

数学・物理通信

1 卷 5 号 2010 年 12 月

編集 新関章三・矢野 忠

2010 年 12 月 6 日

目次

4 色定理と場の量子論	2
1.1 4色定理	2
1.2 場の量子論における色	3
1.3 ファインマン・グラフの3色塗り分け問題	4
1.4 3色塗り分けできない非平面ファインマン・グラフ	6
1.5 ϕ^3 理論と $\phi_1\phi_2^2$ 理論	7
次元解析と数学者	9
2.1 次元解析	9
2.2 ある不等式	9
2.3 ファインマンの恒等式	11
ピタゴラスの定理の解析的証明	12
3.1 はじめに	12
3.2 ピタゴラスの定理の解析的証明	12
3.2.1 オイラーの公式による証明	12
3.2.2 三角関数の微分公式による証明	13
3.2.3 マクローリン展開による証明	13
3.3 解析学の諸定理とピタゴラスの定理の独立性	13
3.3.1 極限值公式の導出	13
3.3.2 三角関数の微分公式の導出	14
3.3.3 オイラーの公式の導出	16
3.4 解析的証明の意義	17
Gauss 積分の計算法	21
4.1 はじめに	21
4.2 記号と定義	21
4.3 計算への準備	22
4.4 Gauss 積分の計算	23
4.5 参考事項	24
編集後記	28

4色定理と場の量子論

中西 襄 (京都大学名誉教授)

1.1 4色定理

「平面上に国だけを描く任意の地図は、国境線で接するどの2国も異なる色に塗り分けるのに4色あれば足りる」といういわゆる「4色予想」もしくは「4色問題」は、100年以上にわたって悪名高き難問であった。しかし、1976年アップルとハーケンによって肯定的に解決され、現在は「4色定理」となった。証明に用いられた平面性は、 $[頂点の数] - [辺の数] + [面分の数] = 1$ というオイラーの定理と、「平面上に描かれた閉曲線はその平面を内部と外部に分かつ」というジョルダンの定理のみである。あとは数学的帰納法に基づき、より簡単な地図に還元していくという方針で証明がなされたわけだが、最終的に調べるべき地図が2000個近くにもなり、人力での解析は到底無理でコンピュータが証明を工夫したという、いわくつきの証明であった。

定理 (K. Appel and W. Haken) 平面上の任意の地図(面分の集合)は、4色で塗り分け可能である。すなわち、辺を共有する2つの面分は必ず相異なる色に対応するような、4色集合 $\{0, 1, 2, 3\}$ への写像が存在する。

4色でなく5色でよければ塗り分け可能という5色定理の証明は、非常に簡単である。どのみちお遊びのような定理だから、4色でも5色でもたいした違いではなかろうと思われるかもしれない。しかし、次の定理により、4色と5色では本質的に異なることが分かる。

定理 (P. G. Tait) 4色定理は次の命題と等価である。「橋をもたない、3次の斉次平面グラフの線は、3色で塗り分け可能である。すなわち、頂点を共有する2本の線は必ず相異なる色に対応するような、3色集合 $\{1, 2, 3\}$ への写像が存在する。」

ここに「橋」とは、それを切断すると連結グラフが非連結になるような線、「3次の斉次グラフ」とは、どの頂点も3本の線の端点になっているようなグラフ¹、「平面グラフ」とは、平面上に交差なしに描くことが可能なグラフである。この定理は、4色問題の比較的早い段階で、テートにより指摘されたものである。以下でこの定理を場の量子論に応用するので、証明の概略を述べておこう。

[証明] 4色定理で特に断らなかつたが、地図は連結なものに話を限っても同じことであるので、以下連結とする。各頂点に集まる辺の数 n に制限はないが、もし $n \geq 4$ ならば、その頂点を n 辺形に置き換えて得られる地図が4色塗り分け可能なら元の地図も4色塗り分け可能なるゆえ、すべての頂点に対し $n = 3$ であると仮定してもよい。そこで面分は無視し、辺をグラフの線と思うと、3次の斉次平面グラフが得られる。ただし、このグラフは橋を持たない。逆に、橋を持たない3次の斉次平面グラフから元の平面地図が復元できることは明らかであろう。

¹一般に、それを端点とする線の本数を、頂点の「次数」という。

さて、証明のキーは、4色 $\{0, 1, 2, 3\}$ について2進和を定義することである。ここに「2進和」 \oplus とは、数を2進法で表し桁上がりなしで和を定義するものである。今の場合、丁寧に書くと、 $0 \oplus j = j \oplus 0 = j$, $j \oplus j = 0$, $1 \oplus 2 = 2 \oplus 1 = 3$, $2 \oplus 3 = 3 \oplus 2 = 1$, $3 \oplus 1 = 1 \oplus 3 = 2$ となる。これは「クラインの4元群」とも呼ばれる可換群である。4色で塗り分けができていゝ $\forall n = 3$ の平面地図が与えられたとき、対応する3次の齊次平面グラフの各線の色を、その線を辺として持つ2つの面分の色を2進和で定義すると、3色 $\{1, 2, 3\}$ のみで線の塗り分けができる。実際、1つの頂点から出る2本の線が同じ色になることは起こりえない。

逆に $\{1, 2, 3\}$ の3色で塗り分けされた、橋がない3次の齊次平面グラフが与えられたとすると、対応する平面地図の各面分の色は、どこか1つの面分の色を0とし、順次隣の面分の色をすでに決められた面分の色と両面分の共有する辺の色との2進和で定義する。この定義が一意的であることは、任意の面分ループに沿って面分の色を2進和を作るとつねに0になることと同値であるが、後者の命題はループ内の頂点の個数に関する数学的帰納法を用いれば簡単に証明できる。この4色塗り分けで、明らかに相隣る2面分の色は異なる。□

1.2 場の量子論における色

場の量子論の共変的摂動論によれば、S行列はファインマン・グラフをファインマン規則に従って計算すれば求められる。自由場のラグランジアン密度はファインマン・プロパゲーターを、相互作用ラグランジアン密度はファインマン・グラフの頂点を決める。いくつかの素粒子の場が、自由場も相互作用も同じ形（対称群に関して不変）であるとき、これらの素粒子は「色」によって区別される。実際、量子色力学では各クォークとグルーオンは、それぞれ3色、8色を持つとされている。これらは相互作用の形が非常に制限されているので、以下ではもっと相互作用の形が自由に選べる色つきスカラー場の場合を考察する。考える問題は次の通りである。

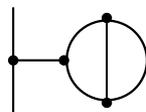
質量 m のスカラー場 ϕ に対する ϕ^3 理論の相互作用ラグランジアン密度は、

$$\frac{\lambda}{3!} : \phi^3 :$$

であるが²、その色つき理論として、相互作用ラグランジアン密度

$$\lambda \phi_1 \phi_2 \phi_3$$

を考える。問題は両方の理論のファインマン・グラフにどのような違いがあるかということである。後者の理論のファインマン・グラフは必ず前者の理論のファインマン・グラフとして現われるが、逆は必ずしもいえない。どの頂点に集まる3本の線も3色 $\{1, 2, 3\}$ で塗り分けできるようなファインマン・グラフしか後者の理論に現われないからである。3色で塗り分け不可能なファインマン・グラフで最も簡単な例は、次の「タドポール部分」(1本の線でグラフの残りとは繋がっているような部分)³を含むグラフである。



前節で述べた4色定理のテートのバージョンから次のことが証明される。

ϕ^3 理論の平面ファインマン・グラフが $\phi_1 \phi_2 \phi_3$ 理論においても現われるための必要十分条件は、それがタドポール部分を含まないことである。

証明は次節に与える。

² λ は相互作用定数で、 $:$ は正規積を表す。

³タドポールとはおたまじゃくしのことである。

1.3 ファインマン・グラフの3色塗り分け問題

グラフ理論のグラフに関する性質を，ファインマン・グラフに関する性質に翻訳する．

グラフ理論のグラフでは，どの線も必ず両端に頂点を持つ⁴．これに対し，ファインマン・グラフでは，一般に「外線」と呼ばれる端点をただ1つしか持たない線がある（連結グラフのみを考えているので，全く端点を持たない線は考えない）．これに対応して，両端点を持つ線は「内線」と呼ばれる．外線は無限遠まで伸びた半直線（まっすぐである必要はないが，「半曲線」という言葉がないので）で表されるものと想定する．ファインマン・グラフの平面性は，このような想定のもとで交差なしに平面上に描けることを意味する．

グラフ G の線の集合を L とする． L に属する各線を除去し，その両端点を同一視して得られるグラフを「縮約グラフ」と呼び， G/L と書く．明らかに， G が平面グラフならば G/L もそうである．

ファインマン・グラフ G の頂点の数を V_G ，内線の数を I_G ，外線の数を E_G とすれば， ϕ^3 理論では

$$3V_G = 2I_G + E_G$$

である． $E_G = 0, 1, 2, 3$ に応じて， G はそれぞれ「真空偏極グラフ」，「タドポール・グラフ」，「自己エネルギー・グラフ」，「ヴァーテックス・グラフ」と呼ばれる．

与えられたファインマン・グラフ G に対して2個の G を用意し，その $2E_G$ 本の外線を，対応するものをそれぞれ同一視して E_G 本の内線に置き換えて得られる真空偏極グラフを G^2 と書く．このとき，次の性質は両者で同等である．1. d 色で塗り分けできること．2. ϕ^3 理論のファインマン・グラフであること．3. 平面上に描けること．もちろん，真空偏極グラフはグラフ理論的グラフと同一視できる．

命題 1 3次の斉次グラフ G の線が3色で塗り分け可能であるための必要十分条件は，互いに共通部分を持たないループの集合 $\{C_1, C_2, \dots, C_s\}$ が存在して，どの C_j に属する線の数も偶数であり，かつ G のどの頂点も $\bigcup_{j=1}^s C_j$ に属するどれかの線の端点になっていることである．

[証明] G が3色 $\{1, 2, 3\}$ で塗り分けられているとする．色3の線をすべて消してできるグラフでは， G の各頂点が2本の線の端点で，2色 $\{1, 2\}$ で塗り分けられている．従ってそれは，偶数個の線より成るループの単純な合併である．逆に， G にそのようなループの合併があれば，ループは2色 $\{1, 2\}$ で塗り分け，それ以外の線の色3に塗れば，3色塗り分けができる．□

命題 2 ϕ^3 理論のタドポール・グラフ G の線は，3色で塗り分けることは不可能である．

[証明] 2個の G の外線を同一視して1本の内線に置き換えて得られる3次の斉次グラフ G^2 を考える． G が3色塗り分け可能ならば， G^2 もそうであるから，命題1に述べたループの集合が存在するはずである．両方の G 部分にまたがるループは存在しないから，ループの集合はそれぞれの部分で存在する．しかし1つのループに属する線の数はその頂点の数に等しいゆえ，それぞれの G 部分の頂点の総数は偶数でなければならない．ところが， $3V_G = 2I_G + 1$ により， V_G は奇数である．これは矛盾である．すなわち G の3色塗り分けはできない．□

なお，グラフ理論において d 次の斉次グラフの線は $d+1$ 色で塗り分け可能なことが知られているので，タドポール・グラフの線は4色で塗り分け可能である．

命題 3 ϕ^3 理論の自己エネルギー・グラフ G の線が3色で塗り分けられるための必要十分条件は，グラフ G^* の線が3色で塗り分けられることである．ここに G^* は， G の2本の外線を同一視して内線に置き換える

⁴ グラフ理論では通常「平行線」すなわち両端点を共有する線は無いとするが，今の場合この制限は不要である．また「ループ線」すなわち両端が同一の頂点であるような線は禁止されるが，ファインマン・グラフでもループ線は正規積をとることで禁止している．

ことによってできるグラフとする． G と G^* の平面性は一致する．

[証明] G^* が 3 色で塗り分けできれば， G も 3 色で塗り分けできるのは明らかである．逆命題の証明は， G が 3 色で塗り分けされたとき，必ず両方の外線は同色になっていることを示せばよい． G の 3 色塗り分けで 2 本の外線が異なる色であったとしよう．この 2 本の外線を，新たな頂点 a を端点とする 2 本の内線に置き換えて接続し，さらに a から出る新しい外線を付け加えてできるタドポール・グラフ G' を考える．新しい外線にはどちらの古い外線の色とも異なる色をあてがうと， G' は 3 色塗り分けができたことになる．他方，この G' は ϕ^3 理論のタドポール・グラフであるから，命題 2 により 3 色で塗り分けできないはずである．これは矛盾である．従って G の 2 本の外線は同色になっていなければならない．

平面性は， G^* が G^2 の縮約グラフであることから従う．□

命題 4 ϕ^3 理論のヴァーテックス・グラフ G の線が 3 色で塗り分けられるための必要十分条件は，グラフ G' の線が 3 色で塗り分けられることである．ここに G' は， G の 3 本の外線を，新たな頂点 a を端点とする 3 本の内線に置き換えて接続することによってできるグラフとする． G と G' の平面性は一致する．

[証明] G' が 3 色で塗り分けできれば， G も 3 色で塗り分けできるのは明らかである．逆命題の証明は， G が 3 色で塗り分けされたとき，必ず 3 本の外線はすべて異なる色になっていることを示せばよい． G の 3 色塗り分けで同色の外線があったとしよう．このとき，その 2 本の外線を同一視して 1 本の内線に置き換えて得られるタドポール・グラフも 3 色塗り分けができていないことになる．しかし命題 2 により，タドポール・グラフは 3 色塗り分けできないはずだから，矛盾である．従って， G の 3 本の外線の色はすべて異ならない．

平面性は， G' が G^2 の縮約グラフであることから従う．□

外線の数 E_G が 4 以上のときは，平面上に外線をおく円順序が 1 通りではないので， G^* や G' を作る方法ではファインマン・グラフの 3 色塗り分けをグラフ理論的グラフのそれには帰着できない．

次の命題は，前節に述べた定理である．

命題 5 ϕ^3 理論の平面ファインマン・グラフ G ($E_G \geq 2$) の線が 3 色で塗り分け可能であるための必要十分条件は， G がタドポール部分を含まないことである．すなわち，タドポール部分を含まない ϕ^3 理論の平面ファインマン・グラフは， $\phi_1\phi_2\phi_3$ 理論のファインマン・グラフとして実現される．

[証明] 命題 2 から明らかのように， G がタドポール部分を含めば 3 色塗り分けはできない．従って，それがタドポール部分を含まなければ，3 色塗り分け可能であることを示せばよい． G^2 は 3 次の斉次平面グラフであるから，1 節に述べた 4 色定理のテートのバージョンにより， G^2 が橋を含まなければそれは 3 色塗り分け可能である． G^2 の橋でないすべての線を縮約して得られる縮約図を R とする．明らかに， R は「樹木グラフ」(ループを含まないグラフ) である．樹木グラフは，トリヴィアルでない限り，次数 1 の頂点 (ただ 1 つの線の端点になっているような頂点) を持つ．その 1 つを a としよう． $E_G \geq 2$ なので， a に縮約された G^2 の部分は G のタドポール部分に他ならない．仮定により G はタドポール部分を含まないのだから， R はトリヴィアルでなくてはならない．ゆえに， G^2 は 3 色塗り分け可能，従って G もそうである．□

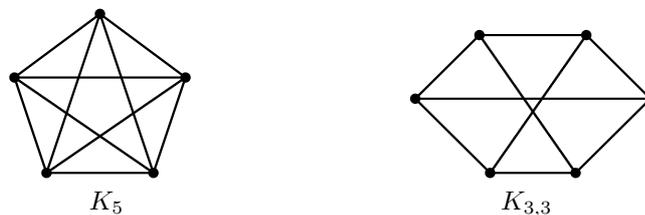
$E_G \leq 1$ の場合について補足しておく． $E_G = 0$ の場合，すなわち真空偏極グラフのときは， G が 3 次の斉次グラフそのものであるから，橋がなければ 3 色塗り分け可能である．橋があれば，橋の両側は互いに他から見てタドポール部分である． $E_G = 1$ の場合は G そのものがタドポールであり，もちろん 3 色塗り分け不可能である．

1.4 3色塗り分けできない非平面ファインマン・グラフ

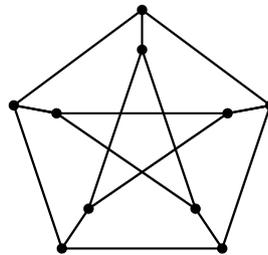
前節に述べた命題5により、タドポール部分を含まない ϕ^3 理論のファインマン・グラフで $\phi_1\phi_2\phi_3$ 理論では実現されないものは、平面上に交差なしには描けないようなものでなければならない。グラフが非平面的であるための必要十分条件は、有名なクラトウスキーの定理によって与えられる。

定理 (K. Kuratowski) グラフ G が非平面的であるための必要十分条件は、「クラトウスキー・グラフ」 K_5 、 $K_{3,3}$ の少なくとも一方が G に埋め込めることである。

ここにグラフ H がグラフ G に埋め込めるとは、 G は、そのいくつかの線と頂点を取り除く操作のみにより、 H に帰着させられるということである。 K_5 は5点の「完全グラフ」(5点を総当りで結んだグラフ)、 $K_{3,3}$ は2組の3点を総当りで結んだグラフで、次図に示すものである⁵。



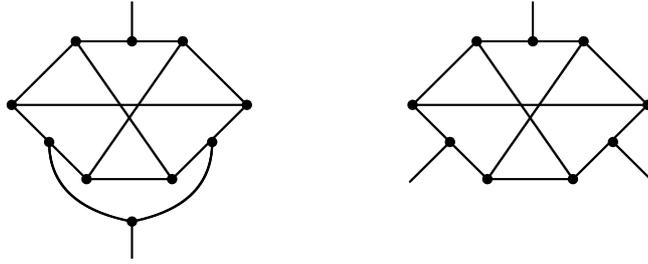
K_5 は次数4の頂点を持つので、 ϕ^3 理論の塗り分け問題とは関係がない。他方、 $K_{3,3}$ は3色塗り分けが可能であることが知られている。3色塗り分けができない最も簡単なグラフは、 K_5 の各頂点に1本の線を挿入して3次の頂点になるようにしたグラフで、「ペテルセン・グラフ」と呼ばれる。ペテルセン・グラフには $K_{3,3}$ が埋め込み可能である。3色塗り分けできないグラフは、ペテルセン・グラフが埋め込み可能なのではないかという推測があるが、証明はされていない。ペテルセン・グラフは次図のようなものである⁶。



命題3の G^* 、命題4の G' がペテルセン・グラフになる自己エネルギー・グラフとヴァーテックス・グラフはそれぞれ次のようになる。ちょっと分かりにくいかもしれないが、左の図の2本の外線を同一視して1本に内線に置き換えたもの、右の図の3本の外線を新しく導入した頂点に繋いで3本の内線にしたものは、ペテルセン・グラフになっている。

⁵頂点は黒丸で示す。2線が交差していても黒丸がなければ交わっていないものとする。

⁶ペテルセン・グラフでは、どの線もトポロジカルに同等である。



1.5 ϕ^3 理論と $\phi_1\phi_2^2$ 理論

以上で ϕ^3 理論と $\phi_1\phi_2\phi_3$ 理論のファインマン・グラフを比較したが、参考までに ϕ^3 理論と $\phi_1\phi_2^2$ 理論の比較をしておこう。簡単のため、ここでは正規積はとらないで、ループ線を容認することにする。

まず明らかなことは、 ϕ_2 の数が保存則を満たしていることで、 ϕ_2 の線は必ず一続きになるから、ループをなすか、2本の外線を繋ぐかのいずれかである。とくに、 ϕ_2 の外線の数は必ず偶数でなければならない。

グラフ理論では、より精密な結果として次のペテルセンの定理が知られている。

定理 (J. Petersen) 橋を持たない3次の斉次グラフ G は、その線の集合を共通部分を持たない2つの集合 L_1 と L_2 に分け、 G のどの頂点も L_1 に属するただ1本の線の端点であり、かつ L_2 に属する2本の線の端点である（ループ線の場合は2本と勘定）ようにできる。

命題1での言葉でいえば、 L_2 は共通部分のないループの合併である。ただし、命題1の場合と違って各ループに属する線の本数は偶数でなくてもよい。

$E_G \geq 2$ のファインマン・グラフ G については G^2 を考えることにより（真空偏極グラフについてはそのまま）、ペテルセンの定理から次の結果を得る。

命題6 タドポール部分を含まない、タドポール・グラフ以外の ϕ^3 理論のファインマン・グラフ G は、 $\phi_1\phi_2^2$ 理論においても実現される。

保存則から次のことも明らかである。

命題7 任意の $\phi_1\phi_2^2$ 理論のファインマン・グラフにおいて、タドポール部分の「尻尾」（タドポールの本体とファインマン・グラフの残りの部分と繋いでいる線）は必ず ϕ_1 である。

このことから、2個以上のタドポール部分がある ϕ^3 理論のファインマン・グラフは、 $\phi_1\phi_2^2$ 理論では実現できない場合が生ずる。次図はその例である（2重丸は任意の部分グラフ）。



ただ1個のタドポール部分を含む ϕ^3 理論のファインマン・グラフで、 $\phi_1\phi_2^2$ 理論において実現できない例があるかどうかはよく分からないが、反例はあったとしてもかなり複雑なものになるであろうことは、次の命題

から想像される。

命題 8 その内部にタドポール部分を含まない ϕ^3 理論の平面タドポール・グラフ G は, $\phi_1\phi_2^2$ 理論において実現できる。

[証明] G の尻尾を取り除き, その端点で切断して両側の内線を外線に置き換えれば, 平面自己エネルギー・グラフ \tilde{G} を得る。命題 5 により \tilde{G} は, 3 色 $\{1, 2, 3\}$ で塗り分け可能である。命題 3 の証明で見たように, この塗り分けで 2 本の外線は同色である。一般性を失うことなしに, この色を 2 とすることができる。また色 3 を 2 に変えると, \tilde{G} は $\phi_1\phi_2^2$ 理論の自己エネルギー・グラフとみなせる。この \tilde{G} の色塗りをもとに G に戻って, 尻尾の線を色 1 にすれば, G が $\phi_1\phi_2^2$ 理論のタドポール・グラフとみなせることが分かる。□

ちなみに, 3 色塗り分けできないペテルセン・グラフの 1 本の線に尻尾をつけてできるタドポール・グラフも, $\phi_1\phi_2^2$ 理論において実現されることは明らかである (尻尾はどこにつけても同等なので, 外側の 5 角形につけると考えればよい)。

以上は次の論文の一部を紹介したものである。

N. Nakanishi, *Quantum field theory and the coloring problem of graphs*,
Commun. Math. Phys. **32** (1973), 167⁷.

原論文では, このほかにファインマン・グラフのウェイトの違いが「染色多項式」というものによって記述されること示した。なお, この論説を書くに当たって, 次の本を参考にした。

一松 信著「四色問題 その誕生から解決まで」(講談社ブルーバックス, 1978)。
フランク・ハラリイ著, 池田貞雄訳「グラフ理論」(共立出版, 1971)。

⁷ $\phi_1\phi_2^2$ 理論で実現できるファインマン・グラフに関する Theorem 5.3 は, 誤りであった。5 節の図の右側のものが反例である。

次元解析と数学者

中西 襄 (京都大学名誉教授)

2.1 次元解析

次元解析は物理屋なら誰でも知っている。2つの量の和や差をとるときには、両者の次元がそろっていないなければならない。また、2つの量の間で等式もしくは不等式が成立するならば、両者の次元が一致していないなければならない。この物理屋にとっては全く当たり前のことが、数学者にはまるで分かっていないようだ。数学者は次元の合っていない式を書いても全く平気である。つまり彼らは次元のある量をはじめから念頭にないのである。

私が京大数理研に在職中、セミナーで数学の大学院生が博士論文発表の予行演習したときのことである。詳しくは覚えていないが、なにか球に関係した計算で、彼の最終結果を見ると明らかに次元が合っていない。しかし彼は計算に自信があり、絶対に間違っていないという。そこで、計算を詳しく説明してもらおうことにしたら、やっぱり間違いをしていた。こちらは彼の計算の妥当性が完全に理解できていなくても、次元が狂ってくるそのステップだけに気をつければよいので、その間違いを発見するのは極めて容易であった。それなのに数学者の人は全く気づかないのである。

岩波の「数学辞典」は日本数学会が総力をあげて編集した世界に誇れる書物である。第1版から第4版まで出版されて、その改訂の度に内容が豊かになっている。巻末にはコンパクトにまとめられた公式集があり、数学の利用者にとって大変有用だ。何十年にわたってよく利用させていただいたものである。それだけに、この公式集にミスプリントがあると、大いに迷惑する。⁸ところで先日、たまたま数学辞典の公式集のフーリエ解析のところを見ることになったが、間違いがあるのに気が付いた。符号関数 $\epsilon(x) = x/|x|$ の \sin 展開であるが、周期 $2a$ なので、展開係数は

$$b_n = \frac{2}{a} \int_0^a dx \sin \frac{n\pi x}{a}$$

で与えられる。この値が、公式集の表では

$$b_n = [1 + (-1)^{n+1}] \frac{2a}{n\pi}$$

となっている。積分を遂行してみるまでもなく、この a は不要である。それは、次元解析を知っていたら眺めただけで分かることである。しかし、このミスは第4版でも訂正されていない。

2.2 ある不等式

先日、たまたま次のような不等式が成立することを知った。

⁸第2版で、ルジャンドル多項式の展開の1項の係数で因子 $\frac{1}{2}$ が脱落していて、それを使って行った検算が一般式とどうしても合わず、難儀したことがあった。編集者の1人にそのことを言っておいたが、第3版もそのままであった。第4版では訂正。

定理 $f(x)$ を閉区間 $[0, 1]$ における C^1 級の実関数とする．もし $f(0) = f(1) = 0$ ならば，

$$\int_0^1 dx [f'(x)]^2 \geq \int_0^1 dx [f(x)]^2$$

である．等号が成立するのは， $f(x) \equiv 0$ のときのみ．

初等的な不等式ではあるが，一般的な関数とその導関数と係数なしに同じレベルで現われるのは，数学者にはどうということもないだろうが，次元解析になじんだ物理屋は違和感を覚えるものである．以下は私が考えた証明だが，読む前に証明をトライして頂きたい．

[証明] $[f(x)]^2$ の最大点 (複数あればそのうちのどれか 1 つ) を $x = a$ とする． $[f(x)]^2$ は両端で 0 であるから， $f(x) \equiv 0$ でなければ， $0 < a < 1$ ， $[f(a)]^2 > 0$ である．定理の不等式の右辺は

$$\int_0^1 dx [f(x)]^2 \leq [f(a)]^2 \int_0^1 dx = [f(a)]^2$$

で上から押さえられる．

問題は左辺を下から押さえることである．まず積分区間を 2 つに分けて

$$\int_0^1 dx [f'(x)]^2 = \int_0^a dx [f'(x)]^2 + \int_a^1 dx [f'(x)]^2$$

とする．第 1 項について考えるとき，次元解析的考察が役立つ． x や a を $+1$ の次元を持つ量， $f(x)$ は無次元の量と思うと，この積分は -1 の次元を持つので，それを押さえる量も -1 の次元の量と期待される．実際，

$$\int_0^a dx [f'(x)]^2 \geq a^{-1} \left[\int_0^a dx f'(x) \right]^2$$

が成り立つ．その証明は，絶対不等式

$$\int_0^a dx \int_0^a dy [f'(x) - f'(y)]^2 \geq 0$$

を展開して整理すればできる．従って，

$$\int_0^a dx [f'(x)]^2 \geq a^{-1} [f(a) - f(0)]^2 = a^{-1} [f(a)]^2$$

となる．第 2 項についても同様にして，

$$\int_a^1 dx [f'(x)]^2 \geq (1-a)^{-1} [f(a)]^2$$

である．

以上から， $f(x) \equiv 0$ でないとき，

$$\int_0^1 dx [f'(x)]^2 \geq [a^{-1} + (1-a)^{-1}] [f(a)]^2 = [a(1-a)]^{-1} [f(a)]^2 > [f(a)]^2 \geq \int_0^1 dx [f(x)]^2$$

を得る．なお，もちろん $f(x) \equiv 0$ のときは， $0 = 0$ で等号が成立する．□

なお，この定理は次のように書けば，物理屋にも納得できる．

定理 $f(x)$ を閉区間 $[0, c]$ における C^1 級の実関数とする．もし $f(0) = f(c) = 0$ ならば，

$$\int_0^c dx [f'(x)]^2 \geq c^{-2} \int_0^c dx [f(x)]^2$$

である．等号が成立するのは， $f(x) \equiv 0$ のときのみ．

この形の方が，上記の証明を思いつき易いと思うが，いかがであろうか．

2.3 ファインマンの恒等式

次元解析の原則に反するように見えるのが，われわれ素粒子物理屋おなじみのファインマンの恒等式である．すなわち，任意の 2 つの量 A, B に対し，

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{(xA + (1-x)B)^2}$$

が成立する．物理屋は A, B が同じ次元を持つ場合にのみこの式を使うのだが，数学的にはそのような制約はない．そうすると，右辺では次元の異なる量の和が現われることになる．

A, B をそれぞれ aA, bB に変換すると，左辺は $\frac{1}{ab}$ 倍される．右辺で同じ変換を見るには，積分変数 x も変換しなければならないのである．すなわち，1 次分数変換

$$x = \frac{by}{(b-a)y + a}, \quad 1-x = \frac{a(1-y)}{(b-a)y + a}, \quad dx = \frac{ab dy}{[(b-a)y + a]^2}$$

を行えば，右辺でも $\frac{1}{ab}$ 倍されていることが見られる．この形の 1 次分数変換の全体は，もちろん可換群をなす．

要するに，次元解析はスケール変換に関する共変性を見ているのに他ならない．変換群に対する共変性というコンテキストでなら，数学者にもよく理解されるのではないだろうか．

ピタゴラスの定理の解析的証明

高木富士夫⁹

3.1 はじめに

初等幾何学の基本定理であるピタゴラスの定理（三平方の定理）の証明は100以上あると言われている．ある本には500以上あると書かれている．私が知る限りでは証明の多くは幾何学的であり，面積や三角比などの幾何学的概念だけが使われる．

ところがある時オイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (3.1.1)$$

を眺めていて、「あっ！これからピタゴラスの定理（に相当する次の公式）が出せるではないか！」と気が付いた．

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad (3.1.2)$$

公式 (3.1.1) を使い慣れている人はだれでも，(3.1.2) が (3.1.1) と整合することを認識している．しかしここでは，単なる整合性ではなく，(3.1.1) から (3.1.2) を導くことはできるが逆は不可だという論理の方向・道筋を問題にする．もしオイラーの公式を証明する道筋のどこにもピタゴラスの定理が直接にも間接にも使われていなければ，上記の論法はピタゴラスの定理のもう一つの証明を与えるのではないか．もしそうならば，オイラーの公式は解析学の公式だから，これはピタゴラスの定理の解析的証明といえるかもしれない．

なおオイラーの公式を使わなくても，解析学・微分積分学の他の結果を用いて (3.1.2) を証明することができる．そこで2節では，ピタゴラスの定理の解析的証明を3通り示す．3節では，2節で用いた解析学の結果をピタゴラスの定理に依らずに導出できることを確かめる．4節では解析的証明の意義について考察する．3節で用いられる扇形に関する1つの不等式の証明は付録に与えられる．

3.2 ピタゴラスの定理の解析的証明

3.2.1 オイラーの公式による証明

オイラーの公式 (3.1.1) とその複素共役

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x$$

を辺々掛け合わせると

$$e^{ix} e^{-ix} = \cos^2 x - (i \sin x)^2 = \cos^2 x + \sin^2 x$$

しかるに左辺は $e^{ix-ix} = e^0 = 1$ となるから

$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x$$

⁹ftakagi@jn3.so-net.ne.jp

3.2.2 三角関数の微分公式による証明

正弦及び余弦関数の微分公式

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x \quad (3.2.1)$$

を用いると

$$(\cos^2 x + \sin^2 x)' = 2 \cos x(-\sin x) + 2 \sin x \cos x = 0$$

となるから

$$\cos^2 x + \sin^2 x = c$$

ここで c は定数．上式の左辺で $x = 0$ または $x = \frac{\pi}{2}$ と置くと， $\cos 0 = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ ， $\cos \frac{\pi}{2} = \sin 0 = 0$ であるから， $c = 1$ を得る．

3.2.3 マクローリン展開による証明

正弦及び余弦関数のマクローリン展開は次式で与えられる．

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (3.2.2)$$

(3.2.2) を用いて $\sin^2 x + \cos^2 x$ を計算すると 1 になることは $0 = (1-1)^n$ の二項展開から得られる公式

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} = 0 \quad (n \text{ は正整数}) \quad (3.2.3)$$

を用いると容易に示すことができる．

3.3 解析学の諸定理とピタゴラスの定理の独立性

前節では解析学の公式・定理を用いて 3 通りの道筋でピタゴラスの定理の解析的証明を与えた．この節では，そこで用いた解析学の公式・定理がピタゴラスの定理とは独立に導出できることを確認する．すなわち，それらの公式・定理はピタゴラスの定理またはそれを包含する定理を用いなくて導くことができることを示す．

3.3.1 極限值公式の導出

微分公式 (3.2.1) を導く準備として，まず次の極限值公式を導く．

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (3.3.1)$$

半径 1 の扇形 AOB において， $\angle AOB$ は鋭角とし，点 B から OA に下ろした垂線と OA との交点を H とする（図 3.1 参照）弧 AB の点 A における接線と線分 OB の延長線との交点を T とする．このとき線分や弧の長さについて次の不等式が成り立つ．

$$BH < \widehat{AB} < AT \quad (3.3.2)$$

ここで \widehat{AB} は弧 AB の長さ．(3.3.2) より

$$\sin t < \frac{tL_0}{T_0} < \tan t \quad (3.3.3)$$

ここで t は $\angle AOB$ の大きさ， L_0 は単位円の円周の長さ， T_0 はある点の周りを 1 周する角の大きさである．

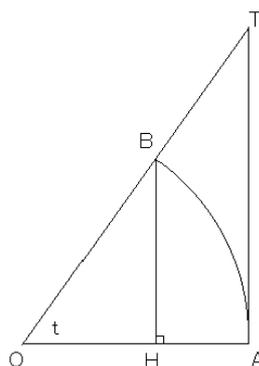


図 3.1: 垂線, 弧, 接線の長さ比較

(3.3.3) において $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ を用いると, 挟み撃ち法により

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{L_0}{T_0} \quad (3.3.4)$$

を得る. ここで

$$L_0 = 2\pi \quad (3.3.5)$$

$$T_0 = 2\pi \quad (3.3.6)$$

として, t を x に変更すると (3.3.1) が得られる. (3.3.5) は円周率 π の定義, (3.3.6) は弧度法の定義である.

ところで不等式 (3.3.2) は 2 つの不等式 $BH < \widehat{AB}$, $\widehat{AB} < AT$ から成る. 第 2 の不等式の証明には, 「任意の三角形において, 大きな角の対辺は小さな角の対辺よりも大きい」及び「三角形の内角の和は 2 直角である」という定理が用いられる. その具体的証明は文献 [1] の定義 1, 命題 2, 命題 3 に与えられている. なお同じ文献の命題 5 では同じ不等式の別証明が与えられているが, そこではピタゴラスの定理が微分形で使われているので, ここでは採用できない. 第 1 の不等式の証明は長いので付録に回す. 極限值公式 (3.3.1) を導くために円周も円の面積も計算する必要はない (のでピタゴラスの定理のお世話にならない) ということがこの話のポイントである.

3.3.2 三角関数の微分公式の導出

導関数の定義より

$$(\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \quad (3.3.7)$$

教科書で見かける計算では, ここで $\sin(x+h)$ を加法定理を用いて変形する. しかし加法定理はピタゴラスの定理を内包しているので使えない. そこで $0 \leq x \leq x+h < \pi/2$ として, 半径 1 の扇形 AOD を考え, 弧 AD 上に点 B をとって, $\angle AOB = h$, $\angle BOD = x$ とする. (図 3.2 参照) 点 A から線分 OD に垂線 AH を下ろし, 垂線 AH に点 B から垂線 BC を下ろす. 点 A と B を直線で結ぶ. 直角三角形 AOH において $\angle AOH = x+h$, $\angle AHO = \pi/2$ であるから, $\angle OAH = \pi/2 - x - h$. 一方, 2 等辺三角形 AOB において $\angle OAB = \angle OBA = (\pi - h)/2$. 故に $\angle BAC = \angle OAB - \angle OAH = (\pi - h)/2 - (\pi/2 - x - h) = x + h/2$ とな

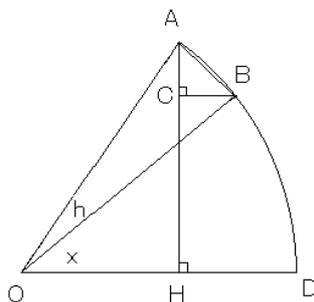


図 3.2: 正弦関数微分のための作図

る．弧 AB ，線分 AB ，線分 AC の長さをそれぞれ \widehat{AB} ， AB ， AC とすると

$$\widehat{AB} = h$$

$$AB = 2 \sin \frac{h}{2}$$

$$AC = AH - CH = \sin(x+h) - \sin x$$

従って

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{AC}{\widehat{AB}} \\ &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB}{\widehat{AB}} \\ &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{AC}{AB} \cdot \lim_{h \rightarrow +0} \frac{AB}{\widehat{AB}} \\ &= \lim_{h \rightarrow +0} \cos \angle BAC \cdot \lim_{h \rightarrow +0} \frac{2 \sin \frac{h}{2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow +0} \cos \left(x + \frac{h}{2} \right) \cdot \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\sin \epsilon}{\epsilon} \\ &= \cos x \end{aligned}$$

ただし最後の行へ移る所で極限值公式 (3.3.1) を用いた． $0 \leq x+h \leq x < \pi/2$ の場合についても同様の計算が成り立ち，2つの片側極限值が一致するので，(3.2.1) の第1式が得られる．さらに $\pi/2 \leq x < \pi$ の場合も同様の計算が成り立つ．

(3.2.1) の第2式は第1式から次のようにして得られる．直角三角形 ABC において $\angle C = \pi/2$ ， $\angle B = x$ のとき $\angle A = \pi/2 - x$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{BC}{AB} &= \cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \\ \frac{AC}{AB} &= \sin x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \end{aligned}$$

そこで $\pi/2 - x = t$ とおいて，合成関数の微分法と (3.2.1) の第 1 式を用いると

$$\begin{aligned} (\cos x)' &= \frac{d}{dx} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{d}{dt} \sin t \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= \cos t \times (-1) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x \end{aligned}$$

以上，正弦，余弦の定義，三角形の内角の和は π であること，及び極限值公式 (3.3.1) を用いて微分公式 (3.2.1) を導いた．

3.3.3 オイラーの公式の導出

ピタゴラスの定理を用いないでオイラーの公式を導く方法を 2 つ示す．

マクローリン展開を用いる方法

これは最も代表的な方法である．指数関数 e^x ，正弦関数 $\sin x$ ，余弦関数 $\cos x$ のマクローリン展開が与えられたとする．微分積分学のテイラーの定理，マクローリンの定理がその基礎になっている．指数関数のマクローリン展開式

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (3.3.8)$$

において x を ix で置き換えて，複素数の四則計算を適用すると，実部は余弦関数のマクローリン展開 ((3.2.2) の第 2 式) に，虚部は正弦関数のマクローリン展開 ((3.2.2) の第 1 式) に一致するので，(3.1.1) を得る．この論法においては，一般に e^x のマクローリン展開 (3.3.8) において，実変数 x を複素変数 z で置き換えて得られる級数を複素変数の指数関数 e^z の定義とする．

ところで，この方法の場合必要なのは指数関数，正弦関数，余弦関数のマクローリン展開だけである．従ってテイラーの定理，テイラー展開と，指数関数，正弦関数，余弦関数の高次導関数が与えられればよい．テイラーの定理は微分積分学の中心的定理の 1 つであるが，そこに到る一連の道筋でピタゴラスの定理 (を直接的に内包する定理) は使われていないだろう．指数関数 e^x の導関数を求めるには極限值公式

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e \quad (3.3.9)$$

を用いればよい．(3.3.9) はピタゴラスの定理と直接の関係はない．一方 (3.2.1) を繰り返し使えば，正弦関数と余弦関数の高次導関数を求めることができる．結局，この方法によればピタゴラスの定理を用いないでオイラーの公式を証明できる．

微分方程式法

まず実変数の実関数 $\sin x$ と $\cos x$ を用いて虚数単位 i を係数とする複素数値関数

$$g(x) = \cos x + i \sin x \quad (3.3.10)$$

を定義する．微分公式 (3.2.1) を用いると

$$g'(x) = -\sin x + i \cos x = i(\cos x + i \sin x) = ig(x) \quad (3.3.11)$$

また初期条件は

$$g(0) = 1 \quad (3.3.12)$$

である．ここで一般に複素変数の指数関数 e^z を次の微分方程式の解として定義する．

$$f'(z) = f(z), \quad f(0) = 1 \quad (3.3.13)$$

複素関数に対しても，実変数実関数の場合と同型の合成関数の微分法が使えるので， a を複素定数とするとき $u = az$ として

$$\frac{d}{dz}f(az) = \frac{d}{du}f(u) \cdot \frac{du}{dz} = af'(az) \quad (3.3.14)$$

(3.3.11),(3.3.12) と (3.3.13),(3.3.14) を見比べると， $a = i$, $z = x$ として $f(ix)$ が (3.3.11),(3.3.12) の解であることが分かる．従って

$$g(x) = f(ix) = e^{ix} \quad (3.3.15)$$

(3.3.10),(3.3.15) よりオイラーの公式 (3.1.1) が得られる．この場合もピタゴラスの定理は使われていない．ちなみに (3.3.13) を満たす関数 $f(z)$ が指数法則 $f(z_1 + z_2) = f(z_1)f(z_2)$ を満たすことは容易に証明できる．したがって (3.3.13) によって複素変数の指数関数を定義するのは妥当である．

3.4 解析的証明の意義

長年数学を漫然と使ってきた物理屋の筆者は，数学の定理の証明は短くて簡単であるほどよく，面白ければそれに越したことはない，という程度の認識を持ち続けてきた．そのような観点からいえば，本稿で提示したピタゴラスの定理の解析的証明は，個々のステップに新味は無く，道筋が長いので回りくどくて面白くないという印象を与えるかもしれない．この話のポイントは，証明の道筋の途中ではピタゴラスの定理が使われていないという事と幾何学的証明ではなく解析的証明であるという事だけである．わざわざこんな証明を考えることに意義はあるだろうか．しかし，数学は論理を絶対的に重視する学問であり，難しい定理の証明には何百か何千ステップにわたる論理の展開と計算の過程が必要になるそうである．従ってピタゴラスの定理の証明といえども，論理の道筋に新味があれば長い証明でも意味があるかもしれないと思った．

参考文献

[1] 新関章三，三角関数の微分積分と弧度法，2008 年

$BH < \widehat{AB}$ の証明

3.3.1 の図 3.1 において

$$0 < \angle AOB = t < \frac{\pi}{2}$$

とする．弧 AB 上に $n+1$ 個の点を点 A から点 B まで順に $A = A_0, A_1, \dots, A_i, \dots, A_n = B$ ととる．点 B から OA に下ろした垂線と OA の交点を H とする．点 A_i から BH に下ろした垂線と BH の交点を H_i とすると， $H = H_0, B = H_n$ である（図 3.3 参照）今考えている弧の分割を D_n として，すべての $n \in \mathbb{Z}^+$ にわたる D_n 全体の集合を \mathcal{D} とする．ここで \mathbb{Z}^+ は正の整数全体の集合．分割 D_n において分割点を順に結んでえられる折れ線の長さを $L(D_n)$ とすると

$$L(D_n) = \sum_{i=1}^n A_{i-1}A_i \quad (3.4.1)$$

ここで $A_{i-1}A_i$ は 2 点 A_{i-1} と A_i を結ぶ線分の長さ．[1] にならって弧 AB の長さを

$$\widehat{AB} = \sup\{L(D_n) \mid D_n \in \mathcal{D}\} \quad (3.4.2)$$

と定義する．

点 O と分点 A_i を直線で結び

$$\begin{aligned} \angle A_0OA_i &= \angle AOA_i = t_i & (1 \leq i \leq n) \\ t_n &= \angle AOB = t \end{aligned}$$

とする．さらに

$$\angle A_{i-1}OA_i = s_i = t_i - t_{i-1}, \quad t_0 = 0 \quad (1 \leq i \leq n)$$

とおくと

$$\begin{aligned} t_i &= \sum_{j=1}^i s_j \\ 0 &< t_1 < t_2 < \dots < t_n = t \\ 0 &< s_i & (1 \leq i \leq n) \end{aligned}$$

である．以上で準備ができたので，順に次の 3 式を証明する．

$$\angle H_iA_iA_{i-1} > \frac{\pi}{2} \quad (1 \leq i \leq n) \quad (3.4.3)$$

$$H_{i-1}H_i < A_{i-1}A_i \quad (1 \leq i \leq n) \quad (3.4.4)$$

$$BH < \widehat{AB} \quad (3.4.5)$$

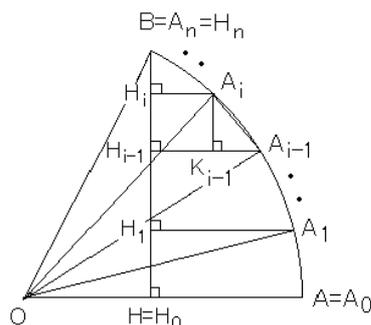


図 3.3: 弦と弧の長さの比較

まず $H_i A_i // OA$ であるから錯角が等しい, すなわち

$$\angle AOA_i = \angle OA_i H_i = t_i$$

次に二等辺三角形 $A_{i-1}OA_i$ において

$$\angle OA_{i-1}A_i = \angle OA_i A_{i-1} = \frac{1}{2}(\pi - \angle A_{i-1}OA_i) = \frac{\pi - s_i}{2}$$

であるから

$$\angle H_i A_i A_{i-1} = \angle H_i A_i O + \angle OA_i A_{i-1} = t_i + \frac{\pi - s_i}{2}$$

従って $i = 1$ のとき

$$\angle H_1 A_1 A_0 = \frac{s_1}{2} + \frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{2}$$

$2 \leq i \leq n$ のとき

$$\angle H_i A_i A_{i-1} = s_1 + s_2 + \cdots + s_{i-1} + \frac{s_i}{2} + \frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{2}$$

これで (3.4.3) が証明された. そこで四辺形 $H_i H_{i-1} A_{i-1} A_i$ において点 A_i から辺 $H_{i-1} A_{i-1}$ に垂線を下ろして, 交点を K_{i-1} とすると, 四辺形は長方形 $H_i H_{i-1} K_{i-1} A_i$ と直角三角形 $A_i K_{i-1} A_{i-1}$ に分割される. この直角三角形において $\angle A_i A_{i-1} K_{i-1} < \angle A_i K_{i-1} A_{i-1} = \frac{\pi}{2}$ であるから $K_{i-1} A_i < A_{i-1} A_i$ である. 一方, 長方形 $H_i H_{i-1} K_{i-1} A_i$ において $H_{i-1} H_i = K_{i-1} A_i$ である. 従って $H_{i-1} H_i < A_{i-1} A_i$ ($1 \leq i \leq n$) となり, (3.4.4) が証明された. (3.4.1), (3.4.4) より

$$\sum_{i=1}^n H_{i-1} H_i < \sum_{i=1}^n A_{i-1} A_i = L(D_n)$$

左辺は $H_0 H_n = BH$ に等しいから $BH < L(D_n)$ となる. この結果と (3.4.2) より

$$BH \leq \widehat{AB} \quad (3.4.6)$$

実際には (3.4.6) において等号が成り立たないことが次のようにして分かる.

点 O から線分 AB に下ろした垂線と AB 及び弧 \widehat{AB} との交点をそれぞれ M, N とする . (3.4.6) を扇形 AON と扇形 NOB に適用すると

$$\begin{aligned} AM &\leq \widehat{AN} \\ BM &\leq \widehat{BN} \end{aligned}$$

辺々加えると

$$AB \leq \widehat{AB} \tag{3.4.7}$$

一方, 直角三角形 BHA において $BH < AB$ であるから $BH < AB \leq \widehat{AB}$ を得る . 従って $BH < \widehat{AB}$ となり, (3.4.5) が証明された . この結果を反映して (3.4.7) から等号がとれて

$$AB < \widehat{AB} \tag{3.4.8}$$

を得る .

Gauss 積分の計算法

新関 章三 (愛媛県松山市)・荒木 真 (有明高等工専)

4.1 はじめに

Gauss (ガウス 1777–1855) 積分は確率・統計学で重要な正規分布の確率密度関数の表示で用いられるばかりではなく、また、熱方程式の解の表示式や誤差論等でも重要な働きをする。本稿では、二重積分を用いた計算法や文献 [2] および [3] で行われている計算法等、これら従来の計算法とは別の視点から、即ち、第 3 節で述べた考えに立脚した、新たな計算法を展開した。このためには、定義 1.1 で与える正弦積分 S_n が重要な働きをしており、定理 3.4 で S_n の持つ性質を明らかにした。以上の背景に基づいて Gauss 積分を計算してみよう。

4.2 記号と定義

本稿で用いられる記号や定義等について述べる。

まず、記号 Z_0^+ は負でない整数の全体とし、 R は実数の全体とする。そしてここでは、記号 S_n を正弦積分と呼び次のように定める¹⁰：

定義 2.1 (正弦積分) $\forall n \in Z_0^+$ に対し

$$S_n \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\pi \sin^n x dx$$

と定める。◇

さて、ここで定理 3.3 に登場する関数族を 1 つ与えておこう。ただし、 $K \in R^+$ に対し、 $I_K \stackrel{\text{def}}{=} [-K, K]$ は R の閉区間とする。

定義 2.2 (局所有界) 区間 $J \subset R$ で定義された関数 f が J で局所有界であるとは、任意の有限閉区間 $I \subset J$ に対してある $L_I \in R_0^+$ が存在して

$$\sup_{x \in I} |f(x)| = L_I < \infty$$

が成り立つときをいう。

注意 区間 $J \subset R$ で連続な関数 f は、Weierstrass (ワイエルシュトラス 1815–1897) の定理により、有限閉区間 $I \subset J$ で最大値と最小値をとるという事実から、 J で連続な関数 f はそこで局所有界であることが分かる。◇

¹⁰ 定義 2.1 で与えた正弦積分は、次の式で定義される積分正弦関数：

$$\text{Si}(x) = -\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad \& \quad \text{si}(x) = -\int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$

と名称が似ているが、全く違うものである。(岩波“数学公式 I”，岩波書店 (1956) 200)

4.3 計算への準備

本節では、指数関数における最も基本的で重要な不等式を次の形で与える：

命題 3.1 (指数関数の基本定理) $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して

$$1 + x \leq e^x$$

が成り立つ。

証明 微分法を用いると容易に証明できる。□

注意 微分法を用いなくとも、多少遠回りにはなるが、一般の指数関数の定義式を用いて証明することも出来る。これについては本稿最後の参考事項に、“基本不等式 4.1”としてその証明を与えておく。◇

命題 3.1 の不等式からは、指数関数 e^x の微分や積分を始め e^x にかかわる重要な不等式等を殆ど全て導くことが出来る。次の不等式は、それらの中の 1 つである。

定理 3.2 次の不等式が成り立つ：

$$x > -1 \implies e^{\frac{x}{1+x}} \leq 1 + x \leq e^x$$

証明 容易に確認出来るように、次の関係が成り立つ：

$$x > -1 \iff -\frac{x}{1+x} > -1$$

従って、命題 3.1 の不等式の x を $-x/(1+x)$ で置き換えれば定理の左側の不等式が得られ、また右側の不等式は命題 2.1 そのものである。□

上の定理から、指数関数の収束問題に関する重要な性質を導くことが出来る。即ち、次の定理が成り立つ。

定理 3.3 関数 f は \mathbb{R} で局所有界とする。この時、 $\forall K \in \mathbb{R}^+$ に対し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{f(x)}{n}\right)^n = e^{f(x)} \quad (I_K \text{ で一様収束})$$

が成り立つ。

証明 定理 3.2 の不等式の x を $f(x)/n$ で置き換えて得られた不等式を n 乗することにより

$$\begin{aligned} e^{\frac{nf(x)}{n+f(x)}} &\leq \left(1 + \frac{f(x)}{n}\right)^n \leq e^{f(x)} \\ \therefore \left| \left(1 + \frac{f(x)}{n}\right)^n - e^{f(x)} \right| &\leq \left| e^{\frac{nf(x)}{n+f(x)}} - e^{f(x)} \right| \leq e^{L_K} \left(1 - e^{-\frac{(L_K)^2}{n-L_K}}\right) \\ \therefore \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I_K} \left| \left(1 + \frac{f(x)}{n}\right)^n - e^{f(x)} \right| &\leq e^{L_K} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(1 - e^{-\frac{(L_K)^2}{n-L_K}}\right) = 0 \end{aligned}$$

が得られる。これで定理は証明された。□

注意 上の定理の一般化は本稿の最後の参考事項に、“一般化 5.1”として与えておいた。◇

次に, S_n の重要な性質として Wallis (ウオリス 1616–1703) による次の公式がある.

定理 3.4 (Wallis の公式) 次の極限式が成り立つ:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} S_{2n} = \sqrt{\pi}$$

証明 定義 2.1 の正弦積分において

$$S_n = \int_0^\pi \sin^n x dx = \int_0^\pi \sin^{n-1} x \cdot \sin x dx$$

と変形して部分積分を実行すれば漸化式:

$$n S_n = (n-1) S_{n-2} \quad \therefore n S_n S_{n-1} = (n-1) S_{n-1} S_{n-2}$$

が得られ, これを解けば $n = 2, 3, \dots$ に対し

$$n S_n S_{n-1} = 1 \cdot S_1 \cdot S_0 = 1 \cdot \pi \cdot 2 = 2\pi \quad \therefore S_n S_{n-1} = \frac{2\pi}{n}$$

を得る. 従って, $n \in \mathbb{Z}^+$ に対し

$$\begin{aligned} S_{n+1} < S_n < S_{n-1} &\Rightarrow S_{n+1} S_n < S_n^2 < S_n S_{n-1} \Rightarrow \frac{2\pi}{n+1} < S_n^2 < \frac{2\pi}{n} \\ &\Rightarrow 2\pi \frac{n}{n+1} < (\sqrt{n} S_n)^2 < 2\pi \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} S_n = \sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

を得る. これで Wallis の公式は証明された. \square

注意 通常 Wallis の公式とは, $n \in \mathbb{Z}^+$ に対して, 次の極限式:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{\sqrt{n} (2n)!} = \sqrt{\pi}$$

を指す. これについては, 参考事項の "Wallis 5.3" に詳しく述べておいた. \diamond

4.4 Gauss 積分の計算

前節の準備の基に目標の Gauss 積分を計算してみよう.

このために, 先ず次の補題から始める.

補題 4.1 $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ に対し

$$\int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \sqrt{n} S_{2n+1}$$

が成り立つ.

証明 変数変換 $x = \sqrt{n} \sin t$ により

$$\text{左辺} = \sqrt{n} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2n+1} t dt = \sqrt{n} \int_0^\pi \sin^{2n+1} t dt = \sqrt{n} S_{2n+1}$$

が得られ, 補題は証明された. \square

定理 4.2 (Gauss 積分)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

証明 $\forall K \in \mathbf{R}^+$ に対し, $K < \sqrt{n}$ を満たすように $n \in \mathbf{Z}^+$ をとる. この時, 命題 3.1 及び補題 4.1 より一連の式:

$$\begin{aligned} 1+x \leq e^x &\Rightarrow 1 - \frac{x^2}{n} < e^{-x^2/n} \Rightarrow \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2} \\ &\Rightarrow \int_{-K}^K \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \leq \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \leq \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \\ &\Rightarrow \int_{-K}^K \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \leq \sqrt{n} S_{2n+1} \leq \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \\ &\Rightarrow \begin{cases} \int_{-K}^K \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \leq \sqrt{n} S_{2n} \\ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \sqrt{n+1} S_{2(n+1)} \leq \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \end{cases} \end{aligned}$$

が得られ, 定理 3.3 及び 3.4 により $n \rightarrow \infty$ とすれば

$$\int_{-K}^K e^{-x^2} dx \leq \sqrt{\pi} \leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

となり, ここで $K \rightarrow \infty$ とすれば定理は証明された. \square

4.5 参考事項

本節では先ず, 命題 3.1 の後の注意で述べたように, 微分法を用いずに基本不等式 5.1 で指数関数の基本定理を証明し, 次いで定理 3.3 の後の注意で予告したこの定理の一般化を, 一般化 5.2 で明らかにする. そして, 定理 3.4 の後の注意に記した Wallis の公式をまた別の形で表現した.

上の目標を達成するため, 以下, 幾つかの準備をする. よく知られているように

$$\left. \begin{array}{l} \{a, b\} \subset \mathbf{R}^+ \\ n \in \mathbf{Z}^+ \end{array} \right\} \Rightarrow a^{n+1} - b^{n+1} \leq (n+1)(a-b)a^n$$

が成り立つ. この不等式は次のように活用される. 先ず, a, b をそれぞれ

$$a = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \quad \& \quad b = \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)$$

とおいてこれら a, b を上の不等式に代入すれば

$$1 + \frac{x}{n} \in \mathbf{R}^+ \Rightarrow \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \quad (4.5.1)$$

が成り立つ. そして, $\forall x \in \mathbf{R}$ に対し

$$\sigma(x) = \begin{cases} +1 : x \in \mathbf{R}_0^+ \\ -1 : x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

と定める．この時， $\forall m \in \mathbf{Z}^+$ 及び Napier (ネーピア 1550–1617) 数 e に対し

$$\left(1 + \frac{\sigma(x)}{m}\right)^m \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sigma(x)}{n}\right)^n = e^{\sigma(x)} \quad (4.5.2)$$

が成り立つ．

以上の準備の基に，基本不等式の証明に入ろう．

[基本不等式 5.1] $\forall x \in \mathbf{R}$ に対し

$$1 + x \leq e^x \quad (4.5.3)$$

が成り立つ．

証明 $x \in (-\infty, -1] \cup \{0\}$ の時は自明である．従って， $x \in U \stackrel{\text{def}}{=} (-1, 0) \cup (0, \infty)$ の場合を考えてみる．始めに $x \in U$ は有理数とする時これは

$$\exists \{p, q\} \subset \mathbf{Z}^+ \ \& \ x = \sigma(x) \frac{q}{p}$$

と表現することが出来る．この時， $1 + \sigma(x)(q/p) > 0$ であるから，(4.5.1) 及び (4.5.2) により

$$\begin{aligned} \left(1 + \sigma(x) \frac{q}{p}\right)^p &\leq \left(1 + \sigma(x) \frac{q}{pq}\right)^{pq} = \left(1 + \sigma(x) \frac{1}{p}\right)^{pq} \leq e^{\sigma(x)q} \\ \therefore 1 + x = 1 + \sigma(x) \frac{q}{p} &\leq e^{\sigma(x) \frac{q}{p}} = e^x \end{aligned}$$

が成り立つ．従って， $x \in U$ が有理数の時，不等式 (4.5.3) は正しい．また， $x \in U$ が無理数の時には $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$ なる有理数列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset U$ が存在し

$$\begin{aligned} 1 + y_n &\leq e^{y_n} \quad (n \in \mathbf{Z}^+) \\ 1 + x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + y_n) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} e^{y_n} = e^x \\ \therefore 1 + x &\leq e^x \end{aligned}$$

が成り立つ．以上で，基本不等式は証明された．□

この節では，定理 3.3 の一般化と定理 3.4 の後に述べた注意の具体化とについて考えてみよう．

ここで，そのための準備をする．関数 $\varphi(y)$ は \mathbf{R} で，また関数 $f(x, y)$ は $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_0^+$ で定義されそこで， $\forall K \in \mathbf{R}^+ I_K \stackrel{\text{def}}{=} [-K, K]$ に対して

$$M_K \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{|f(x, y)| \mid (x, y) \in I_K \times \mathbf{R}^+\} < \infty$$

を満たしているとする．この時，定理 2.3 の一般化は次の様になる．

[一般化 5.2] 下記の上段と下段とに対し，それぞれ次の関係が成り立つ：

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \infty} f(x, y) = g(x) \text{ が } I_K \text{ で } \left\{ \begin{array}{l} \text{各点収束} \\ \text{一様収束} \end{array} \right\} &\implies \\ \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{f(x, y)}{\varphi(y)}\right)^{\varphi(y)} = e^{g(x)} \text{ は } I_K \text{ で } \left\{ \begin{array}{l} \text{各点収束} \\ \text{一様収束} \end{array} \right\} & \end{aligned}$$

証明 定理 3.2 の 2 連不等式の x に $f(x, y)/\varphi(y)$ を代入して各辺を $\varphi(y)$ 乗すれば

$$e^{f(x, y)\varphi(y)/(\varphi(y)+f(x, y))} \leq \left(1 + \frac{f(x, y)}{\varphi(y)}\right)^{\varphi(y)} \leq e^{f(x, y)}$$

が得られる．これより，定理 3.3 の証明と同様な考え方で

$$\begin{aligned} & \left| \left(1 + \frac{f(x, y)}{\varphi(y)}\right)^{\varphi(y)} - e^{g(x)} \right| \leq \left| \left(1 + \frac{f(x, y)}{\varphi(y)}\right)^{\varphi(y)} - e^{f(x, y)} \right| + \left| e^{f(x, y)} - e^{g(x)} \right| \\ & \leq \left| e^{\varphi(y)f(x, y)/(\varphi(y)+f(x, y))} - e^{f(x, y)} \right| + \left| e^{f(x, y)} - e^{g(x)} \right| \\ & \leq e^{f(x, y)} \left(\left| e^{-M_K^2/(\varphi(y)-M_K)} - 1 \right| + \left| e^{g(x)-f(x, y)} - 1 \right| \right) \\ & \leq e^{M_K} \left(\left| e^{-M_K^2/(\varphi(y)-M_K)} - 1 \right| + \left(e^{|g(x)-f(x, y)|} - 1 \right) \right) \end{aligned}$$

が得られる．これより，各点収束の場合は明らかである．他方，一様収束の場合には条件より

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \sup_{x \in I_K} |g(y) - f(x, y)| = 0$$

が成り立つことから，文献 [1] により次の一連の式：

$$1 \leq \overline{\lim}_{y \rightarrow \infty} \sup_{x \in I_K} e^{|g(x)-f(x, y)|} \leq e^{\lim_{y \rightarrow \infty} \sup_{x \in I_K} |g(x)-f(x, y)|} = e^0 = 1$$

が成り立つ．従って，一般化 5.2 は証明された．□

最後に，Wallis の公式，つまり，定理 3.4 で与えた Wallis の公式を別の形で表現してみよう．

[Wallis 5.3] 次の公式が成り立つ：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{\sqrt{n} (2n)!} = \sqrt{\pi}$$

証明 定理 3.4 により，次の極限式：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{\sqrt{n} (2n)!}$$

が成り立つことを示せばよい．定理 3.4 の証明の中にある漸化式：

$$nS_n = (n-1)S_{n-2} \quad \therefore S_n = \frac{n-1}{n} S_{n-2}$$

を解くことにより， $n \geq 2$ なる $n \in \mathbf{Z}^+$ に対し次の式：

$$S_{2n} = \frac{(2n-1) \cdot (2n-3) \cdots 1}{(2n) \cdot (2n-2) \cdots 2} \cdot S_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \cdot \pi$$

が得られる．これと定理 3.4 とにより

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \cdot \pi$$

が成り立ち，これより目指す極限式は容易に導くことが出来る．□

参考文献

- [1] 中田道孝・新関章三，上極限と下極限による単調関数の特徴づけについて，高知大学学術研究報告 第 38 卷 自然科学，(1989) 1-10
- [2] 高木貞治，解析概論 (改訂第三版)，岩波書店 (2002) 116-117
- [3] 藤原松三郎，数学解析第一編 微分積分学 第一卷 (訂正第 7 版)，内田老鶴圃 (1957) 375-376

編集後記

あれほど暑かった今年の夏も嘘のように感じられる 12 月である。皆様にはご健勝でしょうか。お陰で創刊から無事に 1 年が経った。このサーキュラーも順調に育っている。

ということで、ここに第 5 号を発行する。今号にも中西先生から論文とエッセイの合せて 2 編を投稿して頂いた。深く感謝を申し上げたい。また高木富士夫（元東北大学）さんと先号の編集後記でも述べたようにこの「通信」の共同編集者の新関（元高知大学）さんの論文を載せることができた。

最近の物理学会誌 9 月号で中西 襄先生が物理学会から素粒子賞を受賞されたことを知った。読者の皆様と共にその受賞を喜びたいと思います。

今号にはページ数の都合で原稿の募集要領とか投稿規程を割愛したが、4 号に載せてあるからそれを見て投稿をお願いしたい（矢野 忠）