_n)$ の 3 角形分割の仕方を $\Delta a_k a_{n-1} a_n$ ($k = 1, 2, \dots, n-2$) で分類することにより、漸化式 $T_n = \sum_{k=1}^{n-2} T_{k+1} T_{n-k}$ (ただし $T_2 = 1$) を満たすことが分かる。母関数を $T(x) \equiv \sum_{n=2}^{\infty} T_n x^n$ とすると、漸化式から $T^2(x) = xT(x) - x^3$ となり、これを解くと $T(x) = \frac{1}{2}x(1 - \sqrt{1-4x})$ が得られる。なお、面白いことに、 T_n はまた $N = n-2$ の「カタラン数」に等しいことが知られている。ただし、 N のカタラン数とは、 $N \times N$ 個の正方形から成る正方形格子において、主対角線よりも左下の点は一切通過しないで、一番左上の頂点から一番右下の頂点に行く長さ $2N$ のパスの数である。証明は両者の漸化式的一致から従う。

¹⁰双対変換は、双対図で考えれば、凸 n 多角形の 3 角形分割において 1 つの 4 角形の 3 角形分割の仕方を変えることに相当する。

さて、樹木の双対変換 σ_j はどのような性質をもっているであろうか。まず定義から明らかに、続けて2回行えば元に戻るから、

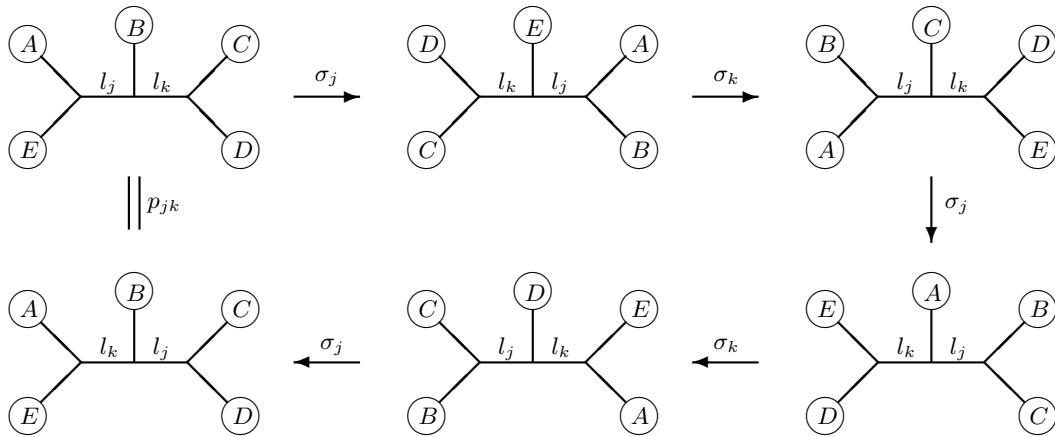
$$\sigma_j^2 = e$$

である。ただし、 e は恒等変換を表す。相異なる内線 l_j, l_k ($j \neq k$) については、もし両者が離れていれば両者の双対変換は可換である。すなわち、

$$\sigma_j \sigma_k = \sigma_k \sigma_j \quad \text{for } l_j \cap l_k = \emptyset$$

である。ただし、 $l_j \cap l_k$ は、 l_j と l_k が共有する頂点の集合を表すものとする。

2内線 l_j, l_k が相隣の場合、すなわち $l_j \cap l_k \neq \emptyset$ のときには、 σ_j と σ_k は非可換である。両者を交互に行うと下図ようになる（図はぐるぐる廻し、同じ形になるように戻して描いてある。）。



図から分かるように、5回目で同じ円順列ファインマン・グラフに戻るが、 l_j と l_k の位置が入れ替わっている。 l_j と l_k の入れ替えを $p_{jk}(=p_{kj})$ と書くと、

$$\sigma_j \sigma_k \sigma_j \sigma_k \sigma_j = p_{jk}$$

であることが分かる。この式で j と k を入れ替えると、右辺は不変だから

$$\sigma_j \sigma_k \sigma_j \sigma_k \sigma_j = \sigma_k \sigma_j \sigma_k \sigma_j \sigma_k$$

という関係式が成立するわけである。

$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-3}$ によって生成される群を「双対変換群」と呼び、 D_n と書くことにしよう。この群では内線を区別しているので、内線の対称群 S_{n-3} で割った商群 $V_n = D_n/S_{n-3}$ を考えると、その位数は $\mathfrak{N}_V(n)$ になる。この商群の要素を点で表し、1回の双対変換で互いに移れる要素を線で結ぶと1つの連結グラフができる。それは、 $n=4$ では1本の線、 $n=5$ では5角形、 $n \geq 6$ では4角形と5角形をパッチワークした $n-4$ 次元球面上のサッカーボール状¹¹の図形になる。

隣同士でなければ可換、すなわち隣同士のとみに限り非可換というとき、組み紐（ブレイド）群を思い出す人が多いであろう。1列に並んで上下に張られた何本かの紐があるとする。相隣る2本の紐の間隙を l_j 、その2本の紐を右に捻る操作を σ_j とすると、 σ_j と σ_k は、 $l_j \cap l_k = \emptyset$ ならば可換、 $l_j \cap l_k \neq \emptyset$ ならば非可換である。後者の場合、ヤン・パクスター型の関係式 $\sigma_j \sigma_k \sigma_j = \sigma_k \sigma_j \sigma_k$ が成立する。この関係式は双対変換群の場合に比べて簡単だが、組み紐の場合は右に捻ると左に捻るのが同じでないので、 $\sigma_j^2 = e$ が成立しない。このため組み紐群は一般に無限群である。なお、この対比から考えると、組み紐もたんに1列に並べるのではなく、任意の樹木の頂点に紐を配したものが、しぜんな拡張として考えられるように思う。このような組み紐群は考察されているのだろうか。

¹¹とは言っても、本物のサッカーボールは正5角形と正6角形のパッチワークだから少し違うが。

2.3 交差対称方程式とその解

円順列ファインマン・グラフの n 本の外線の集合を $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ とする. P_+ と P_- が, 円順列と矛盾しない, 共通部分を持たない A の 2 つの部分集合であるとき, A の分割 $P = (P_+, P_-)$ を「チャンネル」という. $P_+ = \{A_j, A_{j+1}, \dots, A_k\}$, $P_- = \{A_{k+1}, \dots, A_n, A_1, A_2, \dots, A_{j-1}\}$ なるとき, このチャンネルを $P_{j,k+1}$ と書くことにする. $P_{j,k+1} = P_{k+1,j}$ なので, 原則として小さい方の添え字を前に書く.

2 つのチャンネル P と \bar{P} が「交差する」とは, 4 つの集合 $P_+ \cap \bar{P}_+$, $P_+ \cap \bar{P}_-$, $P_- \cap \bar{P}_+$, $P_- \cap \bar{P}_-$ のどれもが空でないことをいう. $P_{j,k+1}$ と $P_{j',k'+1}$ は, $j < j' < k+1 < k'+1$ または $j' < j < k'+1 < k+1$ ならば交差する. P_+ と P_- のいずれか一方に属する外線の数が 0 または 1 のものは交差するチャンネルがないので, 以下考えないことにする. 交差するチャンネルが少なくとも 1 つある P の全体を, \mathcal{P} と書く. \mathcal{P} の要素の数は n 角形の対角線の数に等しく, $\frac{1}{2}n(n-3)$ である. また $P_{j,k+1} \in \mathcal{P}$ において, $2 \leq (k+1) - j \leq n-2$ である.

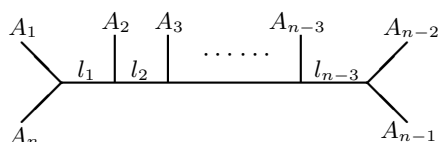
特定の円順列のもとで許されるすべてのチャンネル P に対し, 非負実変数 u_P を対応させる. これらの変数は,

$$u_P = 1 - \prod_{\bar{P}} u_{\bar{P}}$$

を満足するものとする. ただし, 積は P と交差するすべてのチャンネルにわたる. これを「交差対称方程式」と呼ぶ. 簡単のため, $u_{P_{j,k+1}}$ は, 添え字 P を省いて $u_{j,k+1}$ と記す.

交差対称方程式は $\frac{1}{2}n(n-3)$ 元連立非線形代数方程式なので, とても解けそうには思えないかもしれないが, じつは解は $n-3$ 個の任意パラメーター (実非負) の有理関数としてあらわに与えられるのである. その表式は, 樹木ファインマン・グラフ T を与えることに決まる. すなわち, $n-3$ 個のパラメーターは, T の内線によって特徴づけられるのである.

まず, 解の標準形について述べよう. これは T として「マルチペリフェラル・グラフ」を採った場合である. ここにマルチペリフェラル・グラフとは, 内線がすべて 1 直線上に並び, かつ円順列に矛盾することなくすべての外線をその一方側に描くことが可能なような樹木ファインマン・グラフをいう. 具体的に描けば, 次図およびその外線の名前を巡回的に廻したもの (合計 n 個) である.



樹木ファインマン・グラフ T の内線の 1 つを切断すると, T は 2 つの連結ファインマン・グラフに分かれる. それに応じて, 外線の集合 A も 2 つに分割される. たとえば上図において, 内線 l_j を切断すれば, A は $\{A_n, A_1, A_2, \dots, A_j\}$ と $\{A_{j+1}, A_{j+2}, \dots, A_{n-1}\}$ とに分けられる. 従って上図では, 内線 l_j はチャンネル $P_{j+1,n}$ に対応する. もちろん, この対応は T の選択に依存する. 一般に, どの 2 つの内線に対応する 2 つのチャンネルも交差することはない.

さて, 交差対称方程式の, 上図のマルチペリフェラル・グラフに対応する解を与えよう. 内線 l_j ($j = 1, 2, \dots, n-3$) に対応するチャンネル $P_{j+1,n}$ は互いに交差しないので, $u_{j+1,n}$ を独立なパラメーター v_j (許容範囲は $0 \leq v_j \leq 1$ である.) として選べる. すなわち,

$$u_{j+1,n} = v_j \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, n-3$$

と置く. このとき, それ以外の変数 $u_{j,k+1}$ ($j+2 \leq k+1 \leq n-1$) の一般形は, 次の式で与えられることが知られている.

$$u_{j,k+1} = \frac{\left(1 - \prod_{i=j}^{k-1} v_i\right) \left(1 - \prod_{i=j-1}^k v_i\right)}{\left(1 - \prod_{i=j-1}^{k-1} v_i\right) \left(1 - \prod_{i=j}^k v_i\right)} \quad \text{with } v_0 \equiv v_{n-2} \equiv 0.$$

注意すべきは付帯条件式で，これにより $j = 1$ のとき分子の第 2 因子と分母の第 1 因子が 1, $k + 1 = n - 1$ のとき分子の第 2 因子と分母の第 2 因子が 1 になる．

分かりにくいかも知れないので，具体例を示しておこう．

$n = 4$ のとき：

$$\begin{aligned} u_{24} &= v_1 = 1 - u_{13}, \\ u_{13} &= 1 - v_1 = 1 - u_{24}. \end{aligned}$$

$n = 5$ のとき：

$$\begin{aligned} u_{25} &= v_1 = 1 - u_{13}u_{14}, \\ u_{35} &= v_2 = 1 - u_{14}u_{24}, \\ u_{14} &= 1 - v_1v_2 = 1 - u_{25}u_{35}, \\ u_{13} &= \frac{1 - v_1}{1 - v_1v_2} = 1 - u_{24}u_{25}, \\ u_{24} &= \frac{1 - v_2}{1 - v_1v_2} = 1 - u_{13}u_{35}. \end{aligned}$$

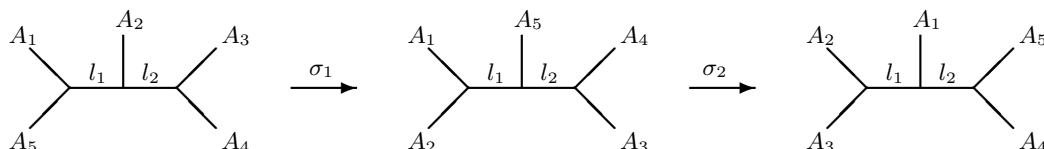
$n = 6$ のとき：

$$\begin{aligned} u_{26} &= v_1 = 1 - u_{13}u_{14}u_{15}, \\ u_{36} &= v_2 = 1 - u_{14}u_{15}u_{24}u_{25}, \\ u_{46} &= v_3 = 1 - u_{15}u_{25}u_{35}, \\ u_{15} &= 1 - v_1v_2v_3 = 1 - u_{26}u_{36}u_{46}, \\ u_{13} &= \frac{1 - v_1}{1 - v_1v_2} = 1 - u_{24}u_{25}u_{26}, \\ u_{35} &= \frac{1 - v_3}{1 - v_2v_3} = 1 - u_{14}u_{24}u_{46}, \\ u_{14} &= \frac{1 - v_1v_2}{1 - v_1v_2v_3} = 1 - u_{25}u_{26}u_{35}u_{36}, \\ u_{25} &= \frac{1 - v_2v_3}{1 - v_1v_2v_3} = 1 - u_{13}u_{14}u_{36}u_{46}, \\ u_{24} &= \frac{(1 - v_2)(1 - v_1v_2v_3)}{(1 - v_1v_2)(1 - v_2v_3)} = 1 - u_{13}u_{35}u_{36}. \end{aligned}$$

2.4 双対変換の表現

前節では交差対称方程式の解 u_P をマルチペリフェラル・グラフに基づいて構成したが，どんな樹木グラフに基づいて構成することも可能である．それには，双対変換を u_P に対する変換によって表現すればよい．これは一般に，パラメーターの或る双有理変換として表される．

その様子を見るために，まず $n = 5$ の場合の双対変換の表現を考察しよう．次図は双対変換 σ_1 をやり，さらに σ_2 をやった円順列ファインマン・グラフである．中央の図は比較がし易いように裏返してある．



内線 l_1 に対する双対変換 σ_1 に対応して，パラメーターは

$$v'_1 = \frac{1 - v_1}{1 - v_1v_2}, \quad v'_2 = v_2$$

のように変換される．もちろん， $(\sigma_1)^{-1} = \sigma_1$ に対応して，逆変換も同じ形である．前節の $n = 5$ の u_P の式に代入すると，

$$\begin{aligned} u'_{13} &= v'_1 = \frac{1 - v_1}{1 - v_1 v_2} = u_{13}, \\ u'_{35} &= v'_2 = v_2 = u_{35}, \\ u'_{24} &= 1 - v'_1 v'_2 = \frac{1 - v_2}{1 - v_1 v_2} = u_{24}, \\ u'_{25} &= \frac{1 - v'_1}{1 - v'_1 v'_2} = v_1 = u_{25}, \\ u'_{14} &= \frac{1 - v'_2}{1 - v'_1 v'_2} = 1 - v_1 v_2 = u_{14} \end{aligned}$$

となる．ここに $u'_{j,k+1}$ は，中央の図に関する番号付けである．確かに $u'_P = u_P$ となっていて， u_P を不変量としていることが分かる．

これにさらに内線 l_2 に対する双対変換 σ_2 ，すなわち

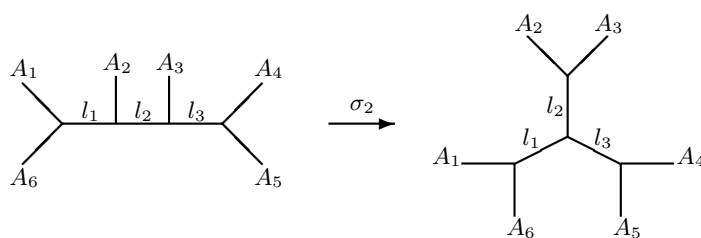
$$v''_1 = v'_1, \quad v''_2 = \frac{1 - v'_2}{1 - v'_1 v'_2}$$

を行うと，

$$\begin{aligned} u''_{13} &= v''_1 = v'_1 = u'_{13} = u_{13}, \\ u''_{14} &= v''_2 = \frac{1 - v'_2}{1 - v'_1 v'_2} = u'_{14} = u_{14}, \\ u''_{25} &= 1 - v''_1 v''_2 = \frac{1 - v'_1}{1 - v'_1 v'_2} = u'_{25} = u_{25}, \\ u''_{24} &= \frac{1 - v''_1}{1 - v''_1 v''_2} = 1 - v'_1 v'_2 = u'_{24} = u_{24}, \\ u''_{35} &= \frac{1 - v''_2}{1 - v''_1 v''_2} = v'_2 = u'_{35} = u_{35} \end{aligned}$$

となり，一番右の図に対する式が得られる．このように，変換は次々に合成できる．すなわち双対変換の表現を与えている．

上の場合，双対変換を決める内線の隣の線は内線 1 本，外線 3 本であった． $n = 6$ の場合は，隣の線が内線 2 本，外線 2 本の内線が現れる．この内線について双対変換を施すと，次のように内点のあるグラフが現れる．



このような場合，双対変換は，それを指定する内線のパラメーターの変数を変換するだけではだめで，隣の内線のパラメーターも変換しなければならない．都合上，新しいパラメーターを v' ではなく x を用いて書くことにする．上の図の双対変換 σ_2 は次のように表現される．

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{v_1(1 - v_2 v_3)}{1 - v_3}, \\ x_2 &= \frac{1 - v_2}{(1 - v_1 v_2)(1 - v_2 v_3)}, \\ x_3 &= \frac{v_3(1 - v_1 v_2)}{1 - v_1}. \end{aligned}$$

あるいは逆に解くと,

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{x_1(1-x_2x_3)}{1-x_1x_2x_3}, \\ v_2 &= \frac{(1-x_2)(1-x_1x_2x_3)}{(1-x_2x_3)(1-x_1x_2)}, \\ v_3 &= \frac{x_3(1-x_1x_2)}{1-x_1x_2x_3} \end{aligned}$$

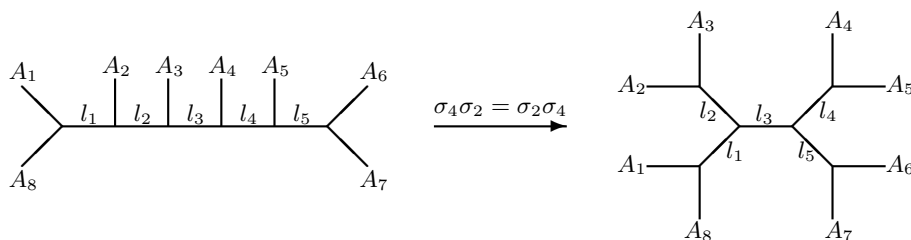
である．逆変換が同形でないのは， σ_2 で移るグラフが同形でないからである．添え字 3 の変数を 0 と置くと， $n = 5$ のときの変数変換式を再生する．つまり外線の変数は 0 と思えば，確かに前の式の拡張になっている．なお，パラメーターの許容領域である単位立方体 $\{0 \leq v_j \leq 1 \ (j = 1, 2, 3)\}$ は， x_j のについては単位立方体を含む曲面で囲まれた領域になる．

この変換式を $n = 6$ のマルチペリフェラル・グラフの u_P の式に代入すれば，

$$\begin{aligned} u_{26} &= \frac{x_1(1-x_2x_3)}{1-x_1x_2x_3}, \\ u_{24} &= \frac{x_2(1-x_3x_1)}{1-x_1x_2x_3}, \\ u_{46} &= \frac{x_3(1-x_1x_2)}{1-x_1x_2x_3}, \\ u_{13} &= \frac{1-x_1x_2}{1-x_1x_2x_3}, \\ u_{35} &= \frac{1-x_2x_3}{1-x_1x_2x_3}, \\ u_{15} &= \frac{1-x_3x_1}{1-x_1x_2x_3}, \\ u_{14} &= \frac{(1-x_1)(1-x_1x_2x_3)}{(1-x_1x_2)(1-x_3x_1)}, \\ u_{36} &= \frac{(1-x_2)(1-x_1x_2x_3)}{(1-x_2x_3)(1-x_1x_2)}, \\ u_{25} &= \frac{(1-x_3)(1-x_1x_2x_3)}{(1-x_3x_1)(1-x_2x_3)} \end{aligned}$$

を得る．この式は確かにグラフの回転対称性 $l_1 \mapsto l_2 \mapsto l_3 \mapsto l_1$; $A_1 \mapsto A_3 \mapsto A_5 \mapsto A_1$, $A_2 \mapsto A_4 \mapsto A_6 \mapsto A_2$ に対する不変性を反映している．

さらに，隣接する 4 本の線がすべて内線であるような内線を含む場合として，次の $n = 8$ の樹木グラフを考えよう．これはマルチペリフェラル・グラフから双対変換 σ_2 と σ_4 とを続けて行うことによって得られる．これらは可換なので，作用させる順序にはよらない．



l_2 に関する双対変換と l_4 に関する双対変換との組み合わせだから、

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{x_1(1-x_2x'_3)}{1-x_1x_2x'_3}, \\ v_2 &= \frac{(1-x_2)(1-x_1x_2x'_3)}{(1-x_2x'_3)(1-x_1x_2)}, \\ v_3 &= \frac{x'_3(1-x_1x_2)}{1-x_1x_2x'_3} = \frac{x''_3(1-x_4x_5)}{1-x_4x_5x''_3}, \\ v_4 &= \frac{(1-x_4)(1-x_4x_5x''_3)}{(1-x_4x''_3)(1-x_4x_5)}, \\ v_5 &= \frac{x_5(1-x_4x''_3)}{1-x_4x_5x''_3} \end{aligned}$$

となると考えられる。しかし、 v_3 の式が 2 通りになるので、 $x'_3 = x''_3 = x_3$ とすることはできない。等式を成立させるには、

$$\begin{aligned} x'_3 &= \frac{x_3(1-x_4x_5)}{1-x_4x_5x_3}, \\ x''_3 &= \frac{x_3(1-x_1x_2)}{1-x_1x_2x_3} \end{aligned}$$

と置けばよい。実際、

$$\frac{x'_3(1-x_1x_2)}{1-x_1x_2x'_3} = \frac{x_3(1-x_1x_2)(1-x_4x_5)}{1-x_1x_2x_3-x_3x_4x_5+x_1x_2x_3x_4x_5} = \frac{x''_3(1-x_4x_5)}{1-x_4x_5x''_3}$$

である。これが σ_2 と σ_4 の可換性を表現する等式である。

この式を $n=8$ のマルチペリフェラル・グラフの u_P の表式に代入すれば、

$$\begin{aligned} u_{l(1)} &= u_{28} = \frac{x_1(1-x_2x'_3)}{1-x_1x_2x'_3}, \\ u_{l(2)} &= u_{24} = \frac{x_2(1-x_1x'_3)}{1-x_1x_2x'_3}, \\ u_{l(3)} &= u_{48} = \frac{x'_3(1-x_1x_2)}{1-x_1x_2x'_3} = \frac{x''_3(1-x_4x_5)}{1-x_4x_5x''_3}, \\ u_{l(4)} &= u_{46} = \frac{x_4(1-x_5x''_3)}{1-x_4x_5x''_3}, \\ u_{l(5)} &= u_{68} = \frac{x_5(1-x_4x''_3)}{1-x_4x_5x''_3} \end{aligned}$$

を得る。ただし簡単のため、内線 l_j に対応する変数 u_P ($u_{l(j)}$ と略記) のみを書いた。興味のある方は、それ以外の 15 個についても計算し、このグラフの裏返し対称性 ($\{A_8, A_1, A_2, A_3; l_1, l_2\}$ と $\{A_7, A_6, A_5, A_4; l_5, l_4\}$ の入れ替え、 $\{A_2, A_3, A_4, A_5; l_2, l_4\}$ と $\{A_1, A_8, A_7, A_6; l_1, l_5\}$ の入れ替え) とコンシステントであることを確かめられたい。¹²

ここまで来れば、 $n-3$ 本の内線を持つ任意の樹木ファインマン・グラフ T の任意の内線 l_j に対応する変数 $u_{l(j)}$ を、パラメーター x_1, \dots, x_{n-3} でどのように表せばよいか分かる。

まず、樹木ではすべての頂点を、同類の頂点が相隣らないように 2 種類に分類することが可能であることに注意する。これらをダッシュ類、ダブル・ダッシュ類と呼ぶことにしよう。このとき、任意の内線 l_j の両端点は、ダッシュ類の頂点とダブル・ダッシュ類の頂点である。そのダッシュ類頂点を端点とする 2 つの線を l_p, l_q ,

¹²裏返し操作を R と書くと、 $u_{j,k+1}$ の裏返しは、 $u_{R(j),R(k+1)}$ ではなく、 $u_{R(k),R(j)+1}$ であることに注意。

そのダブル・ダッシュ類頂点を端点とする2つの線を l_r, l_s と書こう。ただしこれらの線は内線とは限らない。 l_k (k は j, p, q, r, s を代表) が外線の場合は, 対応するパラメーターは $x_k \equiv 0$ とする。このとき, 内線 l_j に対応するチャンネルの変数 $u_{l(j)}$ は, 次のように2つの同等なパラメーター表示がなされる。

$$u_{l(j)} = \frac{x'_j(1 - x'_p x'_q)}{1 - x'_p x'_q x'_j} = \frac{x''_j(1 - x''_r x''_s)}{1 - x''_r x''_s x''_j},$$

ここに, x'_k は l_k のダッシュ類の端点, x''_k は l_k のダブル・ダッシュ類の端点に対応する変数である。 l_j について, これらは

$$x'_j = \frac{x_j(1 - x''_r x''_s)}{1 - x''_r x''_s x_j},$$

$$x''_j = \frac{x_j(1 - x'_p x'_q)}{1 - x'_p x'_q x_j}$$

であって, 逐次 (外線に対する変数は0になるから) 定義されることになる。実際, もし l_p が外線だったとすると, $x'_p = 0$ であるから,

$$u_{l(j)} = x'_j = \frac{x_j(1 - x''_r x''_s)}{1 - x''_r x''_s x_j}$$

となる。さらに l_r も外線だったならば, すなわち l_j の両隣に外線があるならば,

$$u_{l(j)} = x_j$$

に還元する。マルチペリフェラル・グラフではすべての内線の両隣に外線があるので, すべての j についてこれが成立していたわけである。

上記の表式を用いて次のことが証明される。

任意の樹木の円順列ファインマン・グラフ T は, 双対変換を繰り返すことによってつねにある (同じ円順列の) マルチペリフェラル・グラフに帰着させられる。そして, その双対変換の積の表現である x_1, \dots, x_{n-3} から v_1, \dots, v_{n-3} へのパラメーターの変換は, 双有理変換である。

証明は n に関する数学的帰納法を用いるが, かなり長いのでここでは述べない。

なお, この結果から次のことが分かる。同じ円順列の任意の2つの樹木ファインマン・グラフを結ぶ変換の表現も, 双有理変換である。また, トポロジカルな対称性を持つ円順列ファインマン・グラフに対する u_P の表式は, 同じ対称性を持つ。なぜなら, 円順列ファインマン・グラフにおける番号の置換がマルチペリフェラル・グラフからの変換式における番号の置換で表現されるからである。

2.5 歴史的背景

以上は, 私が40年前に双対共鳴模型に関連して行った研究 [1]-[4] の一部分を, 双対変換の表現という視点から見直して, 平易に解説したものである。

よく知られているように, 双対共鳴模型は1968年にヴェネチアーノ [5] が直線状レッジェ軌跡¹³を実現する簡単なモデルとして, まず4点関数について提起したもので, 次のベータ関数の積分で表されていた。すなわち, 円順列 $\{1, 2, 3, 4\}$ に対する4点ヴェネチアーノ振幅は,

$$V_4 = \int_0^1 dv v^{-\alpha(s_{13})-1} (1-v)^{-\alpha(s_{24})-1}$$

¹³角運動量 l を複素数に解析接続したときの部分波散乱振幅の l に関するポールを, レッジェ・ポールという。レッジェ・ポールの位置は, 他の変数の関数になるので, レッジェ軌跡と呼ばれる。

で与えられる．ここに，レッジエ軌跡 $\alpha(s)$ は s の 1 次関数 $\alpha' \cdot (s - m^2)$ で¹⁴， $s_{j,k+1}$ はチャンネル $P_{j,k+1}$ の 4 次元運動量のローレンツ不変な自乗 $(p_j + \dots + p_k)^2$ を表す．

ヴェネチアーノ振幅はただちに 5 点以上にも拡張された．円順列 $\{1, 2, \dots, n\}$ に対する n 点ヴェネチアーノ振幅は，3 節に述べた交差対称方程式のマルチペリフェラル・グラフに基づく解 u_P を用いて，次のように表される [6]．

$$V_n = \int_0^1 dv_1 \cdots \int_0^1 dv_{n-3} \rho \prod_{P \in \mathcal{P}} u_P^{-\alpha(s_P)-1}.$$

ただし， $\rho = \prod_{1 \leq j < k \leq n-2} u_{j,k+1}^{-k+j+1}$ は円順列不変測度である．これをヴェネチアーノ振幅の標準表示という．

この式はマルチペリフェラル・グラフという特別なグラフに立脚していて，理論上の取扱いには不便である． ϕ 粒子をクォークと反クォークの複合粒子と考えて各内線を 2 重線 (互いに逆向きの矢線) に置きなおすと，任意の樹木円順列ファインマン・グラフはトポロジカルに円に変形される．パラメーターを 3 個増して，複素平面の円上の n 点に対応する n 個の複素パラメーター z_j ($j = 1, 2, \dots, n$) を導入すると， u_P はすべて 4 点 z_p, z_q, z_r, z_s の複比で書けることが，木庭・ニールセンによって示された [7]．木庭・ニールセン表示は， $z_1 = 0, z_{j+1}/z_{j+2} = v_j$ ($j = 1, 2, \dots, n-3$), $z_{n-1} = 1, z_n = \infty$ と置けば，標準表示に帰着する．

話をヴェネチアーノ振幅の標準形に戻そう．この式は $1/\alpha(s_P)$ という形のポールを持つ．それは， $\alpha(s_P) = 0$ のとき， $v_j = 0$ と $v_j = 1$ のところで積分が発散するからである． $n-3$ 個のパラメーター積分から $n-3$ 個のポールの積が出るが，これはファインマン振幅のポール $1/(s_P - m^2)$ に対応する．しかし，1 つのヴェネチアーノ振幅に対応する円順列ファインマン・グラフの数は，1 節で与えた $\mathfrak{N}_V(n)$ であって，積分の端点の数から期待される 2^{n-3} とは， $n = 4$ 以外で異なる．これは $v_j = 1$ の近くでの被積分関数の構造が複雑になっているためである．私は，ヴェネチアーノ振幅の積分領域を $\mathfrak{N}_V(n)$ 個の部分領域に分割し，次のような「交差対称樹木分解定理」を証明することによって，この問題をすっきりさせることに成功した [3].¹⁵

n 点ヴェネチアーノ振幅 V_n は，樹木 T の円順列ファインマン・グラフに対応する振幅 V_T の和に分解される：

$$V_n = \sum_T V_T.$$

ここに， V_T はパラメーター x_j に関する $n-3$ 重積分で表され，その被積分関数は V_n の標準表示のそれから双有理変換 (双対変換の積の表現) によって得られる．またその積分領域は特異性が $x_j = 0$ のところからのみ現れるようなもので，出てくるポール構造は樹木 T の円順列ファインマン・グラフのそれと一致する． T に関する和は，この円順列で可能なすべての樹木ファインマン・グラフ T にわたる．なお，交差対称樹木分解定理は木庭・ニールセン表示を用いると被積分関数の変換が不要になるので，話がずっと簡単になる [4]．

1971 年シャークは，ゼロ・スローブ極限 ($\alpha' \rightarrow 0$) で，ヴェネチアーノ振幅 (ただし V_n に定数 $\lambda^{n-2} (\frac{1}{2}\alpha')^{n-3}$ を乗じたもの) は， ϕ^3 理論 (ラグランジアンにおける ϕ^3 項の係数は $\frac{1}{3!}\lambda$ とする) のファインマン振幅を再生することを指摘した [8]．しかし彼は，ヴェネチアーノ振幅の標準表示の特異性の取扱いを誤り，対応するファインマン振幅の数を正しい $\mathfrak{N}_V(n)$ ではなく， 2^{n-3} としていた．正しい証明は，上述の交差対称樹木分解定理から直ちに従う [9]．

なお，米谷はこの結果のループ・グラフへの拡張した [10]．彼は，彼が開発した振幅表示法を用いて，私の木庭・ニールセン表示による樹木分解定理をループ振幅にまで拡張することに成功したのである¹⁶．双対共鳴模型は弦理論として定式化されるが，弦理論でいえばゼロ・スローブ極限は弦長ゼロ極限に相当する．超弦理

¹⁴ α' はレッジエ・スローブ， m は ϕ 粒子の質量で，ともに定数．

¹⁵もちろん，たんにポールの構造を見るだけなら，このような精密な結果は不要である．

¹⁶米谷氏によるこの話の回想が，雑誌「パリティ」(2004 年 10 月号)にある．

論の弦長ゼロ極限が超重力理論になるという話は，この延長線上にある．

参考文献

- [1] N. Nakanishi, Phys. Rev. **D2** (1970), 288.
- [2] N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **45** (1971), 436.
- [3] N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **45** (1971), 451.
- [4] N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **45** (1971), 919.
- [5] G. Veneziano, Nuovo Cimento **57A** (1968), 190.
- [6] H.-M. Chan and S. T. Tsou, Phys. Letters **28B** (1969), 485.
- [7] Z. Koba and H. B. Nielsen, Nucl. Phys. **B12** (1969), 243.
- [8] J. Scherk, Nucl. Phys. **B31** (1971), 222.
- [9] N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **48** (1972), 355.
- [10] T. Yoneya, Prog. Theor. Phys. **48** (1972), 2044.

三角形の3頂点までの距離の和が最小となる点

岩崎 正春¹⁷ 新関 章三¹⁸

3.1 はじめに (問題の発端)

原子核を構成している陽子と中性子 (以後, 核子と呼ぶ) は, クォーク quark と呼ばれるより基本的粒子 3 個の複合粒子である. 一方, 核子を結びつけているパイ中間子はクォークと反クォーク対で作られている. 現在見つかっているクォークの複合系は上記の 3 クォーク系 (重粒子) かクォーク反クォーク系 (中間子) のみである. ハドロン弦模型によると, この様な構造をとる理由は次のように説明されている. 中間子はクォークの持つ色電荷からカラー電気力線が出て反色電荷をもつ反クォークに吸い込まれる. ただしこのとき, 電磁気学と違ってカラー電束はひも状に絞られる (図 1 (a)). この 1 次元状のカラー電束を「ひも」と呼ぶ. 核子の場

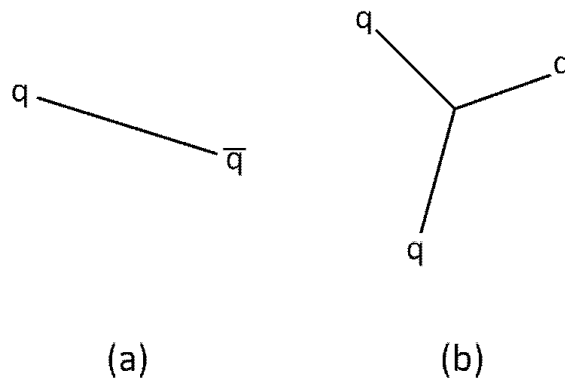


図 3.1: (a) 中間子 (b) 重粒子

合は, 3 個のクォークから出たカラー電束は空間のある特異点 (ジャンクションと呼ぶ) に吸い込まれると考えられている (図 1 (b)). 問題はこのとき「ジャンクションはいかなる位置にくるのか」である. ひものエネルギーがひもの長さに比例することに注意すると, ジャンクションはひもの全長が最小になる位置に来るのが自然である [1]. したがってこの場合, 次の幾何学上の問題が重要になってくる: 「三角形の 3 頂点までの距離の和が最小となる点はどこにあるか». これに対する詳細な議論を載せた文献¹⁹は案外見当たらないのでこの場を借りてこの問題に対する詳しい証明を報告する.

¹⁷高知大学名誉教授 (miwasaki@cure.ocn.ne.jp)

¹⁸高知大学名誉教授

¹⁹簡潔な証明は文献 [2] にある.

3.2 幾何学上の一定理

まずはじめに、我々がこの小論で証明したい定理を明確に述べると次のようになる。

定理： $\triangle ABC$ とその平面上の任意の点 P が与えられたとき、 P と 3 点 A, B, C 間の距離の和 $f(P) = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ を最小にする点 P は次のように与えられる。

- (1) $\angle A, \angle B, \angle C < 120^\circ$ のとき、 P は $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$ を満たす点である。²⁰
- (2) 一つの角度が 120° 以上の鈍角三角形のとき、 P は鈍角の頂点である。

この定理を以下で示すように 3 つの段階に分けて証明する。まずはじめに次の命題を示そう。

命題 1：上記の点 P は $\triangle ABC$ の内部かその辺上に存在する。

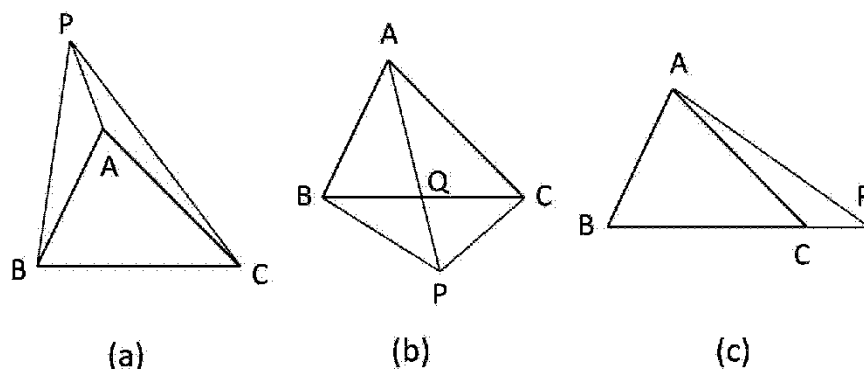


図 3.2: 点 P が三角形の外部にあるとき

[証明] $\triangle ABC$ の外部に任意の点 P をとる。このとき三角形と点 P の位置関係は、図 2 に描かれているように 3 つの場合がある（図の頂点 A は B でも C でも以下の議論は同じである）図 2 (a) の場合、よく知られた三角形の性質から $\overline{PB} + \overline{PC} > \overline{AB} + \overline{AC}$ より、 $f(P) > \overline{PB} + \overline{PC} > \overline{AB} + \overline{AC} = f(A)$ が成り立つ。図 2 (b) の場合は AP と BC の交点を Q とすると、 $f(P) = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} > \overline{PA} + \overline{BC} > \overline{QA} + \overline{BC} = f(Q)$ 。したがって $f(P) > f(Q)$ 。また図 2 (c) の場合は、 $f(P) > \overline{PA} + \overline{PB} = \overline{PA} + \overline{PC} + \overline{BC} > \overline{AC} + \overline{BC} = f(C)$ 。いずれの場合も外部の点 P が最小な点になることは不可能である。[証明終]

つぎに、3 頂点までの距離の和の関数 $f(P)$ の極値を求める。それに関しては次の命題が成り立つ。

命題 2：関数 $f(P)$ の極値は $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$ を満たす点であり、極小値である。また三角形の一つの角度が 120° 以上の鈍角三角形の場合は極値をもたない。

[証明] 図 3 のように平面座標を導入し、3 頂点の各座標を (x_i, y_i) ($i = 1, 2, 3$)、点 P の座標を (x, y) とする。このとき関数 $f(P)$ はつぎのように書かれる。

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^3 \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \equiv \sum_{i=1}^3 r_i$$

²⁰ 三角形の外側にそれぞれの辺を一辺とする正三角形をかくとき、3 つの正三角形の外接円が交わる点。

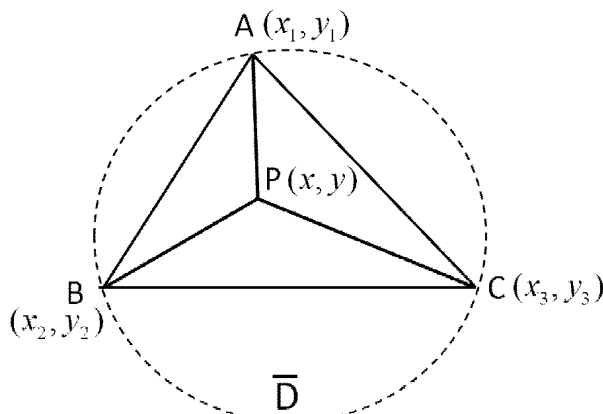


図 3.3: 各点の座標変数

この 2 変数関数の極値を微積分法で求めよう． $f(x, y)$ の偏導関数を計算すると，

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{i=1}^3 \frac{(x-x_i)}{r_i} \equiv \sum_{i=1}^3 (\vec{e}_i)_x \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \sum_{i=1}^3 \frac{(y-y_i)}{r_i} \equiv \sum_{i=1}^3 (\vec{e}_i)_y \end{cases}$$

となる．ここで単位ベクトル $\vec{e}_1 \equiv \overrightarrow{AP}/|\overrightarrow{AP}|$, $\vec{e}_2 \equiv \overrightarrow{BP}/|\overrightarrow{BP}|$, $\vec{e}_3 \equiv \overrightarrow{CP}/|\overrightarrow{CP}|$ を導入した．極値の条件は $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ であるから上の連立方程式を解いて次の解を得る．

$$\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = 0$$

この解から 3 つの単位ベクトル \vec{e}_i の間の角度について表すと，

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = -\frac{1}{2}$$

となり，すなわち $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$ を得る．

つぎに命題の後半部，この極値が極小になっていることを示そう．そのために $f(x, y)$ の 2 階偏導関数を計算する．

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{(y-y_i)^2}{r_i^3} \equiv \sum_{i=1}^3 \frac{\Delta y_i^2}{r_i^3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{(x-x_i)^2}{r_i^3} \equiv \sum_{i=1}^3 \frac{\Delta x_i^2}{r_i^3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\sum_{i=1}^3 \frac{(x-x_i)(y-y_i)}{r_i^3} \equiv -\sum_{i=1}^3 \frac{\Delta x_i \Delta y_i}{r_i^3} \end{cases}$$

極値が極小であるための条件は

$$D \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0$$

となることである．したがって右辺に上記の 2 階偏導関数を代入し，シュワルツの不等式を用いると，

$$D = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\Delta x_i}{r_i^{3/2}} \right)^2 \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\Delta y_i}{r_i^{3/2}} \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\Delta x_i \Delta y_i}{r_i^{3/2} r_i^{3/2}} \right)^2 \geq 0$$

となる．等号が成立するのは $\Delta y_i = c \Delta x_i$ ($i = 1, 2, 3$) (c はある定数) のときに限られる．この 3 つの式から変数 x, y を消去すると，ある定数を k として

$$\begin{cases} (y_1 - y_2) = k(x_1 - x_2) \\ (y_2 - y_3) = k(x_2 - x_3) \end{cases}$$

となる．これは3点 A,B,C が同一直線上に位置することを意味し題意に反するから $D > 0$ となる．すなわち我々の得た極値は極小点であることがわかる．また，三角形の一つの角度が 120° 以上の鈍角三角形ときは極値解をもたないことは自明であり，命題が証明された．[証明終]

以上得た2つの命題に基づいて我々の定理の証明にとりかかろう．

[定理の証明] 三角形 ABC の外接円を描き，外接円の内部および周上の点集合からなる閉領域を \bar{D} とする．最大値・最小値の定理（ワイエルシュトラス）[3] により， \bar{D} 上の連続関数 $f(x, y)$ はかならず最小値をもつ．最小値の可能性のある点は，A,B,C および命題2で求めた極値点 P のいずれかである．点 A,B,C 以外の外接円周上の点は命題1により排除されることに注意．以下において，定理にある2つの場合に分けてこれらの点での関数値の大小を議論する．

(1) この場合，極値点 P は三角形の内部に存在する．P から3頂点 A,B,C までの距離をそれぞれ a, b, c とおくと， $f(P) = a + b + c$ ．一方，たとえば $f(A)$ は余弦定理を使って次のように書ける．

$$f(A) = \sqrt{a^2 + b^2 + ab} + \sqrt{a^2 + c^2 + ac}$$

右辺の量は

$$\begin{aligned} f(A) &= \sqrt{\left(\frac{a}{2} + b\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)a^2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2} + c\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)a^2} \\ &> \left(\frac{a}{2} + b\right) + \left(\frac{a}{2} + c\right) = a + b + c = f(P) \end{aligned}$$

となるから，極小点 P が最小値を与える．

(2) 角度 A が 120° 以上の鈍角三角形のとき，命題2より極値は存在しない．したがって最大値・最小値の定理より3頂点 A,B,C での関数値を比較すればよい．平面幾何学の性質より $\angle A > \angle B, \angle C$ だから $\overline{BC} > \overline{AB}, \overline{AC}$ ．したがって $f(A) = \overline{AB} + \overline{AC} < f(B), f(C)$ より点 A が最小値を与える．[証明終]

最後に，この定理は3次元空間の中においても成り立つことを指摘しておこう．この場合，点 P から $\triangle ABC$ を含む平面へおろした垂線の足を H とすると，

$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} > \overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC}$$

となるから，3頂点までの距離の和が最小となる点は定理に述べられた点に帰着する．

3.3 終わりに（新ハドロン？）

終わりにもう一度ハドロン物理の問題に立ち返ろう．核子のジャンクションの位置がひもの長さが最小になる点である仮定する．核子全体の回転励起状態において3本の弦の中で1本の弦が長く伸びたとする．このとき残りの2つのクォークはたがいに接近してダイクォークを形成し，あたかもクォークとダイクォークが直線状に並んだ配位 $q \rightarrow (qq)$ となる．これはよく知られた重粒子のダイクォークモデルであり，励起状態の実験値をよく説明することが知られている [1]．もう一つの可能性として，クォーク3つが一直線上に並んだ状態

$$q \rightarrow Q \leftarrow q$$

も可能かもしれない．真ん中に位置するクォークは「クォーク+ジャンクション」の複合粒子という意味で大文字の「Q」と書いた．もちろん常識的にはこのような系は存在せず，おそらくどちらかのひもが切れてクォーク反クォーク対が生成され，中間子と核子に崩壊するだろう．しかしながら，もしジャンクションがグルオン

場のソリトンとして「実粒子」としてふるまうならば一つの可能性としてあり得るかもしれない。さらに想像（妄想？）をふくらませば多くの $Q\bar{Q}$ が直線状の並んだ

$$q \rightarrow Q \leftarrow \bar{Q} \rightarrow Q \leftarrow \bar{Q} \cdots \cdots Q \leftarrow q$$

とか，あるいはそれらがループ状に閉じたハドロンもあり得ないことはない。

参考文献

- [1] M. Iwasaki and F. Takagi, Phys. Rev. D77 (2008), 054020(1-6) およびその中の参考文献.
- [2] 溝畑茂, 「数学解析」(朝倉書店, 1985), 207.
- [3] 高木貞治, 「解析概論」(岩波書店, 1975), 27.

編集者への手紙とその返事

矢野忠様

cc: 中西襄様

数学・物理通信 2 号を拝受しました。貴重な通信をありがとうございます。

これらのファイルはメールで配布されているだけなのでしょうか？ せっかくの貴重なファイルですので、もう少し多くの人目に留まるように、恒久的なところに置かれているのでしょうか？ 既存の雑誌に投稿されるか、せめて web にアップロードして誰でも見れる状態にしておいていただいた方がよいと思います。

私の提案は、

- 1) 素粒子論研究電子版に投稿する。

<http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/sokened/sokendenshi/sokendenshi.htm>

素粒子論に限らない話題の記事を載せることに抵抗を感じられるかもしれませんが、他の記事も内容は素粒子論に限っておりません。置かせてもらう分にはかまわないのではないのでしょうか。他に適当な場所が見つければ素粒子論研究電子版は削除することもできます。

- 2) 「数学セミナー」か「理系への数学」に投稿する。

http://www.nippy.co.jp/magazine/maga_susemi.html

<http://www.gensu.co.jp/>

- 3) 自分で web page を立ち上げる。

といったところです。

いろいろお考えになられた結果、現在のような形をとられているのだらうと思いますが、公開と保存の方法は確保されているかという点だけ気がかりで、差し出がましいことを申しました。失礼しました。

谷村省吾

谷村省吾様

矢野 忠@松山です。先日はご丁寧なご提案を頂きありがとうございました。

どうしたものかと思案を致して決断がつかなかったのですが、中西先生のご了解も得られましたので、もしできましたら、先生の京都大学のホームページにリンクして掲載して頂けると幸いです。

もし何かの事情で先生または京都大学として都合が悪いということが起きた場合にはいつでもそのリンクを削除して頂いて結構です。

最終的には自分でホームページをもちたいというのは前にも申し上げましたが、忙しくてそれが当面できそうにもありません。

共同編集者の新聞先生にご了解を得てからと思って遅くなりました。よろしく願います。

つきましては再度第 1 号と第 2 号の PDF の原稿をお送りした方がよければ、ご連絡を頂けると幸いです。

編集後記

ここに第3号を発行する。今号にはもう常連の投稿者である，中西先生以外に元高知大学の二人の方々による投稿を頂いた。それで今回も3つの論文を載せることができた。投稿を頂いた方々には感謝を申し上げたい。こういう「ミニ通信」といえども投稿をしてくださる方のお陰で成り立っている。

また，2号の発行の後に谷村省吾（京都大学）さんからメールを頂いたので，それを編集者への手紙として載せさせて頂いた。この手紙の掲載をお認め頂いた谷村さんに感謝をしたい。谷村さんのご尽力でリンクを貼って頂いた箇所へは，「数学・物理通信」で検索をすれば，すぐにそのサイトへ到達することができる。

来号以降にも原稿の募集要領とか投稿規程を見て判断をして投稿をお願いしたい。また谷村さんのご指摘等により投稿規程の一部を削除または変更したことを申し添えておく（矢野 忠）

原稿の募集と投稿規定

原稿の募集

1. 雑誌の編集者と発行人

この「数学・物理通信」は新関章三（元高知大学）と矢野 忠（元愛媛大学）が編集および発行する、主にメールで配布する個人的な季刊の雑誌、もっと精確にはサーキュラーです（以後簡単のために「通信」という）。

2. 雑誌の目的

この通信はインフォーマルに数学や物理の情報を関心ある人に知らせる目的で発行されるものです。したがって、興味深くて、面白いと思われるもので、どこかに発表しておきたいこととか研究としては価値がないかもしれないが、教育上の意味があると考えられるような論文とかエッセイとかを発表することを目的とします。それで専門的でありすぎるものとか、もしオリジナリティを強く主張されたいような場合には適切な別の雑誌に投稿されるようにお願いします。この通信の程度は中学校以上の数学から大学程度の数学を使う数学や物理の話題を対象とします。投稿者は中学校、高校、大学の理数系の学生、教師、研究者や元教師、元研究者、研究所の研究者、会社の技術者その他これに準ずる方とします。

3. 編集の方針

この通信は投稿されたものをそのままの形で掲載します。したがって、内容の審査は行いませんが、もちろん公序良俗に反するものとか、理性に反するような内容とか数学や物理に関係しないことは掲載をお断りすることがあります。原稿に目次をつけられる場合にはページ数を号のページ数に合わせるために変更することはありかもしれません。しかし、文章の責任はすべて著者にあります。また、将来において著者がその投稿原稿を自分の著書等に再録することは自由ですが、再録した場合には初出を明記することをお願いします。一号のページ数は26ページを目途とします。原稿のページ数があまり多いようなら、何回かに分けて出すことをお願いします。投稿は1回当たりのページ数を10ページ前後でお願いをしたいと思います。短いのは半ページでも数行でもかまいません。

4. 発行の方針

発行は基本的に LaTeX で入稿されたものを集めてサーキュラーの形に編集して PDF にして出力してメールで配布します。もちろん少数のプリントアウトも原理的には発行できますが、これは例外とします。また原則として季刊としますが、編集発行人の都合によってはこの原則が変更になることがあります。

5. その他

基本的には自由であることを旨としますが、何か問題が起これば、その都度著者と相談をします。

投稿規定

1. 投稿先と原稿のフォーマット

Latex で A4paper の原稿と dvi のファイルを e-mail に添付書類として yanotad@earth.ocn.ne.jp の矢野忠宛てに送付する。タイトルはセンタリング, 所属, 氏名等はセンタリングまたは右寄せにしてください。上下の余白は 3cm, 左右は 2.5cm を原則としますが, 編集者の都合で変更されることがあります。図や表は本文の該当箇所に張り込んでください。またキャプションをつけてください。白黒印刷であることにご留意ください。

2. 投稿の受付と掲載決定

投稿を受付ければ受付けた旨のメールを確認のため送ります。もっともこれは原稿を受けつけたことの確認であって, そのまま掲載決定にはなりません。掲載ができないときはその後メールをします。特に掲載できない旨のメールが行かなければ, 掲載を認めたものとします。早く結果を知りたい場合は再度確認のメールを上記のメールアドレス宛に下さい。もっとも編集方針でも述べたように普通の良識的な論文やエッセイの場合には受付と同時にほぼ掲載決定とお考えください。

3. 発行時期

季刊で 3 月, 6 月, 9 月, 12 月を原則としますが, 編集者の都合によりその季節の中で前後することがあります。