

数学・物理通信

11 卷 6 号 2021 年 9 月

編集 新関章三・世戸憲治・矢野 忠

2021 年 9 月 14 日

目次 (Contents)

1. ジャズ演奏者の心拍間の相関

小方厚, 井上満晶 2

2. 三角関数の加法定理

矢野 忠 18

3. 立体角

矢野 忠 28

4. 編集後記

世戸憲治 31

1. Correlation between Heartbeats of Jazz Players

Atsushi OGATA and Michiaki INOUE 2

2. Addition Theorems of Trigonometric Functions

Tadashi YANO 18

3. Solid Angle

Tadashi YANO 28

4. Editorial Comments

Kenji SETO 31

ジャズ演奏者の心拍間の相関

小方 厚*¹, 井上 満晶*²

Correlation between Heartbeats of Jazz Players

Atsushi Ogata and Michiaki Inoue

概要

ピアノトリオでジャズを演奏中のプレイヤーの心拍を相関関数で解析した。取り上げた楽曲は速めのブルース Billie's Bounce と、遅めのバラード My One and Only Love である。各奏者の自己相関関数、およびトリオを構成する3人の奏者、ピアニスト・ベーシスト・ドラマーのうち2者が作る3対の組み合わせに対する相互相関関数を求めた。さらに演奏された音楽の音量変化と3人の心拍との相互相関関数も求めた。バラードの相関関数はブルースに比べて複雑であった。この関数は奏者間で感情のうねりがどう伝わるかを示し、どの奏者が演奏の主導権を持つかを暗示することがわかった。

1 はじめに

非線形同期という現象が知られている [1]。たとえば、複数のメトロノームのリズムが次第に一致する、あるいは何万匹ものホタルが同時に明滅する... などの現象である。著者は、それならジャズ演奏における演奏者の心拍が楽曲のリズムに引き込まれるのではないかと期待した。クラシックと異なり、ジャズではリズムが前面に出ていて、しかも曲を通して一定に保たれるからである。実験してみると、奏者の心拍は一定のリズムに合うのではなく、演奏に合わせて高揚したり沈静したりすることがわかった。最初の目論見には反することになったが、実験としてはそれなりの価値があると考え、ここに報告する次第である。

理工学ではあらかじめ「理論」があり、この理論を証明するために「実験」を行う。これに対し社会科学では統計データを睨んで何かを演繹すること（しかもそれが間違っても悪びれないこと）が多いようだが、その轍を踏むことになった。

この研究ではピアノ・ベース（コントラバス）・ドラムスから成るピアノトリオの演奏を、相関関数を用いて解析した。第1に、ふたりの奏者の心拍間の3対の相関を取り上げた。第2に、個々の奏者の心拍とトリオ演奏の結果として生じた音量との相関をとりあげた。演奏そのものの結果として聞いてわかりやすく、また計算機で抽出しやすいのは、音量とテンポであるが、ジャズの場合は、テンポはあまりかわらないからである。

音楽は時系列データである。相関関数はこれをそのまま時間領域で扱い、フーリエ解析は周波数領域で扱う。前者が表で後者が裏である。ジャズ演奏において、奏者間で感情の起伏が時間的にどう伝わっていくかを知るためには、この相関関数という古典的な方法は、フーリエ解析よりも直感的で適していると考えた。

以下にこれまでの関連研究を示す。音楽を聴くと興奮したりリラックスしたりする。これは自律神経系が影響を受けるためとされる。特に脳波のアルファ帯域成分はリラクセーションに対応し、心拍変動と密接に関連する [2]。聴くだけでなく歌ったり演奏したりすれば情動はさらに大きく変化し、心拍への影響も大きくなる [3]：心拍は、演奏時の感情の高揚・沈静を目に見える形にあらわすよい指標となる。

*¹ 高エネルギー加速器研究機構, High Energy Accelerator Research Organization

*² 日本電気株式会社 バイオメトリクス研究所, Biometrics Research Laboratories, NEC

演奏中の心拍の変化は精神的・心理的要因 [4] だけによるものではない。演奏は肉体労働であるから、肉体的・生理的要因も大きく関与する。両者を分離することは、簡単ではない。ドレミファ... を繰り返すような機械的なピアノ演奏はおもしろいものではないが、このときの心拍の変化はもっぱら肉体的・生理的要因による心拍の変化と考え、これをバッハの楽曲の演奏時と比較した報告がある [5]。いくつかの楽器では演奏時のエネルギー消費量が測定されている [6, 7]。関連する研究に、音楽に合わせる体操すなわちラジオ体操時の心拍の変化の測定がある [8]。

肉体的な負荷をとまなわない、精神的・心理的要因のみによる心拍の変化については、著者の知る範囲では文献 [4] に若干の記述がある程度である。いっぽう [9], [11] では、(演奏したときではなく) 音楽を聴いたときにそのリズムに心拍が引き込まれる現象が観測されている。すでに述べたように、今回の実験でも演奏時に心拍が音楽のリズムに引き込まれる現象を期待したが [1, 12], 顕著な現象は観測されなかった。また、心拍のパワースペクトルから自律神経系の挙動を探ることも行われている [4, 10]。

本論文は次のように構成されている。

第 2 章では、詳しくない方のために、ジャズについて述べた。第 3 章で心拍測定に用いた器具と測定方法、および演奏の録音方法を述べる。第 4 章ではまず相関関数とその性質を概説し、この関数を計算機上でデジタル・データに対しどのように実行するかを述べた。第 5 章は測定結果を示す。まず録音した 2 曲について、それぞれ奏者たちの心拍変化と、演奏された曲における音量変化を示し、相関関数に対する著者の所見を示した。データは客観的だがこの所見は主観的である。どなたも、この章の記述は参考にとどめ、独自の解釈をしていただく余地がある。第 6 章ではまとめと考察を示した。

2 ジャズ - 集団による即興演奏

まず、すこしくジャズについて解説したい。ジャズでは集団演奏が主流である。すぐれたソロ演奏もあるが、少人数集団いわゆるコンボでは、メンバーが互いに共鳴して盛りあがったり、仕掛けたり、あるいは他人を引き立てるために敢えて自分を抑えたりする。コンボの最小形態はピアノ・ベース・ドラムスからなるピアノトリオである。これにフロント楽器が加わり、カルテット、クインテットなどとなるが、こうした 4 人以上のコンボもピアノトリオを内包することが多く、この場合はピアノトリオはリズムセクションと呼ばれる。そこでこの研究ではピアノトリオで演奏中のメンバーの心拍を測定した。

心拍測定において演奏した曲目は

- Charlie Parker 作曲のブルース Billie's Bounce, 120bpm と 200bpm.
- Guy Wood 作曲のバラード My One and Only Love, 70bpm と 80bpm

の 2 曲で、どちらも 4/4 拍子である。bpm (beats per minute) はテンポの単位で、1 分間の 4 分音符数である。ブルースのテーマは 12 小節から成る。このテーマの長さをコーラスといい、これを単位として用いる。ブルースの 1 コーラスは 12 小節である。いっぽう My One and Only Love は 1 コーラスが 32 小節で、いわゆる AABA 形式を持つ。ここで A,B はそれぞれ 8 小節で、テーマは A というモチーフを 2 度繰り返したのち B(サビあるいはブリッジ bridge という) で気分を変えたのち A に戻る。

著作権上の制約から Billie's Bounce の楽譜だけを図 1 に示す。ジャズメンはメロディとコード (F7, Bb7 などの記号) だけが記載された、この簡単なリードシートと呼ばれる楽譜に基づき、時間にとらわれずに演奏する。テンポは任意であるが、曲の途中で変化することはあまりない。ただしコードではなくモードに基づく演奏法もあるし、あるいはもっと自由な「フリー」という演奏法もある。



図1 Billie's Bounce のリードシート。

ピアノトリオの一般的な演奏ルーチンでは、まずテーマを合奏する。テーマに続きテーマに基づいたアドリブを奏者が交互にイニシャチーブを取って1ないし数コーラス行う。これをソロと言う。最後にテーマに戻って終了する。ベーシストはソロをしないことがある。ドラマーはソロを取らないほうがむしろ普通であり、その代わりにピアノ奏者と4小節ずつ交互に掛け合い (four bars) を行うことがある。

ドラマーはリズムを刻み、テンポを保つ。またコーラスの切れ目でアクセントをつけたりする。ベーシストはリズムに乗って、コードの構成音により楽曲の構成を示すが、ソロも行う。ピアニストの左手は基本的にコードの構成を示し、右手はメロディを示す。アドリブ部分では即興でメロディを作る。

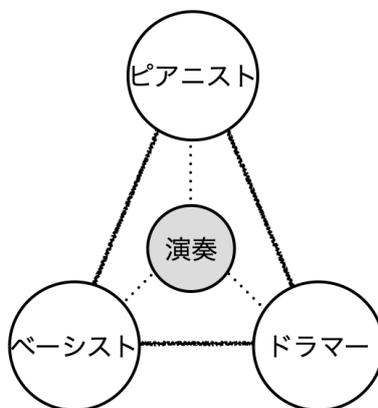


図2 研究で対象とした相互作用: 3本の実線が示す各人の心拍間の相互作用と、3本の点線が示す演奏の音量と各人の心拍との相互作用。

図2が示すように、演奏はピアニスト・ベーシスト・ドラマー三者の相互作用の上に成り立つ。しかし演奏者が直接認識できるのは演奏結果としての「音」である。相互作用はこの音を媒介して成り立っている。ただし実際の演奏では共演者の表情や聴衆の反応なども影響する。

この研究では各奏者の演奏中の心拍を測定するとともに、演奏結果をも録音した。各奏者の出すピアノの音・ベースの音・ドラムスの音をそれぞれ独立に録音することができなかつたので、解析では総合的な音の大

きさのみを対象とした。物理学・音響工学の慣例では「音圧」で音の大きさを表す。音は空気を媒体とする波であり、音圧は媒体の平衡位置からのずれであると考えられることに由来する。ずれは双方向を持つので、音圧は正負の数値で表す。しかしここでは振動振幅の絶対値に比例する実効音圧を音楽の指標とし、この実効音圧を「音量」と言う。音量は正の値を持ち、最小値はゼロである。

図2の実線3本と点線3本が表す6対の相互関係を探るために、それぞれ相互相関関数を計算した。また相互関係に先立ち、図で丸で囲んで示した、3人の奏者の振幅と演奏に固有な特徴を求めるために、自己相関関数も求めた。

3 心拍の測定と演奏の録音

心拍測定には(株)エムティーアイ製 iPhone 向け通信機能付き心拍計 karadafit Heart^{*3}を用いた。この機器ではベルトを胸部に巻き、検出器を心臓に外部から圧着する。腕時計型の心拍計もあるが、楽器演奏時の使用には不適である。検出器の信号は Bluetooth 経由で iPhone アプリケーション karadabeat に送られる。この karadabeat は標準化周期 200ms で心拍の時間変化を記憶する。このファイルをパソコンでオフライン処理した。

心拍の単位も音楽のテンポ同様 bpm (beats per minute) である。連続するふたつの心拍の間隔を、単位を秒 (s) として w とすれば、bpm 値は $60/w$ である。bpm 値は心拍ごとに更新される。

演奏者はいずれも男性であって、測定時にはそれぞれ

- ピアニストは 22 歳。楽器歴 3 年、平常時の心拍は約 65bpm.
- ベーシストは 24 歳、楽器歴 7 年、平常時の心拍は約 76bpm.
- ドラマーは 21 歳、楽器歴 9 年、平常時の心拍は約 72bpm.

であった。テンポは演奏時に指定した。楽曲の構成すなわちソロの順序やコーラス数は特に打ち合わせはなかったが、何回かリハーサルをくり返しているうちに一定のパターンに落ち着いた。演奏はリラックスした雰囲気で行われた。

同じ曲をテンポを変え、それぞれ2回ずつ演奏・録音してデータを取得した。演奏のテンポを iPhone アプリケーション live BPM - Beat Detector (Daniel Bach 制作^{*4}) で測定したところ、設定値 $\pm 5\%$ の変化が見られた。この変化は心拍の変化に比べて十分小さいものとみなし、テンポの影響を考慮外とした。

録音は iPhone 6 内蔵マイクにより、Apple ボイスメモを用いてモノラルで行った。サンプリング周波数 48kHz、量子化ビット数 16bit で、WAV フォーマットで記録した。内臓マイクロフォンを使用したときの iPhone6 による録音の周波数特性は、およそ 200-2kHz で平坦とされる [13]。一般に iPhone の録音用ハードウェア・ソフトウェアは音楽鑑賞には性能が不十分とされるが、この目的に限れば十分であった。

^{*3} <https://manualzilla.com/doc/6666738/karadafit-heart>

^{*4} <https://www.facebook.com/liveBPM-375964512436631/>

4 相関関数

4.1 相関関数の定義

相関関数は、ふたつの事象に対応する関数 $f(t)$, $g(t)$ から、ふたつの事象の因果関係を探るために用いる [14, 15]. ここでは関数の変数は時間 t とする. ふたつの関数が同一 $f(t) = g(t)$ である場合の相関関数を自己相関関数, ふたつの関数が異なる場合の相関関数を相互相関関数という. それぞれ次のように定義する.

$$C_{ff}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t)f(t+\tau)dt, \quad (1)$$

$$C_{fg}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t)g(t+\tau)dt, \quad (2)$$

自己相関関数 $C_{ff}(\tau)$ は関数値 $f(t)$ と, そこから τ ずれたときの関数値 $f(t+\tau)$ の積 $f(t)f(t+\tau)$ の, t についての平均である. 相互相関関数 $C_{fg}(\tau)$ は積の第2因子 $f(t+\tau)$ を $g(t+\tau)$ で置き換えて得る. 出発点では t は変数であったが, 式 (1,2) においては, もはや t は変数ではなく, τ だけが変数である.

一般には, 相互相関関数は原因と結果を関連づけることに用いられる. 例えば 地震と建物の振動, 降雨量と河川の流量, 液体の摂取と排尿などのふたつの量の関連である. これらにおいては, 前者が原因・後者が結果であることが明確である. ジャズトリオ演奏の場合は三角関係における仕掛けたり仕掛けられたり, 原因・結果がないまぜになっており, 状況が複雑化する.

式 (1),(2) で定義される自己相関関数・相互相関関数に対して

$$C_{ff}(\tau) = C_{ff}(-\tau), \quad (3)$$

$$C_{fg}(\tau) = C_{gf}(-\tau), \quad (4)$$

が成り立つ. 従って $C_{fg}(\tau)$ をグラフに示したとき, その $\tau < 0$ 領域は, C_{gf} のグラフの $\tau > 0$ 領域を示す.

4.2 測定データへの適用

相関関数は定常状態にある事象を記述することを念頭に定義されている. しかしこの実験での測定長は曲長に限られており, 式 (1),(2) のように $T \rightarrow \infty$ とすることは実現不可能である. そこで改めて曲長を T と書き, ふたつの相関関数を

$$C_{ff}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} f(t)f(t+\tau)dt & \tau \geq 0, \\ \frac{1}{T+\tau} \int_{-\tau}^T f(t)f(t+\tau)dt & \tau < 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$C_{fg}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} f(t)g(t+\tau)dt & \tau \geq 0, \\ \frac{1}{T+\tau} \int_{-\tau}^T f(t)g(t+\tau)dt & \tau < 0, \end{cases} \quad (6)$$

とする. 式 (5),(6) の定義により式 (3),(4) すなわち $C_{ff}(\tau) = C_{ff}(-\tau)$, $C_{fg}(\tau) = C_{gf}(-\tau)$ が成り立つ.

式 (5), (6) は, 連続信号 (アナログ信号) に対して定義されている. そこで計算では自己相関関数および相互相関関数として, データ $f(n\Delta t)$, $g(n\Delta t)$, $n = 1, 2, \dots, N$ に対し, $\tau = k\Delta t$, $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ として,

$$C_{ff}(\tau) = \begin{cases} C_{ff}(k\Delta t) &= \frac{1}{N-k} \sum_{n=1}^{N-k} f(n\Delta t)f(n\Delta t + k\Delta t), & \tau \geq 0, \\ C_{ff}(-k\Delta t) &= \frac{1}{N-k} \sum_{n=k+1}^N f(n\Delta t)f(n\Delta t - k\Delta t), & \tau < 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$C_{fg}(\tau) = \begin{cases} C_{fg}(k\Delta t) &= \frac{1}{N-k} \sum_{n=1}^{N-k} f(n\Delta t)g(n\Delta t + k\Delta t), & \tau \geq 0, \\ C_{fg}(-k\Delta t) &= \frac{1}{N-k} \sum_{n=k+1}^N f(n\Delta t)g(n\Delta t - k\Delta t), & \tau < 0, \end{cases} \quad (8)$$

を求める.

式 (4) に従い, $C_{fg}(\tau)$ の $\tau \geq 0$ 領域の実験データを, $C_{gf}(\tau)$ の $\tau \leq 0$ 領域の実験データと見なした. すなわち後に示す図 6, 図 9 では, $C_{fg}(\tau)$ と $C_{gf}(\tau)$ の 2 枚を 1 枚の $C_{fg}(\tau)$ のグラフで代表した: $C_{fg}(\tau)$ のグラフにおける $\tau < 0$ 領域は, C_{gf} の実験データを示している.

すでに述べたように, ブルース Billie's Bounce を 120bpm と 200bpm, バラード My One and Only Love を 70bpm と 80bpm と, 同じ曲をテンポを変えそれぞれ 2 回ずつ演奏しデータを取得した. それぞれの演奏に固有の特徴が見出されたが, 特にブルースとバラードの差はテンポに起因することが大きいと考え, ここではそれぞれ前者はテンポが早いほうの 200bpm (演奏時間 $T = 312\text{s}$), 後者はテンポが遅いほうの 70bpm ($T = 410\text{s}$) の, ふたつの演奏の実験データを紹介し解析する.

各奏者・各楽曲を通して, 心拍は, 平静時の平均値を基準として正規化し, つぎに演奏時の平均値を差し引き, 両極性データに変換してから相関を計算した. これに対して音量は単極性である.

1 曲ひとりの演奏時間当たりのデータ数を $N = 1,024$ とした. すなわち, 心拍については iPhone アプリから送られた心拍データを Billie's Bounce では $\Delta t = 312\text{ms}$ 毎に, My One and Only Love では $\Delta t = 400\text{ms}$ 毎に標本化した.

iPhone における録音の標本化周期は 48kHz である. 音量については録音時間を幅 Δt を持つ 1024 のビンに分割し, 各ビンにおける音量の絶対値の合計をそのビンに対応する時刻の音量とした, すなわちヒストグラムを取った. この操作はデータにローパス・デジタルフィルタをかけたことと等価である.

たとえば楽音 A (中央ラ) の周波数は 442Hz である. 録音はこの帯域の楽音の高調波をじゅうぶんカバーする特性を持っている. しかしわれわれの鼓膜はともかく, 脳は音波の波の山や谷をいちいち認識しているわけではない. 音波の波束の変化を認識しているのであって, その時間領域は, 楽譜に書かれた音符の持続時間, あるいは強弱記号が持続・変化する時間領域にあり, 高々百 bpm 台である. 音譜が対象とする時間領域を周波数領域に移せば, おおよそ心拍の周波数領域と重なり, 心拍と相関をとる妥当性を与える.

このヒストグラム化により, 演奏における音数, すなわち演奏結果を音符に直したときに音符数が多いほど, 言い換えると 4 分音符より 8 部音符, 8 分音符より 16 部音符が多いほど音量が大きく出る傾向がある. この意味では, ヒストグラム化の結果は音量と言うより音が持つエネルギーといったほうが適切かもしれない. このことも心拍と相関を取ることに意味を与える.

図 3 は録音した Billie's Bounce と My One and Only Love のソノグラムである: ここでは, 横軸が楽曲の経過時間, 縦軸が周波数であって, 各時刻の音量の周波数分布がグレイコード化して表示される. 枠外の

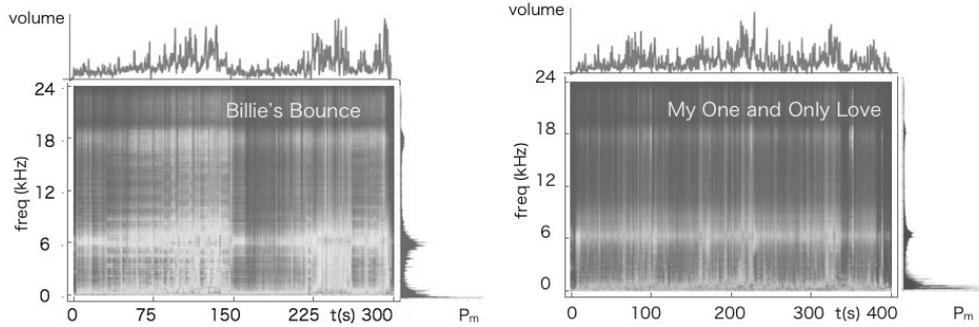


図3 左は Billie's Bounce (200bpm), 右は My One and Only Love (70bpm), それぞれのソノグラムと, 音量 (枠上) およびオーディオ領域における積分スペクトル (枠右).

右は時間的に積分したオーディオ領域における周波数スペクトルである. 信号は 1kHz 周辺と 6kHz 周辺に集中している. 前者はピアノ音とベース音, 後者はもっぱらドラムセットのシンバル音に対応すると思われる. 枠外の上を示したものが 1024 分割し各ビンでヒストグラム化した音量である. ヒストグラムでは 1kHz 帯と 6kHz 帯の信号は圧縮されてしまうが, 枠外の音量グラフの傾向はソノグラムと一致している.

5 測定結果

5.1 心拍上昇の平均

まず, 演奏による心拍の平均の変化を, 安静時を 100% としたときの上昇率とともに表 5.1 にまとめた. 文献 [6] によれば, 一般には演奏時のエネルギー消費はピアノが最も小さく, ついでベース・ドラムスの順になる. ピアノで機械的に音階を弾いたときの心拍変化は [7] に記載されている. これらの古いデータはわれわれの感覚と合致する. 表 1 におけるベーシストの比較的大きな心拍上昇は, 奏者の個性であろう.

	pianist	bassist	drummer
usual	65	76	72
Billie's Bounce	73.7±5.6(113%)	103.6±6.8(136%)	93.3±12.6(129%)
My One and ...	69.3±4.4(106%)	90.8±4.6(119%)	75.1±3.2(104%)

表 1 正常時, Billie's Bounce を 200bpm で演奏したとき, 及び My One and Only Love を 70bpm で演奏したときの 3 人の奏者の平均心拍数 (単位は bpm) ・標準偏差と上昇率.

以下ではピアニスト, ベーシスト, ドラマーの心拍を表すために添字 p, b, d を用い, 音量には添え字 m を用いる. すなわち自己相関関数を $C_{xx}, x = p, b, d, m$ で表す. さらに, トリオにおける 3 人の奏者を, ピアニスト・ベーシスト, ベーシスト・ドラマー, ドラマー・ピアニストの 3 対に分解し, それぞれ 2 つの相互相関関数, $C_{pb}(\tau); C_{bp}(\tau), C_{bd}(\tau); C_{db}(\tau)$ および $C_{dp}(\tau); C_{pd}(\tau)$ を $\tau > 0$ 領域において求めた. 次に式 (4) の性質を用い, $C_{bp}(\tau) = C_{pb}(-\tau), C_{db}(\tau) = C_{bd}(-\tau), C_{pd}(\tau) = C_{dp}(-\tau)$ とし, 最終的には 6 枚のグラフを $C_{pb}(\tau), C_{bd}(\tau)$ および $C_{dp}(\tau)$ の 3 枚のグラフにまとめた. 心拍間の場合と同様に, 奏者の心拍と音量の相互相関関数 $C_{xm}, C_{mx}, x = p, b, d$ のグラフも C_{xm} にまとめた.

5.2 Billie's Bounce : 200bpm のブルース

図 4 は Billie's Bounce 200bpm の演奏における 3 奏者の心拍, および録音された音量の時間変化である. 最上段は演奏中の各奏者の心拍の時間変化で, その下にテーマ提示, ソロなどの時間配分を上段のグラフの時間軸に対応させて示した: テーマを 2 コーラス提示したのち, ピアノが 6 コーラス, ベースが 4 コーラス, ドラムスが 3 コーラスのソロを行い, その後にテーマを 2 コーラス繰り返して終わる. 最下段は録音された全音量の時間変化で, 縦軸は線形の任意目盛, 時間軸は心拍のグラフと共通である.

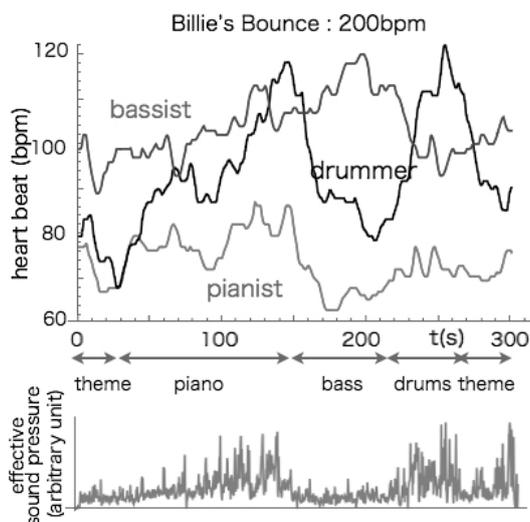


図 4 Billie's Bounce (200bpm) を演奏時の各奏者の心拍の時間変化 (最上段) とテーマ提示・ソロなどの時間配分 (その下), および録音結果された音量の時間変化 (最下段, 線形任意目盛).

演奏を始めると奏者達の心拍は, 一様に少し上がってすぐに下がる. 前半では音量も各奏者の心拍も徐々に上昇する. 次第に乗ってくるという感じであろう. 150s あたりからのベースソロでは, ベーシストの心拍は次第に上がるが, 他の二人, ピアニストとドラマーの心拍は下がる. ベースソロ終了後はベーシストの心拍は下がり, 代わってドラムソロを行うドラマーの心拍が上がる. ソロの開始・終了時間から心拍の増減までには 20-30s の時間遅れがある.

5.2.1 自己相関関数

図 5 は音量の自己相関関数 C_{mm} および各奏者の自己相関関数で, 縦軸は任意目盛である. 音量は単極性なのでその自己相関関数も単極性である. いっぽう心拍は平均値を基準ゼロとする双極性信号に変換したので, その自己相関関数も双極性となった.

奏者たちの自己相関では, ピアニストの心拍に高周波数成分が最も豊富に存在する. この傾向は次節で示すバラードの演奏にも共通していた. ピアニストに比べるとベーシストの心拍は低周波でうねる. ドラマーの傾向は 2 者の中間にある.

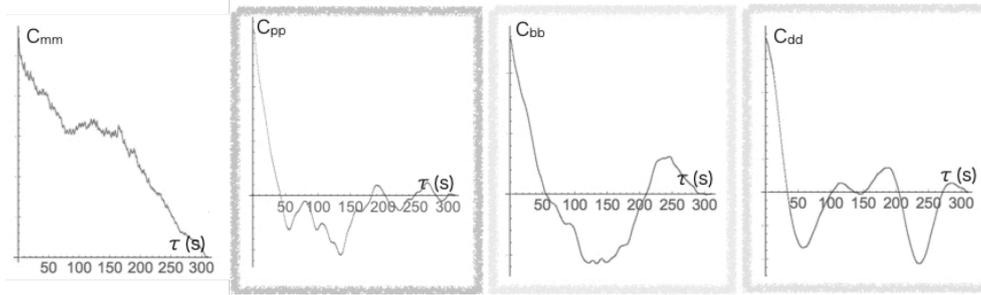


図5 Billie's Bounce における録音された音量の自己相関関数 C_{mm} と、ピアニスト、ベーシスト、ドラマーそれぞれの心拍の時間変化の自己相関関数 C_{pp} , C_{bb} および C_{dd} . 縦軸は任意目盛.

5.2.2 $\tau = 0$ における相互相関の関数値

図6はBillie's Bounceのトリオ演奏における、左側は奏者間の、右側は奏者と音量との相互相関関数である。視覚的な理解を助けるために相互相関関数のグラフの $\tau > 0, < 0$ の領域にそれぞれ C_{xy}, C_{yx} を大書した。

まず $\tau = 0$ における相関関数の値を見ると、正のとき ($C_{pd}(0) = C_{dp}(0), C_{pm}(0) = C_{mp}(0), C_{dm}(0) = C_{md}(0)$), ほぼ0のとき ($C_{bd}(0) = C_{db}(0), C_{bm}(0) = C_{mb}(0)$), 負のとき ($C_{pb}(0) = C_{bp}(0)$) がある。

$C_{pd}(0) = C_{dp}(0) > 0$ より、ピアニストとドラマーは、一方が高揚(沈静)している瞬間には、多くの場合他方も高揚(沈静)している。右列では、 $C_{pm}(0) = C_{mp}(0) > 0, C_{dm}(0) = C_{md}(0) > 0$ であるから、音量とピアニストとドラマーの心拍の高揚・沈静が一致する傾向がある。確かに図4でも、ピアニストの心拍と、ドラマーの心拍は同時に上下している時間が多い。ピアニストとベーシストでは $C_{pb}(0) = C_{bp}(0) < 0$ が示すようにこれが逆転し、一方が高揚(沈静)すると他方は沈静(高揚)する傾向がある。ベーシストとドラマーの場合は、どちらとも言えない。あるいは、互いに正と逆の二つの場合が同じくらいの頻度で起きている。また $C_{bm}(0) = C_{mb}(0) \sim 0$ であって、ベーシストは音量の変化に対してクールである。

5.2.3 相互相関関数全体では...

C_{pm}, C_{dm} では $\tau = 0$ に近接する正ピークは負側にずれている。これは奏者が大きな音量を出してから心拍が高揚するまでの遅れであって、 $\tau = 15 - 30s$ である。

C_{pb} では最初のピークが $\tau > 0$ 領域、すなわち $\tau = 70s$ 付近にある。この程度の遅れ時間でベーシストの心拍はピアニストに追随し、ピアニストが高揚すれば高揚し、沈静すれば沈静する。 C_{pd} のピークは $\tau = 10s > 0$ に存在し、ドラマーの心拍もピアニストに、しかしより早く追随する。「ピアノトリオ」の名が示すように、ピアニストがリーダーシップを発揮しているというべきであろうか。いっぽう C_{bd} によれば、ベーシストとドラマーの心拍はこのような単純な関係にはない。

次のような見方もできる。 C_{pd} より、ピアニストの心拍変化から約10s遅れてドラマーの心拍がピアニストに倣って変化する。 C_{db} の原点に近接する左側の最大ピークの位置から、ドラマーから約60sの遅れでベーシストの心拍が変化する。最上段の C_{pd} のグラフからは、ピアニストから約70sの遅れでベーシストの心拍が変化する読み取れた。これはピアニストからドラマーへの伝搬時間約10sと、ドラマーからベーシストへの伝搬時間約60sとの和、70sとほぼ一致する。

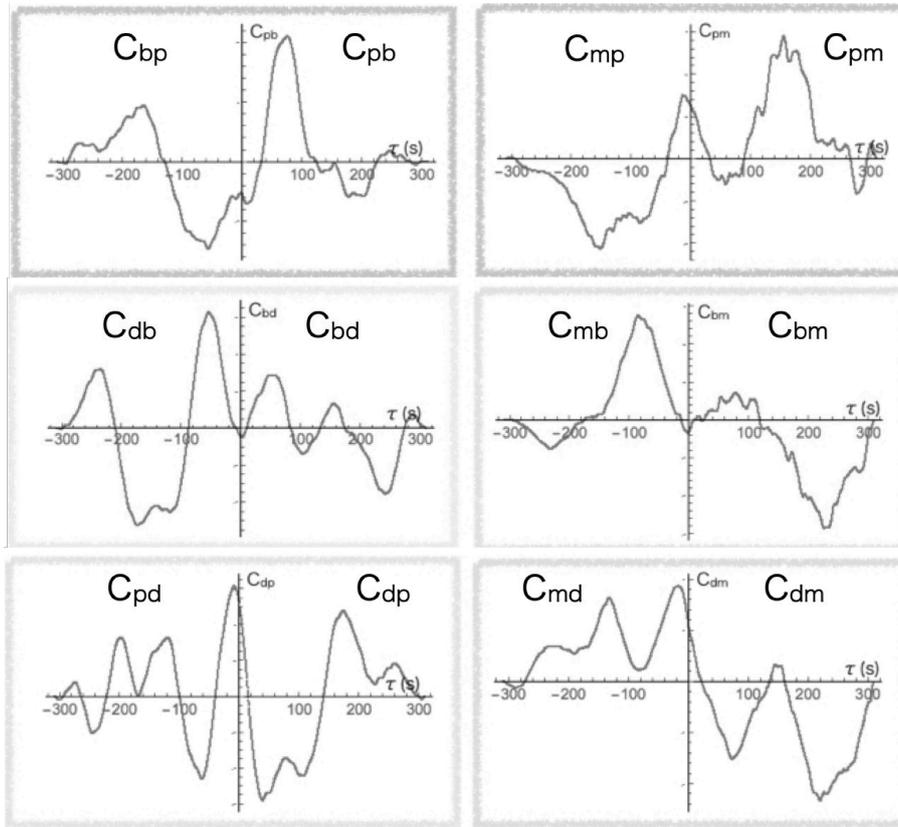


図6 左列は Billie's Bounce のトリオ演奏における3対の奏者間での心拍の相互相関関数とパワースペクトル。右列は録音音量と3人の奏者の心拍との相互相関関数。添え字 p, b, d, m はそれぞれピアニスト、ベーシスト、ドラマーおよび音量を示す。相互相関関数の $\tau < 0$ 領域には、 $C_{xy}(-\tau)$ に代えて $C_{yx}(\tau)$ 実速値を表示した。縦軸は任意目盛。視覚的な理解を助けるためにグラフの $\tau > 0, \tau < 0$ の領域にそれぞれ C_{xy}, C_{yx} を大書した。

5.3 My One and Only Love : 70bpm のバラード

図7は My One and Only Love, 70bpm のトリオ演奏における各奏者の心拍、ソロなどの時間配分および録音された音量の時間変化である。1コーラスのテーマの後、1コーラスのピアノソロがある。すでに述べたようにこの曲は AABA 形式であるが、次の第3のコーラスは AA と BA に二分され、AA の部分はベースソロ、BA の部分は3奏者によるテーマの再現とコードとなる。

合奏・ソロなどのルーチンに対応する心拍の上下動は図4の場合ほど顕著ではない。ドラマーの心拍が 240s あたりで突然大きくなっているが、ここはピアノソロの AABA の B で盛り上がった部分である。

以下に相関関数を示すが、Billie's Bounce と比較すると、この My One and Only Love ではどのグラフにおいても細かい凹凸が多数見られる。

5.3.1 自己相関関数

図8は演奏された音量の自己相関関数と、各奏者の自己相関関数である。

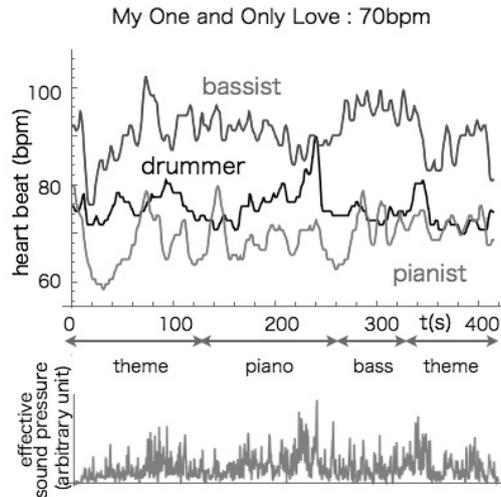


図7 My One and Only Love 演奏時の各奏者の心拍の時間変化 (最上段) とテーマ提示, ソロなどの時間配分 (その下), および録音音量の時間変化 (最下段, 線形任意目盛).

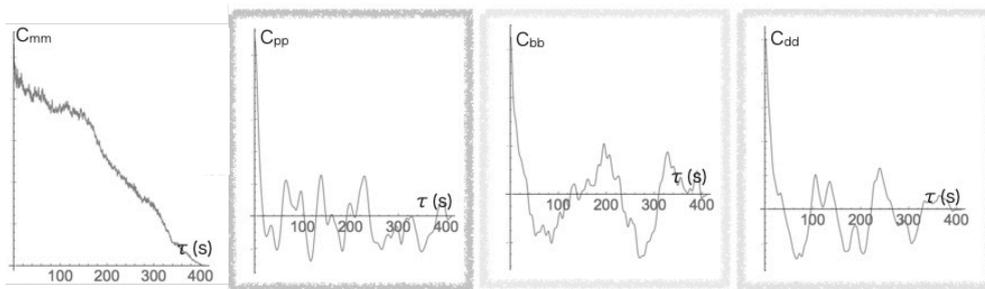


図8 My One and Only Love における録音音量と3人の奏者の心拍の自己相関関数. 縦軸は任意目盛.

この曲は AABA 構成で, A,B の長さは各 30s 強であり, 周波数では約 0.033Hz である. 特にピアニストの C_{pp} のグラフに顕著な凹凸はこの A,B の長さに関係がありそうだ.

図5に比べると, C_{pp}, C_{bb}, C_{dd} の全てで, $\tau = 0$ における最大から減少していく勾配が (この図の時間軸の範囲が図5の約 4/3 倍の範囲に及んでいることを考慮しても), 著しく急である. どの奏者においてもこの演奏では過去を引っ張っていない, あるいは演奏の切り替えが早い, 別な言葉で言えば手数が多いというになる.

5.3.2 奏者間の相互相関関数

図9の左列は3対の奏者間の, 右列は音量と各奏者の心拍間の相互相関関数である. 左列ではまず $C_{pb}(0) = C_{bp}(0)$, すなわち時間軸原点付近の大きなピークが目につく. Billie's Bounce の場合と異なり, この演奏ではピアニストとベーシストの心拍が同時に高揚・沈静する場面が多かったのである. C_{pb}, C_{bp} にも P_{bp}, P_{pb} にもブルースの場合よりも山と谷が豊富で, ピアニストとベーシストはブルースの場合よりも細かいやりとりを交わしてしている.

全体に C_{pd} の振幅は C_{dp} の振幅より大きい. ピアニストの心拍はドラマーの心拍に大きく影響し, その影響は時間的に遅くなるほど大きく, 言い換えれば後になるほど効いてくる. しかし逆方向の, ドラマーからピ

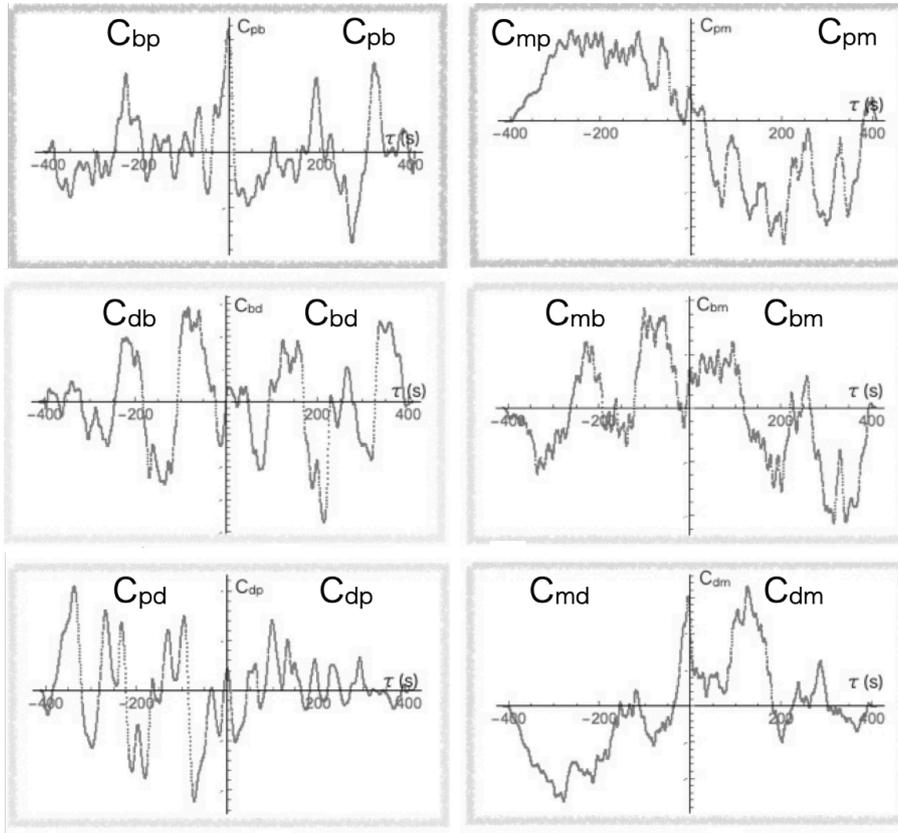


図9 左列は My One and ONLY Love のトリオ演奏における3対の奏者間での心拍の相互相関関数. 右列は録音音量と3人の奏者の心拍との相互相関関数. 相互相関関数の $\tau < 0$ 領域には, $C_{xy}(-\tau)$ に代えて $C_{yx}(\tau)$ 実値値を表示した. 縦軸は任意目盛. 視覚的な理解を助けるためにグラフの $\tau > 0, \tau < 0$ の領域にそれぞれ C_{xy}, C_{yx} を大書した.

アニストへの影響は小さい.

5.3.3 音量対奏者の相互相関関数

まず, C_{dm} (C_{md}) が時間軸原点 $\tau = 0$ 付近に大きなピークを持つ. ドラマーの心拍が高揚すると同時にバンドの音量が上がることを示している. 図7にもこの傾向があったが, バンド演奏では当然であろう. C_{bm}, C_{mb} と P_{bm}, P_{mb} では低周波数成分により小振幅の高周波数成分が重畳している. この曲ではベーシストは他の奏者より大づかみに曲に対峙し, その上に細かい対応も加えていることを示す.

T を曲長 410ms として, 図10には図9の C_{pm}, C_{dm} に $\pm \sin(\pi\tau/T)$ を重ねた. 位相差を持つ正弦関数の相互相関関数として, 例えば

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sin(t) \sin(t + \tau \pm \pi/2) dt &= \mp \frac{1}{2} \sin \tau \pm \sin \tau \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\cos T \sin T}{2T} \\ &= \mp \frac{1}{2} \sin \tau, \end{aligned} \quad (9)$$

が計算できる. 図10において波線で示した包絡線は, C_{pm} においてはよく, C_{dm} も強いて言えば, 曲長を半周期とする正弦波とみなせる. ピアニスト・ベーシストの心拍がそれぞれ $T/2=210s$ 程度音量と前後すれば

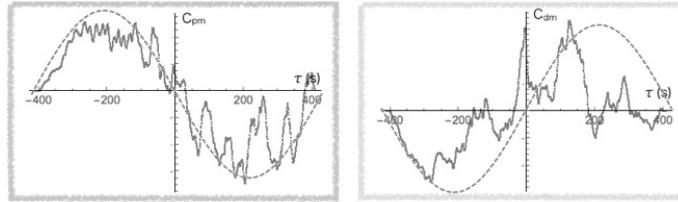


図 10 C_{pm} , C_{dm} に $\pm \sin(\pi\tau/T)$ を重ねてみると...

このような包絡線が生じるはずである。しかし図 8 をみただけでは、正弦波へのあてはめが正当かどうかは判断が難しい。ただし曲長があらかじめ決まっている場合は、演奏者が曲全体の長さを正弦波の半波長のよう意識することはあり得る。ただし図 10 はバラードに特有の現象らしい。ブルースすなわち Billie's Bounce の C_{pm} , C_{dm} で包絡線を 1 周期の正弦関数で近似するのは適当ではない。

C_{pm} のグラフは第 4 象限に存在する。これはピアニストの心拍が音量を追って上下することを示している。 C_{dm} はこれに対し主として第 I 象限に存在し、心拍が音量をリードすることを示す。図 9 ではどちらかと言えばベーシストの心拍は音量を追う傾向がある。一般にジャズ演奏ではベーシストは地味な脇役とされるが、この演奏もその例に漏れないようである。ただしこの録音では、200Hz 以下のゲインが小さく、このためにバンド全体の音量へのベースの寄与が小さく聞こえる。ベース音が大きく録音されたら、音量に関わる相関関数の様相は異なったものになった可能性がある。

6 まとめと考察

6.1 相関関数測定

測定から系統的な結果が導かれたとは言い難いが、ブルースとバラードには相違点が多い。

ジャズ演奏の時間長の単位としては、コーラス長、ソロ長、曲長がある。ブルースではかろうじてドラマーがコーラス長を意識しているようである。バラードのこの演奏ではそもそも全体で 3 コーラスしかなかったこともあり、コーラス長は結果に影響を及ぼしていないようである。成り行き任せの演奏では曲長は意識されないこともあるが、図 10 ではピアニストの心拍の変化に曲長が反映しているようだ。このグループにリーダーは不在であったが、実質的に「仕切った」のはピアニストで、彼は全体の曲の流れを意識していたようである。

ブルースでは、相関関数の凹凸はソロ長に影響されている。しかしバラードでは、相関関数にソロ長よりも細かい凹凸が多い。ブルースのパターンはほぼ決まっており、演奏は予定調和的に、悪く言えば一本調子になる。これに対しゆっくりしたバラードでは、細かい感情の起伏が心拍に反映するのであろう。音量を変えるのは奏者の意識あるいは心理であるが、これが心拍に反映するには時間が必要である。図 6 によれば、奏者が大きな音量を出してから心拍が高揚するまでに $\tau = 15 - 30s$ の遅れがあった。

6.2 パワースペクトル

自己相関関数のフーリエ変換はパワースペクトル，相互相関関数のフーリエ変換はクロスパワースペクトルである：パワースペクトル，クロスパワースペクトルはそれぞれつぎの2式で定義される。

$$S_{ff}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_{ff}(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau, \quad (10)$$

$$S_{fg}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_{fg}(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau. \quad (11)$$

特に自己相関関数とパワースペクトルがフーリエ変換対をなすことを Wiener-Khinchin の関係という [15].

相関関数とスペクトルは表裏一体であるが，スペクトルの方が相関関数よりも理解しやすい現象もある。われわれの場合，ブルース Billie's Bounce ではコーラスが周期を与えると考えることができる。ここでは 312s の曲長で 17 コーラスが繰り返されたので，1 コーラスは約 17.3s，周波数に換算すると約 0.057Hz である。バラード My One and Only Love の場合は 1 コーラスは約 125s と長い，AABA 形式の内部構造を有し，A,B とも継続時間はほぼ 30s，周波数に換算すると約 0.033Hz であって，曲長 410s で 13 回余り繰り返される。予備的な解析では，スペクトル上のこれらの周波数が持つパワーが，演奏者の組み合わせに依存することが見てとれた。

文献 [4] における心拍のパワースペクトル解析によれば，交感神経系活動が持つ周波数は 0.05-0.15Hz であって，その逆数は 6.6-20s である。 C_{pm}, C_{dm} のグラフのピークの $\tau = 0$ からのずれは，心拍の交感神経系活動に対する応答時間と解釈することができる。言い換えれば，このおくれは，演奏で音を出したことが心拍という生理として現れるまでの時間であろう。

交感神経は血流に関係し，副交感神経は呼吸に関係する。心拍スペクトルにおいては，交感神経の活動は心拍の 0.05-0.15Hz 成分に対応し，副交感神経は 0.15-0.4Hz 成分に対応するとされる [16]。われわれもパワースペクトルから，これら 2 成分の分離を試みたが成功しなかった。

6.3 畳み込みとの関連

関数 $f(t), g(t)$ の畳み込みは

$$(f * g)(\tau) = \int_t f(t)g(\tau - t)dt, \quad (12)$$

で定義される。相関関数と比べると g の変数は $t + \tau$ ではなく $\tau - t$ である。相関関数が過去を研究するのに対し，畳み込みは将来を予測するという側面がある。すなわち，相関は過去に聞いた他者の演奏がどれだけ遅れて自己の演奏に反映されたかを示すのに対し，畳み込みは他者の演奏を聞いて，それをこれからどのように積極的に自己の演奏に反映させるかを示すことができよう。制御工学では畳み込みはシステム同定，さらには自動制御へとつながる。

畳み込みに基づいて，システムを記述できれば，人工知能でジャズ演奏を模擬したり構築したりすることも可能性がある。ただしそのような目的には心拍データだけでは頼りなく，脳波データも必要であろう。

6.4 実験結果の汎用性

一般的には実験結果に汎用性があれば，その実験は応用が効くから価値があるとされる。しかし，ジャズはいうなれば「一期一会」であって，演奏は再現しない。演奏結果も，奏者の心拍変化も，曲目・演奏メンバー・

体調・演奏の場の雰囲気その他の偶然に左右される。ここで得られた相関関数も一例にすぎないものであり、もっぱらデータを読んで空想する楽しみを与えるだけのものになりそうだ。

しかしよりデータを体系的に集めることができれば、発展が期待できよう。例えば、奏者が男性と女性でどう異なるか？ 混成集団では？ さらにジャズとクラシックでは、など。ジャズの場合では、オスカー・ピーターソン・トリオとビル・エヴァンス・トリオではインタープレイが異質であることが定評となっている。また、レイ・ブラウンやロン・カーターには、ベース・トリオと称する、ピアノトリオと同じ編成だがベーシストがリーダーシップをとった演奏がある。このように誰が見ても（聞いても？）明らかな特徴を持つ、有名な演奏の相関関数を解析し対比することができたら、もっとわかりやすい結果が期待できよう。

ここでは心拍を対象としたが、こうした目的には脳波の測定が正統的と思われる。その他、心電図・呼吸・発汗その他のパラメータの測定も有用であろう。しかし、今回の測定では、資金が数千円でも可能な研究があることを、デモンストレーションできたと自負している。ちなみにここで用いた心拍測定器の本来の目的は、ジョギング、ウォーキングなどに役立てることであった。あえて量子力学の測定の問題を持ち出すまでもなく、理工学では「観察者効果」すなわち観察するという行為が観察される現象に与える変化が問題になる。測定用のケーブルでぐるぐる巻きにされた状態で演奏しても、正常時の演奏とは異なったものになりそうだ。その点、われわれの心拍測定では観察者効果は極めて小さかったであろう。

文献 [17] では、心拍や脳波が持つ多くのパラメータを手掛かりに、感情の「質」にまで踏み込むことも提案されている。そこでは各時刻における感情を、valence 軸（快・不快に対応）および arousal 軸（覚醒・弛緩に対応）がつくる二次元平面（4つの象限がそれぞれ happy, angry, sad, relaxed すなわち「喜怒哀楽」に対応）に投影することが試みられている。もっとも、ジャズ演奏の場で働く感情の表現には、喜怒哀楽とは別な切り口が必要かもしれない。

この研究では心拍の相関関数という角度から、ジャズ演奏を見ることを試みた。おなじ心拍を聴診器で聞いても、その「見立て」は医者次第であり、誤診もある。同様に、相関関数にもいろいろな見方があり得る。ここで示したのは論文の著者による見立て例と考えていただきたい。

相関関数は統計学の手法である。統計・統計情報は次第に品質管理や生産管理などで用いられるようになり、知識社会と言われる現代では人材育成などにも視野を広げつつある。統計学の惹句にデータマイニング（知識の金鉱掘り）があり、これは経験知・暗黙知のデータベースから独創的な有用な知識を組織的に取り出し、諸計画に生かす技術・理論だと言う。この試みもマイニングの一種であろう。ただし、金鉱を掘り当てたかと言われると心許ない。

謝辞

この論文執筆の契機となったのは、寺内大輔氏、関口道彦氏、小林亮氏、野村亮氏との議論であった。住田卓也氏、村尾優太氏、山崎大志氏には演奏をお願いした。また吉田彩夏氏、澤田健斗氏には測定をお願いした。この場をお借りしてこれらの方々に深く感謝の意を表す。

参考文献

- [1] 蔵本 由紀「非線形科学 同期する世界」集英社 (2014). ISBN-13: 978-4087207378.
- [2] 藤本千草, 難波経豊, 白石裕子, 大浦まり子, 平川栄一郎, 山本康子, 松本圭蔵「音楽鑑賞中におけるアルファ帯域成分と心拍変動の関係」香川県立医療短期大学紀要 4:129-131 (2002).

- [3] 中原英博, 古屋晋一, 木下博「音楽演奏及び傾聴時の情動がヒトの自律神経活動に及ぼす影響」日本音楽知覚認知学会・秋季研究発表会 (2009).
- [4] 藤永博「心拍変動と感情」経済理論, 314:23 (2003).
- [5] Hidehiro Nakahara, Shinichi Furuya, Peter R. Francis, and Hiroshi Kinoshita "Psycho-physiological responses to expressive piano performance" International Journal of Psycho-physiology, 75(3):268-276 (2010). <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167876009002980>.
- [6] R. Passmore, J. V. G. A. Durnin, "Human Energy Expenditure", Physiological Rev. 35 (1955) 801-840. <https://journals.physiology.org/doi/abs/10.1152/physrev.1955.35.4.801>
- [7] 木下博「音楽演奏のエネルギー消費 (2)」音楽 x 研究 On-Ken Scope, ヤマハ音楽研究所 (2014). http://www.yamaha-mf.or.jp/onkenscope/kinoshitahiroshi1_chapter2/, http://www.yamaha-mf.or.jp/onkenscope/kinoshitahiroshi1_chapter3/
- [8] 伊藤由美子, 園田高一, 荒達雄, 伊藤孝「体操の運動強度に関する基礎的研究. 立位・椅座位姿勢の違いによる比較。」日本体育大学紀要, 33:97 (2004). <http://library.nittai.ac.jp/kiyou/docs/33-2-97-107.pdf>.
- [9] 福本誠, 楠芳之, 長島知正「音楽のテンポと心拍の同期現象」感性工学研究論文集, 4:97-104, (2003). https://www.jstage.jst.go.jp/article/jjske2001/4/2/4_2_17/_pdf.
- [10] "Guidelines : Heart rate variability", Euro. Heart J. 17 : 354 (1996).
- [11] Yoshimasa Kurosawa, Shusaku Nomura, Keita Yoshimura "A pilot study on the effect of music-heart beat feedback system on human heart activity" Journal of Medical Informatics and Technologies 22:251 (2013). http://jmit.us.edu.pl/cms/jmitjrn/22/14_Nomura_3.pdf
- [12] 郡宏, 森田善久「生物リズムと力学系」共立出版, 東京 (2011). ISBN 978-4-320-11000-7.
- [13] Allion Labs, Inc. "Smartphone User Experience Analysis - Audio II" (2016) . <https://www.allion.com/smartphone-user-experience-analysis-audio-ii/>
- [14] 辻義之, 田中宏彦, 大野哲靖「相関とスペクトル解析」プラズマ核融合学会誌, 85(9):620-630 (2009). <http://dl.ndl.go.jp/info:ndljp/pid/10457613>.
- [15] 日野幹雄「スペクトル解析」朝倉書店, 東京 (1977). ISBN 4-254-12511-9.
- [16] 早野 順一郎, 山田 眞己, 藤浪 隆夫, 横山 清子, 渡辺 與作, 高田 和之「心拍変動と自律神経機能」生物物理, 28(4)198-202(1988). <https://doi.org/10.2142/biophys.28.198>
- [17] Gaetano Valenza, Luca Citi, Antonio Lanata, Enzo Pasquale Scilingo, and Riccardo Barbieri. "Revealing real-time emotional responses: a personalized assessment based on heart-beat dynamics" Scientific Reports, 4:4998, (2014). <https://www.nature.com/articles/srep04998>

三角関数の加法定理

矢野 忠^{*1}

Addition Theorems of Trigonometric Functions

Tadashi YANO^{*2}

まえおき

およそ 25 年くらい前に「研究と実践」(愛数協)に「加法定理の証明いろいろ」というタイトルで、三角関数の加法定理の導出法を 4 つほど書いた [1]^{*3}。これはそのエッセイのほぼ 25 年ぶりの改訂である。

改訂にあたって、このエッセイにあった、幾何学的な導出を割愛した。それはいつか別の機会に取り上げることにして、この「三角関数の加法定理」では残した古い部分を修正したり、あまり幾何学的ではない導出をいくつか追加するにとどめた。時代錯誤の表現もあろうが、ご寛容をお願いしたい。

1 はじめに

先日、愛媛大学の情報処理センターで行われた電子メール (E-mail) の講習会に参加したとき、インターネットのいわゆる「掲示板」といわれた情報交換の場の中に数学教育という項目があったので中をのぞいてみた。その中に、三角関数の加法定理をテーマにしたものが 5, 6 回あったので、見てみたら、「加法定理を高校生に教育実習のとき教えたいのだけれど、どのように教えたらよいでしょう」という問いかけがあって、それに続いて「何かおもしろい証明法をご存知ありませんか」と結ばれていた。

2 回転行列を用いた導出

その掲示板での議論によれば、いまの高校数学での「標準的な加法定理の証明法は回転行列を用いるものだろう」という。それはつぎのようなものだろう^{*4}。

平面上の半径 1 の円周上にある点を反時計回りに角 α の回転をしたのち、さらに β の回転をしたとき、それぞれの回転を $R(\alpha)$, $R(\beta)$ と表す。このとき、この 2 つの回転を続けて行うことは角 $\alpha + \beta$ の一つの回転 $R(\alpha + \beta)$ とみなせるから (図 1 参照),

$$R(\alpha + \beta) = R(\beta)R(\alpha) \quad (2.1)$$

が成立する。ところで、2 行 2 列の回転を表す行列として、ここで $R(\alpha)$ を

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

と表せば、(2.1) から

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

^{*1} 元愛媛大学工学部

^{*2} yanotad@earth.ocn.ne.jp

^{*3} 愛数協は愛媛県数学教育協議会の略で、民間教育団体、数学教育協議会 (略称: 数教協) の下部団体である。また、数教協は「研究と実践」という雑誌を発行しているが、「研究と実践」(愛数協) はもちろんこれとは異なる。

^{*4} これは 1995 年ごろの高校数学の様相を反映している。現在では 2 行 2 列の行列を高校数学では教えていないはずだ。

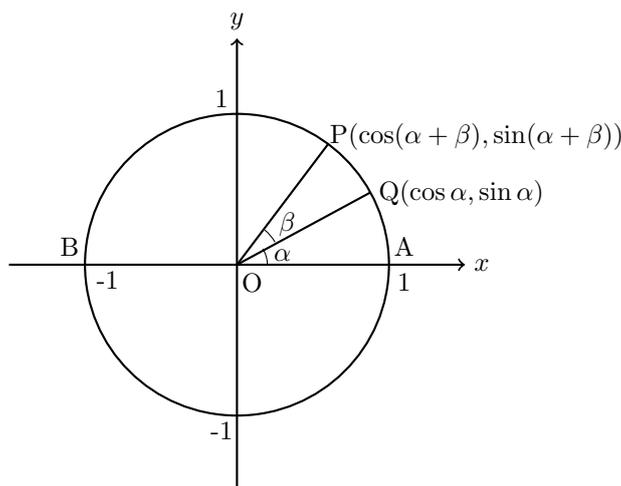


図1 回転行列を用いた導出

が成り立つ。右辺の行列の積を計算すれば、

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

したがって、(2.4) で行列の対応した各要素が等しいとすれば、

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (2.5)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (2.6)$$

が得られる。これが加法定理である*⁵。

もっともこの導出で問題なるのは (2.2) の式をどうやって導出するかであろう。そのことはすでに知っているという前提の下での導出法ということになる。

3 Euler の公式による導出

昔、高校生の頃に覚えたのは Euler (オイラー) の公式による加法定理の導出であった [2]*⁶。

Euler の公式は

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha \quad (3.1)$$

である。これと指数法則

$$e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)} \quad (3.2)$$

を用いれば、

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \end{aligned} \quad (3.3)$$

であるから、両辺の実部と虚部とをそれぞれ等しいとおいて (2.5), (2.6) を求めるものであった。

*⁵ [7] によれば、これらの公式をそれぞれコスモス・コスモス・サイタ・サイタ (一はマイナス)、サイタ・コスモス・コスモス・サイタと覚えたらいいという。

*⁶ この Euler の公式は 1995 年当時も現在でも高校数学の範囲外であろう。

この導出では Euler の公式の導出が高校数学の範囲を越えるので、この方法は高校であまり使えないのだが、あまり厳密なことを言わなければ、その証明はそれほど難しいものではない (Maclaurin 展開を用いてやればすぐ証明できる)*7.

実は高校生のときに勉強した受験参考書 [3] に「 $e^{i\theta}$ は平面上の原点を中心とする、半径 1 の円 (単位円という) 上の点の原点のまわりの角度 θ の回転を表す」と書いてあった。回転行列の表現は複素数の極形式表示 $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とはそれほど離れているものではない*8.

いま、 $1 \cos \theta + i \sin \theta$ で 1 と i を 2 行 2 列の行列で*9

$$1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

と表示すれば、 $1 \cos \theta + i \sin \theta$ は

$$\cos \theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin \theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = R(\theta) \quad (3.5)$$

となるので、回転行列 $R(\theta)$ と結びつくであろう。ここで

$$i \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

の対応が唐突のようだが、

$$e^{i\pi/2} = \cos \pi/2 + i \sin \pi/2 = i \quad (3.7)$$

であるから、実数 1 を純虚数 i とするには、実軸上の線分 $\overline{01}$ を複素平面の原点のまわりに反時計回りの角 $\pi/2$ の回転をしてやればよい。このとき回転行列は

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

であるから、上の対応づけはそんなに不思議でもない。

一方、

$$1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

は単位元 1 の 2 次元行列への一般化とも考えられるし、(3.5) で $\theta = 0$ の回転と考えて、回転行列 $R(\theta)$ で $\theta = 0$ とおけば (3.9) の対応がつく。

4 余弦定理による導出

おもしろい導出法として紹介されていたのは、余弦定理による導出であった (図 2 参照)。

まず、単位円上での二つの点 $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$ と $Q(\cos \beta, \sin \beta)$ の間の距離の 2 乗を余弦法則で求めれば、

$$\begin{aligned} PQ^2 &= OP^2 + OQ^2 - 2OP \cdot OQ \cos(\alpha - \beta) \\ &= 2 - 2 \cos(\alpha - \beta) \end{aligned} \quad (4.1)$$

が得られる。ここで、円が単位円であるから、 $OP = OQ = 1$ であることを用いた。

*7 付録 1 にその導出を述べる。

*8 [4] ではここで述べたことは逆に回転行列から複素数の極形式を導いている。付録 2 を参照せよ。

*9 普通には $\cos \theta$ の前には数の 1 を書かないが、 $\sin \theta$ の前の i と対照させるために数 1 をおいた。

つぎに、2点間の距離の2乗の公式を用いて求めれば、

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 \\ &= 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \end{aligned} \quad (4.2)$$

が得られる。

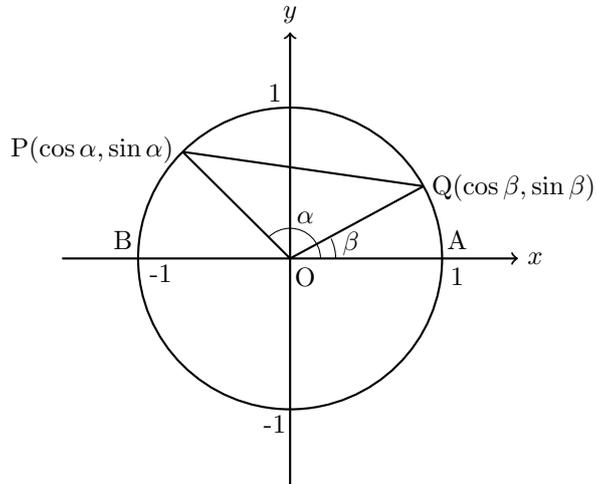


図2 余弦定理を用いた導出

(4.1) と (4.2) とは等しいから

$$2 - 2 \cos(\alpha - \beta) = 2 - (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \quad (4.3)$$

が成り立つ (図2 参照)。

この関係から、 \cos 関数についての加法定理

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (4.4)$$

が得られる。(4.4) でもいいのだが、 $\cos(\alpha + \beta)$ の形に書き換えておきたい。

この (4.4) で β を $-\beta$ とおきかえれば、

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - (-\beta)) &= \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta) \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned} \quad (2.5)$$

と \cos の加法定理が得られる。

また、(4.4) で α を $\pi/2 - \alpha$ と置き換えれば

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta \quad (4.5)$$

となり、ここで、余角の公式

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) &= \sin(\alpha + \beta) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos \alpha \end{aligned}$$

を用いれば, (4.5) から

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (2.6)$$

となる. これで $\sin(\alpha + \beta)$ の加法定理が得られる.

この証明が高校での三角関数の加法定理の証明として現在もっとも一般的であるらしい*10.

旧稿では, この後の節では私が高校生のころに使った教科書にある, 幾何学的な加法定理の証明を述べていたが, これは別の機会に譲ることにしてあまり幾何学的でない導出を2つつけ加えておこう.

5 ベクトルの加法からの導出

この加法定理の導出は『高等学校の基礎解析』 [6] の導出をすこしだけ書き換えたものである. この導出はベクトルの加法を知っていればやさしい.

この導出に入る前に, 中学校時代の理科で学んだ力の合成 (すなわち, 力の加法) の平行四辺形の法則を思い出してほしい. 一つの力が大きさ OA で点 O から点 A の方向に働き, もう一つの力が大きさ OB で点 O から点 B の方向に働いていたとする. このとき, この力の合力は力の OA と OB とを二つの辺とする平行四辺形の対角線の方向に働き, その力は平行四辺形の対角線 OP の大きさに等しい*11.

このことを式で

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{OB} \quad (5.1)$$

と表す.

こういう事実を中学校の理科で学んだことであろう. そして, この力は大きさと方向 (向きも含む) をもった量である. このような大きさと方向を持つ量をベクトルという*12. ベクトルには力の他に物体の位置の移動距離を示す変位とか速度がある.

図3のように直交座標系 Oxy と x 軸と y 軸を原点 O のまわりに角 β だけ反時計方向に回転させた直交座標系を OXY とする. 点 P から OX に下ろした垂線の足を Q とし, OY に下ろした垂線の足を R とする. このとき

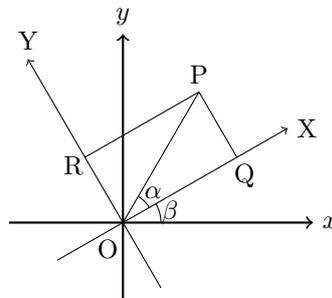


図3 ベクトルの加法からの導出

\vec{OP} , \vec{OQ} , \vec{OR} をベクトルとすれば,

$$\vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{OR} \quad (5.2)$$

が成り立つ.

ここで, 点 P の座標を (x, y) , 点 Q の座標を (x_1, y_1) , 点 R の座標を (x_2, y_2) とし, ベクトルの加法を成分で表示すれば,

$$(x, y) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad (5.3)$$

*10 これは2020年代に入った現在でも多くの高校の数学教科書の採用している三角関数の加法定理の導出法であろう.

*11 この力の平行四辺形 $OAPB$ は図3に示した $OQPR$ のような長方形には必ずしもならないことに注意しよう.

*12 ベクトルに対して, 大きさだけをもつ量をスカラーという.

である。後はこれらの座標 x, y, x_1, y_1, x_2, y_2 を角 α, β 等の \cos 関数, \sin 関数で表せばよい。

いま OP の長さを $OP = 1$ とすれば, P の座標は

$$x = \cos(\alpha + \beta), \quad y = \sin(\alpha + \beta) \quad (5.4)$$

である。また, Q と R との座標は

$$(x_1, y_1) = (OQ \cos \beta, OQ \sin \beta) \quad (5.5)$$

$$(x_2, y_2) = (OR \cos \left(\frac{\pi}{2} + \beta\right), OR \sin \left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)) \quad (5.6)$$

である。

図 3 からわかるように,

$$OQ = \cos \alpha, \quad OR = \sin \alpha \quad (5.7)$$

であるから, $x = x_1 + x_2$ から

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \cos \left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned} \quad (2.5)$$

が得られる。

また, $y = y_1 + y_2$ から

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \sin \left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{aligned} \quad (2.6)$$

が得られる。

高校数学ではベクトルの加法を学んでいないかもしれない。それで『高等学校の基礎解析』では図 3 の四辺形 OPQR が長方形であるので, 対角線 OP の中点と対角線 RQ の中点が一致することを用いて,

$$\frac{\cos(\alpha + \beta)}{2} = \frac{1}{2}(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \quad (5.8)$$

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{2} = \frac{1}{2}(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \quad (5.9)$$

を導き, これから加法定理を導いている。

この加法定理の導出はつぎの 6 節に述べる武藤の加法定理の導出法にヒントを得ているのかもしれないが, どうも武藤の導出法はその基礎づけが少し難しい感じがする。それに比べて, この 5 節の加法定理の導出はやさしい。

6 武藤徹の導出

この節で武藤の加法定理の導出をみてみよう [7] [8]^{*13}。x 軸上の点の座標が (1, 0) であるとき, 原点 O から点 (1, 0) に向かう大きさ 1 のベクトル (単位ベクトルという) を e_1 で表し,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

と表記する。

^{*13} ただし, 武藤の述べた通りではなく, 少し改変している。

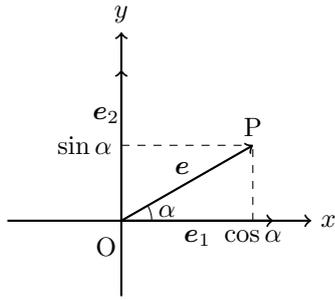


図4 e の表示

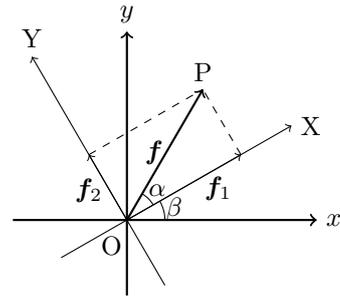


図5 f の表示

この e_1 を原点 O のまわりに反時計方向に角 α の回転を行ったものを e と表せば,

$$\begin{aligned} e &= R(\alpha)e_1 \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \\ &= \cos \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.2)$$

と表される*14.

ここで

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

と表せば,

$$e = e_1 \cos \alpha + e_2 \sin \alpha \quad (6.4)$$

と簡潔に表される.

さらに, この e を原点 O のまわりに反時計方向に角 β だけ回転すれば, 単位ベクトル f となる. この回転を $R(\beta)$ とすれば,

$$f = R(\beta)e \quad (6.5)$$

が得られる.

したがって

$$\begin{aligned} f &= R(\beta)e \\ &= R(\beta)e_1 \cos \alpha + R(\beta)e_2 \sin \alpha \\ &= f_1 \cos \alpha + f_2 \sin \alpha \end{aligned} \quad (6.6)$$

となる. ここで

$$f_1 = R(\beta)e_1, \quad f_2 = R(\beta)e_2 \quad (6.7)$$

である.

ところで $e_2 = R(\pi/2)e_1$ であるから,

$$f_2 = R(\beta)e_2 = R(\beta)R(\pi/2)e_1 = R(\pi/2 + \beta)e_1 \quad (6.8)$$

となる*15.

*14 $R(\alpha)$ は (2.2) ですでに定義されている.

*15 ここで, (2.1) を用いている.

このとき

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2 + \beta) \\ \sin(\pi/2 + \beta) \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

である.

この (6.9) を (6.6) に代入すれば,

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \cos \alpha \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} + \sin \alpha \begin{pmatrix} \cos(\pi/2 + \beta) \\ \sin(\pi/2 + \beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \sin \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.10)$$

一方, $\mathbf{f} = \mathbf{R}(\alpha + \beta)\mathbf{e}_1$ であるから,

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

である. (6.10) と (6.11) とから,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (2.5)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (2.6)$$

と \cos と \sin 関数の加法定理 (加法公式) が求められる.

7 おわりに

以上, 三角関数の加法定理を 5 つの方法で導出した. 5 節と 6 節とは本質的に同じ考えにもとづいているかと思われるが, 記述の見かけはちょっとちがっている. 事実の一つなのに, 加法定理の導出もいろいろ考えられるものである.

参考までに付け加えれば, 3 節で述べた Euler の公式を導くことを主題とした『オイラーの贈物』 [9] が出版されたのが 1993 年であり, また三角関数の公式を Euler の公式から導くという『数学 I・II・III・・・∞』 [10] が出版されたのは 1996 年であった.

このエッセイがはじめて書かれたのは 1995 年であったことを考えると, 時代を感じさせられる. なお, 『数学 I・II・III・・・∞』の学生社版は 1969 年にすでに発行されていたとのことである.

8 付録

8.1 付録 1 Euler の公式の導出

Taylor 展開を用いた導出を示しておこう [5].

まず, 2 つの三角関数 $\cos x$ と $\sin x$ の $x = 0$ のまわりの Taylor 展開 (これを以後 Maclaurin 展開という) を与えておこう. それらは

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots \quad (8.1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots \quad (8.2)$$

である.

つぎに指数関数 e^x の Maclaurin 展開は

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \quad (8.3)$$

で与えられる^{*16}. このとき指数関数の変数 x を形式的に ix に置き換える, すなわち置換^{*17}

$$x \rightarrow ix$$

をすれば, (8.3) は

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \end{aligned} \quad (8.4)$$

(8.1) と (8.2) とを用いれば,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (3.1)$$

が得られる.

8.2 付録 2 回転行列と複素数の極形式

[4] によれば, 回転行列から複素数の極形式への対応を次のように考える.

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \cos \theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin \theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E \cos \theta + I \sin \theta \quad (8.5)$$

ここで

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.6)$$

であり,

$$I^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -E \quad (8.7)$$

であるから, (8.7) は $i^2 = -1$ に対応している.

すなわち,

$$E \rightarrow 1, I \rightarrow i \quad (8.8)$$

と対応させると, (8.5) から複素数の極形式 $\cos \theta + i \sin \theta$ が得られる.

8.3 付録 3 Maclaurin 展開

微積分学の中で分かり難いものの一つに Taylor 展開がある. 特に $x = 0$ の近くでの Taylor 展開を Maclaurin 展開という. $x = 0$ の近くで無限回連続して微分可能な関数 $f(x)$ があるとき, この関数 $f(x)$ がつぎのような x のべき級数で展開できると仮定する.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots \quad (8.9)$$

ここで, $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ は未定の係数である. これらの定数を順次きめていこう. まずはじめに $f(x)$ に $x = 0$ を代入すれば,

$$a_0 = f(0) \quad (8.10)$$

^{*16} Maclaurin 展開については付録 3 を参照せよ.

^{*17} ここでは形式的に置き換えたのであるが, 複素解析における「解析接続」をしたと考えることができる.

が求められる。つぎに, (8.9) を x で微分すれば,

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots \quad (8.11)$$

ここで, (8.11) に $x = 0$ を代入すれば,

$$a_1 = f'(0) \quad (8.12)$$

が求められる。さらに, (8.11) を x で微分すれば,

$$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + 3 \cdot 4a_4x^2 + \dots \quad (8.13)$$

ここで, (8.13) に $x = 0$ を代入すれば,

$$a_2 = \frac{1}{2!}f''(0) \quad (8.14)$$

が求められる。同様に, (8.13) を x で微分すれば,

$$f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4x + \dots \quad (8.15)$$

ここで, (8.15) に $x = 0$ を代入すれば,

$$a_3 = \frac{1}{3!}f'''(0) \quad (8.16)$$

が求められる。以下同様な計算をくりかえせば, 一般に

$$a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0) \quad (8.17)$$

が求められる。はじめは未定であった係数 $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ に上で決めた値を代入すれば,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \dots \quad (8.18)$$

が得られる。これを $x = 0$ のまわりの Taylor 展開 (または Maclaurin 展開) という。

(8.1), (8.2), (8.3) の \cos 関数, \sin 関数, e^x 関数の係数はこのようにして決められている。

(1995.6.29) (2002.1.31 改訂) (2021.9.13 三訂)

参考文献

- [1] 矢野 忠, 加法定理の証明いろいろ, 「研究と実践」(愛数協) 55 号 (1995.9) 17-21
(『数学散歩』(国土社, 2005) 45-51 に所収)
- [2] 藤森良夫, 『解析の基礎』(続編)(考え方研究社, 1954) 637
- [3] 藤森良夫, 『解析の基礎』(続編)(考え方研究社, 1954) 636
- [4] W. W. ソーヤー (宮本敏雄, 田中勇訳), 『数学へのプレリュード』(みすず書房, 1978), 158-159
- [5] 矢野 忠, Euler の公式の導出いろいろ, 数学・物理通信 4 巻 6 号 (2014.9.10) 18-34
- [6] 黒田孝郎, 森毅, 小島 順, 野崎昭弘 他, 『高等学校の基礎解析』(ちくま学芸文庫, 2012) 235-238
- [7] 武藤 徹, 『数学読本』II (三省堂, 1998) 102
- [8] 武藤 徹, 『運動と変化のはなし』(日本評論社, 2012) 42-44
- [9] 吉田 武, 『オイラーの贈物』(海鳴社, 1993)
- [10] 小針あき宏, 『数学 I・II・III・・・∞』(日本評論社, 1996)
(小針さんの名前の「あきひろ」の「あき」の漢字がないので, ひらかなの「あき」で代用している)

立体角

矢野 忠*1

Solid Angle

Tadashi YANO*2

まえおき

これは、およそ 32 年前に「研究と実践」(愛数協) [1] に掲載したエッセイである。以前は word の原稿であったが、latex の原稿になったので少し読みやすくなったのではないかと思う。

1 はじめに

数年前の年末に愛媛大学の何人かの先生方と会食したことがあった。そのときに機械工学を専門とされる F 先生が「近頃の学生はステラジアン (steradian) も知らない」と嘆かれた。数学者の Y 先生もそのとき同席しておられたが、Y 先生は率直な方なので「ええっ、ステラジアンって何です?」と聞き返された。「立体角の大きさの単位ですよ」と F 先生は軽く返答されて、別の話題に移っていかれた。

数学者の Y 先生がステラジアンを知らなかったとしても Y 先生が無知だとは私は思わない。それくらい科学とか技術から現代数学が分離してしまったよい証拠といえよう。また学生が「ステラジアン」とか「立体角」とかいったことを知らないとか理解していないと責めるのも酷なよう気がする。

確かに、立体角についての知識は少なくとも物理や工学を学ぶ学生にとって必要と思われるが、物理の時間に簡単な説明を聞いただけで少なくとも私にとって納得のいくものではなかった。

2 立体角の定義

立体角についての定義はベクトル解析の本に出ているが、わかりやすすくない。最近出版された戸田盛和『ベクトル解析』 [2] には、p. 41 に Coffee Break と題する息抜きのコーナーに「ラジアンと立体角」という題で普通の弧度法、すなわちラジアンで定義される角度の大きさと立体角のことが一頁にわたって述べられている。わざわざ一頁にわたって特に Coffee Break という特定の目につきやすいところに戸田先生 (元東京教育大学名誉教授) が立体角についての説明をおいたのは、やはりこれが分かり難いと考えたからであろう。 [2] によれば、「ラジアンと立体角」の説明は次のようである。

「2つの直線のなす角 $30^\circ 40'$ というように度、分を使っても表されるが、数学や物理学などでは、ラジアン (radian) で表すことが多い。2つの直線の交点を中心とする円を描き、2直線との交点との間の円弧の長さ s 、円の半径 r をとすれば、2直線のなす角 θ は

$$\theta = \frac{s}{r}, \quad (\text{ラジアン}) \quad (2.1)$$

である。

天窓の視角的な広さなどを表すには立体角 (solid angle) が使われる。半径 r の球面上に描いた閉曲線を考

*1 元愛媛大学工学部

*2 yanotad@earth.ocn.ne.jp

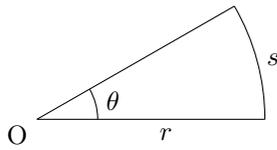


図1 平面角

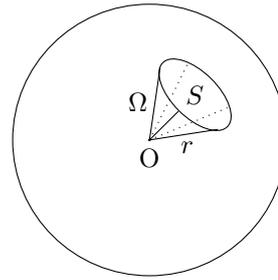


図2 立体角

表1 平面角と立体角

	平面角	立体角
(次元)	無次元	無次元
(定義)	平面角 = $\frac{\text{長さ}}{\text{長さ}}$ $\theta = \frac{s}{r}$ r : 円の半径 s : 角 θ で取り取る円弧の長さ	立体角 = $\frac{\text{面積}}{\text{面積}}$ $\Omega = \frac{S}{r^2}$ r^2 : 球の半径の2乗 S : 立体角 Ω で取り取る球面上の面積
(全角度)	全平面角 = $\frac{\text{円周の長さ}}{r} = 2\pi$	全立体角 = $\frac{\text{球の表面積}}{r^2} = 4\pi$

え、その面積を S とする。このとき

$$\Omega = \frac{S}{r^2}, \quad (\text{ステラジアン}) \quad (2.2)$$

は、球の中心から見たときの視角的な広がりを表す。これが立体角である」

以上の説明で十分かと思うが、あえて付け加えて言えば、平面上の角 θ も立体角 Ω も無次元の量であることに注意して、表1の平面角と立体角の対照表をよく眺めれば、立体角の定義について納得できよう。すなわち、平面角のラジアンによる定義、半径 r の円の円弧 s を円の半径 r で割ることに対応して、立体角の定義として、半径 r の球の球面上の面積 S を球の半径の2乗 r^2 で割れば、立体角 Ω が無次元になる。こうして立体角の定義（ステラジアン）は、平面上の角の弧度法による定義（ラジアン）の拡張として容易に理解できる。

こういったことを私は人に教わったわけではない。立体角について納得できないまま長年教えているうちに、あるときこういった対比を思い付き、それ以来自分でも納得できたと感じるようになった。その後しばらくして、『量の世界』[3]に詳しい説明が述べられているのを知った。そこではある立体角の切りとる球面の面積 S はその半径の2乗 r^2 に比例するからと立体角 Ω の定義で、 r^2 で割る理由も明確に述べられている。しかし、本を読んでも物事を学ぶのはいつの場合にも理解力のない私にとっては難しい。

3 おわりに

微積分の本で立体角の定義を読んだ覚えはないと書こうとして、念のために『解析概論』[4]を開いてみたら、p. 383にちゃんと定義があった。しかし、残念ながら、こんなに後の方までこの本を勉強しなかったから、読んだ覚えがないのは本当である。しかし、ラジアンによる平面角と立体角との対比は[4]では述べられていないから、たとえ、読んでもやはり納得できなかったろう。こんなことは高木先生には明白なことで述べるまでもないと思われたのかもしれない。でも凡人の私にとっては明白なことではなかった。

電磁気学を長らく教えておられた、磯村滋宏先生（愛媛大学名誉教授）も立体角の定義は弧度法による平面角の

定義の一般化だと何かの機会に言われていたのを1, 2年前に伺った。また『エース電磁気学』[5]の中の付録B 立体角の項を書かれた故沢新之輔先生(大阪府立大学元教授)も「立体角(solid angle)は、弧度法を3次元に拡張することによって生まれた概念である」と明確に述べられている。以前にはそのことを明確に述べた文献を見たことがなかった。教え方も少しづつだが進歩している。

2005年以降に見た、弧度法とかラジアンとステラジアンについての包括的な説明が『単位の成り立ち』[6]にある。あまり長い記述ではないが、歴史もいくぶんか書いてあるので役立つであろう。

私がこのエッセイをはじめて書いた1989年ころは、まだ立体角の定義が平面角のラジアン一般化だということをあからさまに書いた本は少なかった。現在ではこの認識は一般的になっていて、立体角の理解で苦しむ人はほとんどいなくなっていると思われる。大学教育はもっとも保守的で進歩が遅いと思ってきたが、そういう状況は大きく改善されていると思う。

その後、私が見かけた文献ではヨビノリたくみさんの書かれた解説[7]が詳しくてわかりやすい。

(1989.5.3)(2002.3.10 改訂)(2021.7.9 三訂)

参考文献

- [1] 矢野 忠, 立体角, 「研究と実践」(愛数協) 31号(1989.9) 11-14
(『数学散歩』(国土社, 2005) 75-77 に所収)
- [2] 戸田盛和, 『ベクトル解析』(岩波書店, 1989) 41
- [3] 銀林浩, 『量の世界』(むぎ書房, 1975) 86-89
- [4] 高木貞治, 『解析概論』改訂第三版(岩波書店, 1961) 383
- [5] 沢新之輔, 小川英一, 小野和雄, 『エース電磁気学』(朝倉書店, 1998) 188-189
- [6] 西條敏美, 『単位の成り立ち』(恒星社厚生閣, 2009) 49-54
- [7] ヨビノリたくみ, 『予備校のノリで学ぶ 大学数学』(東京図書, 2019) 184-197

編集後記

夏はイヤダ、イヤダ、イヤダ！ 早く冬にナレ！ 今年の札幌の夏は本当にどうかしている。例年なら最高気温が 30 度を超すのはひと夏に 2, 3 日もあるかないかです。しかし、今年の夏は、7 月半ばから 8 月初旬まで 3 週間ものあいだ連日 30 度越えて、平年気温より 6, 7 度も高い日が続いていた。こんなことは生まれて初めてのことである。札幌は東京から北におよそ 1000 キロ近くも離れているというのに、日によっては東京より暑い日は何日もあった。一体どうなっているんだろう。こんなことを言うと、本州に住む人から何を贅沢なこと言ってるんだと言われそう。でも、北海道に生まれ育った人間にとっては、元来が暑さに弱く出来ているので、私なんぞは 25 度を超すともうグッタリしてしまう。また、歳と共に暑さに弱くなったせいもある。こんな気温が何年か続くと平年値も上がってしまい、これが当たり前になって、さらに温暖化が進んでしまうのではと心配になってくる。地球温暖化は本当に怖い。

この暑さでいつも思いだすのは熱力学にでてくるカルノーサイクルです。熱機関の理論的サイクルでは、高熱源、低熱源の温度を、それぞれ、絶対温度で T_H , T_L とすると、熱効率は $\eta = 1 - (T_L/T_H)$ という式で表わされる。こんなものが人間にも当てはまるかどうかは分からないのだが、高熱源と低熱源の温度差が大きいほど効率は良くなるということである。例えば、人間の体温を 36.5 度とし、外気温を適温の 20 度としたとき、これらを絶対温度に直して熱効率を求めたときの値を η_{20} とし、また外気温を高温の 33 度にしたときの熱効率を η_{33} とすると、これらの値は $\eta_{20} = 0.0532$, $\eta_{33} = 0.0113$ になる。さらに、これらの比をとると $\eta_{20}/\eta_{33} = 4.7079$ となっておよそ 5 倍も熱効率が違ってくる。これが人間にも当てはまるとすれば、道理で夏負けするわけで、私にとっては暑さによって 5 倍も効率が落ちるというのも本当のような気がしてくる。というわけで早く冬になればいいなど願ってしまう。もっとも、寒すぎても体温を保つためにエネルギーを消費してしまうのでそれなりに効率はまた下がってしまうのかもしれないが、私としては冬の方がいつも体の調子が良い。

話は変わって、今回の号には、矢野忠さんが書かれた「三角関数の加法定理」と「立体角」という基本的な数学の公式を、やさしく、かつ詳しく解説したものが載っている。これらは難しいところはひとつもなくすらすらと読めてしまうもので、矢野さんがいつも言っているようにまさしくエッセイそのものである。もう一つは、久しぶりの小方厚さんの「ジャズ演奏者の心拍間の相関」というもので、これは複数のジャズ演奏者間で心拍数がどのように影響しあうかを相関関数を用いて数学的に解析したものである。ジャズの場合は、クラシックと違って、楽譜にもとづかず他人の演奏を聴きながらアドリブで進行させることが多いので、それが心拍数の相関として表れるのだろう。これはこれまでの「数学・物理通信」ではお目にかかれなかった非常にユニークな論文で、これを読んだ人は、数学でこんなことができるのかと感心してしまうだろう。これからもこのようなユニークな論文が投稿されることを願っている。

(世戸憲治)