

数学・物理通信

3卷1号 2013年3月

編集 新関章三・矢野 忠

2013年4月25日

目次

多重振り子と鎖振り子	3
1.1 動機	3
1.2 多重振り子	3
1.3 鎖振り子	6
1.4 数値計算結果	8
集合算公式の機械的証明	10
2.1 はじめに	10
2.2 一般論	11
2.2.1 素集合展開	11
2.2.2 基本公式	12
2.3 $n = 2$ の場合	12
2.4 $n = 3$ の場合	13
2.5 まとめ	15
四元数と空間回転 3	16
3.1 はじめに	16
3.2 同形写像	16
3.3 直交補空間	18
3.4 \hat{v} の大きさの保存	20
3.5 四元数表現から $SO(3)$ 表現へ	21
3.6 おわりに	23
編集後記	26

Contents

1. Noboru NAKANISHI and Kenji SETO: Multi-Weight Pendulum and Chain Pendulum
2. Fujio TAKAGI: Proof of Formulae in Set Theory by Rote
3. Tadashi YANO: The Quaternions and Rotations 3
4. Shozo NIIZEKI: Editorial Comments

多重振り子と鎖振り子

Multi-Weight Pendulum and Chain Pendulum

中西 襄¹ 世戸 憲治²
Noboru NAKANISHI³ Kenji SETO⁴

1.1 動機

われわれは、「数学・物理通信」第2巻第3号で、弾丸が有限の長さの1次元弾性棒に衝突したときに発生する弾性波を数学的に解析し、歪みの波形がLaguerre多項式 $L_n(x)$ を使ってきれいに書けることを示した(n は反射の回数に対応する)⁵。これに関連して、河合俊治氏⁶より、他にも古典力学でLaguerre多項式の現れる例がありますよというメールをいただいた(2012年12月31日)。彼によれば、1943年渡部信夫という人が次のことを示したということである：

「長さ nl の糸の最下点と n 等分点に等しい質量の錘をつけ、一定の鉛直面内で微小振動を行かせたときの固有振動数 ω は、 $\lambda = l\omega^2/g$ として、 $L_n(\lambda) = 0$ の根として与えられる。(L_n は n 次の Laguerre 多項式)

この方程式は n 個の実根 λ_j , $j = 1, 2, 3, \dots, n$ を持ち、 j 番目の固有振動における下から k 番目の錘($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$)の振幅は $\text{const.} \cdot L_k(\lambda_j)$ で与えられる。」

これは簡単な古典力学の問題なので、ちょっとした計算で確かめることができた。

さらに、全長 $L = nl$ を一定に保ったまま錘の数 n を無限大にすると、多重振り子は鎖振り子になる。鎖振り子は18世紀Daniel Bernoulliによってすでに解かれているが、ここでは多重振り子からの極限として考察する。この極限で、Laguerre多項式がBessel関数になる。

1.2節で多重振り子、1.3節で鎖振り子について述べる。1.4節にこれらの結果の数値計算によるグラフを提示する。

1.2 多重振り子

長さ nl の無質量の糸に l ごとに等質量 m の錘(質点)を付けた多重の振り子を考える。錘は下から順に $0, 1, 2, \dots, n-1$ と番号をつける。固定端から降ろした鉛直線から錘 k までの(向きを考慮した)水平距離を

¹京都大学名誉教授

²北海学園大学名誉教授

³nbr-nak@trio.plala.or.jp

⁴seto@pony.ocn.ne.jp

⁵この論文は改訂し、“Exact expressions for the sums of the non-Fourier trigonometric series arising from time-dependent eigenvalue problems”と改題して、正式の論文として発表した。Prog. Theor. Exp. Phys. 2013; doi: 10.1093/ptep/pts085

⁶大阪市立大学名誉教授

x_k とする. すべて線形近似で考えるので, これは錘の振れの大きさと同一視できる.

$n = 1$ の場合

重力は鉛直方向下向きに mg (g は重力加速度) で, これと釣り合う張力 T_0 の鉛直成分は, 糸が鉛直方向となす角を θ_0 とするとき, 上向きに $mg \cos \theta_0 \doteq mg$ である. したがって, 張力の水平方向の分力は, 内向きに $T_0 \sin \theta_0 \doteq mgx_0/l$ となる. ゆえに水平方向の線形近似の運動方程式は,

$$m \frac{d^2 x_0}{dt^2} = -mg \frac{x_0}{l}. \quad (1.2.1)$$

$x_0 = a_0 \sin(\omega t + \alpha)$ (α は定数), $\lambda \equiv l\omega^2/g$ とおけば, $\lambda a_0 - a_0 = 0$ となり, 固有値方程式は $D_1(\lambda) \equiv \lambda - 1 = -L_1(\lambda) = 0$ である.

$n = 2$ の場合

錘 0 については $n = 1$ の場合と同じ (ただし, $\sin \theta_0 = (x_0 - x_1)/l$ となる). 錘 1 については重力 mg , 斜め下方向に張力 $T_0 \doteq mg$, それと釣り合う斜め上方向の張力 $T_1 \doteq 2mg$ が働く. したがって, 水平方向の線形近似の運動方程式は

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x_0}{dt^2} &= -mg \frac{x_0 - x_1}{l}, \\ m \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -2mg \frac{x_1}{l} + mg \frac{x_0 - x_1}{l}. \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

したがって, $x_k = a_k \sin(\omega t + \alpha)$ ($k = 0, 1$) とおけば,

$$\begin{aligned} (\lambda - 1)a_0 + a_1 &= 0, \\ a_0 + (\lambda - 3)a_1 &= 0. \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

ゆえに固有値方程式は

$$D_2(\lambda) \equiv \lambda^2 - 4\lambda + 2 = 2L_2(\lambda) = 0 \quad (1.2.4)$$

となる. また, (1.2.3) の第 1 式から $a_1 = L_1(\lambda)a_0$ である.

一般の n の場合

同様に, 錘 k ($= 0, 1, 2, \dots, n-1$) に対する線形近似の運動方程式は,

$$m \frac{d^2 x_k}{dt^2} = -(k+1)mg \frac{x_k - x_{k+1}}{l} + kmg \frac{x_{k-1} - x_k}{l}. \quad (1.2.5)$$

ただし, $x_n \equiv 0$ とする. $x_k = a_k \sin(\omega t + \alpha)$ とおけば,

$$\lambda a_k - (k+1)(a_k - a_{k+1}) + k(a_{k-1} - a_k) = 0. \quad (1.2.6)$$

つまり

$$k a_{k-1} + (\lambda - 2k - 1)a_k + (k+1)a_{k+1} = 0, \quad a_n = 0 \quad (1.2.7)$$

を解くことに帰着する. 係数の作る行列式は,

$$D_n(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda - 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda - 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda - 2n + 3 & n - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n - 1 & \lambda - 2n + 1 \end{vmatrix} \quad (1.2.8)$$

で与えられる. この行列式の第 n 行の行列要素は最後の 2 つを除いて 0 なので, 第 n 行について展開すると, $\lambda - 2n + 1$ にかかる $D_{n-1}(\lambda)$ と, $n - 1$ にかかる $-(n - 1)D_{n-2}(\lambda)$ だけで書けることになる. したがって, それは漸化式

$$D_n(\lambda) = (\lambda - 2n + 1)D_{n-1}(\lambda) - (n - 1)^2 D_{n-2}(\lambda) \quad (1.2.9)$$

を満たす. $D_n(\lambda) = (-1)^n n! L_n(\lambda)$ とおけば, (1.2.9) は

$$nL_n(\lambda) = (2n - 1 - \lambda)L_{n-1}(\lambda) - (n - 1)L_{n-2}(\lambda) \quad (1.2.10)$$

となる. これは Laguerre 多項式の漸化式と一致する. $n = 1, 2$ ではすでに OK であることがわかっているから, 数学的帰納法により $D_n(\lambda)$ が Laguerre 多項式の定数倍であることが一般的に証明された. したがって, 固有振動数 $\omega_j = \sqrt{g\lambda_j/l}$ は,

$$L_n(\lambda_j) = 0 \quad (1.2.11)$$

によって与えられる. $\lambda = \lambda_j$ を元の方程式 (1.2.7) に代入すれば,

$$ka_{k-1}^{(j)} + (\lambda_j - 2k - 1)a_k^{(j)} + (k + 1)a_{k+1}^{(j)} = 0, \quad a_n^{(j)} = 0. \quad (1.2.12)$$

これは $a_{k+1}^{(j)}$ が Laguerre 多項式と同じ漸化式を満たすこと示している. ゆえに

$$a_k^{(j)} = \frac{1}{N_j} L_k(\lambda_j). \quad (1.2.13)$$

ここに, N_j は規格化定数.

以上で与えられた問題は解けたことになる. この問題で固有値を決める行列は,

$$H \equiv \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2n - 3 & -n + 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -n + 1 & 2n - 1 \end{bmatrix} \quad (1.2.14)$$

である ($D_n(\lambda) = \det(\lambda E - H)$, E は単位行列). これは実対称行列だから, 固有値問題

$$H\mathbf{u}^{(j)} = \lambda_j \mathbf{u}^{(j)}, \quad \mathbf{u}^{(j)} \equiv (a_0^{(j)}, a_1^{(j)}, \dots, a_{n-1}^{(j)})^T \quad (1.2.15)$$

は標準的な固有値問題で, $\mathbf{u}^{(j)}$ の直交性と完全性は明らかである. 実際, 直交性の式は次のようにして直接導出することができる.

$\mathbf{u}^{(j)}$ の行ベクトルを $[\mathbf{u}^{(j)}]^T$ と書くと, 内積は (1.2.13) により,

$$[\mathbf{u}^{(i)}]^T \mathbf{u}^{(j)} = \frac{1}{N_i N_j} \sum_{k=0}^{n-1} L_k(\lambda_i) L_k(\lambda_j) \quad (1.2.16)$$

で与えられる. Bateman Manuscript Project, Higher Transcendental Functions Vol. 2, p.188 の公式 (9) で, $\alpha = 0$ とおき, n を $n - 1$, m を k と書くと,

$$\sum_{k=0}^{n-1} L_k(x) L_k(y) = n \frac{L_{n-1}(x) L_n(y) - L_n(x) L_{n-1}(y)}{x - y} \quad (1.2.17)$$

である. $i \neq j$ のときは $\lambda_i \neq \lambda_j$ であるから, この式と (1.2.11) から $[\mathbf{u}^{(i)}]^T \mathbf{u}^{(j)} = 0$ が得られる. $i = j$ の場合の計算をするため, (1.2.17) の $y \rightarrow x$ の極限をとると,

$$\sum_{k=0}^{n-1} [L_k(x)]^2 = n[L_n(x)L'_{n-1}(x) - L'_n(x)L_{n-1}(x)] \quad (1.2.18)$$

を得る (ダッシュは微分を表す). Laguerre 多項式の微分の公式

$$L'_n(x) = \frac{n}{x}[L_n(x) - L_{n-1}(x)] \quad (1.2.19)$$

と漸化式 (1.2.10) とを使って (1.2.18) を書き直すと,

$$\sum_{k=0}^{n-1} [L_k(x)]^2 = \frac{n^2}{x}[L_n(x) - L_{n-1}(x)]^2 + nL_n(x)L_{n-1}(x) \quad (1.2.20)$$

となる. $x = \lambda_j$ とおいて (1.2.11) を使うと,

$$\sum_{k=0}^{n-1} [L_k(\lambda_j)]^2 = \frac{n^2}{\lambda_j}[L_{n-1}(\lambda_j)]^2 \quad (1.2.21)$$

となり, 規格化定数は

$$N_j^2 = \frac{[nL_{n-1}(\lambda_j)]^2}{\lambda_j} \quad (1.2.22)$$

で与えられることがわかる.

直交性の式 $[\mathbf{u}^{(i)}]^T \mathbf{u}^{(j)} = \delta_{ij}$ に左から $\mathbf{u}^{(i)}$ を掛ければ, $\mathbf{u}^{(j)}$ の一次独立性により完全性の式 $\mathbf{u}^{(i)}[\mathbf{u}^{(i)}]^T = E$ が得られる. すなわち,

$$\sum_{j=1}^n \frac{L_k(\lambda_j)L_{k'}(\lambda_j)}{N_j^2} = \delta_{kk'} \quad (1.2.23)$$

を得る.

1.3 鎖振り子

前節で考察した多重振り子で, $L = nl$ を有限に保ったまま $n \rightarrow \infty$ とすると, 一様な鎖の振り子が得られる. $k = x/l$ とすると, x は鎖の沿っての先端からの長さである⁷.

a_k に対する方程式 (1.2.7) において, $a_k = f(x)$, $\lambda = l\omega^2/g$ とおけば,

$$\frac{l\omega^2}{g}f(x) - \frac{x+l}{l}[f(x) - f(x+l)] + \frac{x}{l}[f(x-l) - f(x)] = 0 \quad (1.3.1)$$

となる. ここで, $l = L/n \rightarrow 0$ とすれば,

$$\frac{\omega^2}{g}f(x) + x\frac{d^2f(x)}{dx^2} + \frac{df(x)}{dx} = 0 \quad (1.3.2)$$

を得る.

$x = L$ は固定端なので, そこでの境界条件は, $f(L) = 0$ である. もう一方の端 $x = 0$ では一切力が働いていないから自由端である. しかし $f(x)$ は振幅であるから単純に $f'(0) = 0$ という境界条件にはならない. 鎖の先端がちぎれないことから $0 = \lim_{l \rightarrow 0}(a_1 - a_0) = \lim_{l \rightarrow 0}l[(f(l) - f(0))/l] = \lim_{l \rightarrow 0}lf'(\theta l)$ ($0 < \theta < 1$) であるから, $\lim_{x \rightarrow 0}xf'(x) = 0$ が $x = 0$ での境界条件となる.

⁷ x は前節の x_k とは無関係であることに注意.

以上から,

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} f(x) \right] + \frac{\omega^2}{g} f(x) = 0 \quad \text{with} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x f'(x) = 0, \quad f(L) = 0 \quad (1.3.3)$$

という Sturm-Liouville の境界値問題になることがわかる. したがって, 直交性など標準的な結果はすべて成立する.

微分方程式 (1.3.2) は $x = (g/4\omega^2)z^2$ とおけば, オーダー $\nu = 0$ の Bessel の微分方程式

$$\frac{d^2 Z_0(z)}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dZ_0(z)}{dz} + Z_0(z) = 0 \quad (1.3.4)$$

になる. 第 2 種ベッセル関数は $x = 0$ での境界条件を満たさないから, 解は

$$f(x) = \text{const} J_0(2\omega\sqrt{x/g}), \quad J_0(2\omega\sqrt{L/g}) = 0 \quad (1.3.5)$$

となる.

第 1 種 Bessel 関数が現れることは, 多重振り子の解から直接確かめることもできる. 多重振り子の $L_k(\lambda)$ は, $k = x/l$ とするとき,

$$L_k(\lambda) = L_k(l\omega^2/g) = L_k(x\omega^2/gk) \quad (1.3.6)$$

と書ける. 前掲 Bateman Manuscript Project, Higher Transcendental Functions Vol. 2, p.191 の公式 (36) で, $\alpha = 0$ とおくと,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(x/n) = J_0(2\sqrt{x}) \quad (1.3.7)$$

であるので,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L_k(\lambda) = J_0(2\omega\sqrt{x/g}) \quad (1.3.8)$$

となることがわかる. したがって, 固有振動数 $\omega = \omega_j$ は, (1.2.11) の極限として

$$J_0(2\omega_j\sqrt{L/g}) = 0 \quad (1.3.9)$$

を満たす. Bessel 関数のゼロ点は無限個あるが, 小さい方から順に $\omega_1, \omega_2, \dots$ とする. (1.2.13) の極限として, 固有関数も

$$f^{(j)}(x) = \frac{1}{\tilde{N}_j} J_0(2\omega_j\sqrt{x/g}) \quad (1.3.10)$$

のように第 1 種 Bessel 関数で書ける. \tilde{N}_j は規格化定数.

解の直交性を直接確かめよう. Bessel 関数の直交性の公式⁸

$$\int_0^1 dy y J_n(\alpha_i y) J_n(\alpha_j y) = \frac{1}{2} [J'_n(\alpha_j)]^2 \delta_{ij} = \frac{1}{2} [J_{n+1}(\alpha_j)]^2 \delta_{ij} \quad (1.3.11)$$

(ここに, α_j は $J_n(x)$ の第 j 番目のゼロ点) において, $n = 0$, $\alpha_j = 2\omega_j\sqrt{L/g}$, $y = \sqrt{x/L}$ とおけば,

$$\int_0^L dx J_0(2\omega_i\sqrt{x/g}) J_0(2\omega_j\sqrt{x/g}) = L [J_1(2\omega_j\sqrt{L/g})]^2 \delta_{ij} \quad (1.3.12)$$

を得る. したがって,

$$\tilde{N}_j^2 = L [J_1(2\omega_j\sqrt{L/g})]^2 \quad (1.3.13)$$

である.

直交性の式 (1.3.12) も, 多重振り子の直交性の式の極限として導くこともできる. 内積の式 (1.2.16) にでてくる Laguerre 多項式の積和に $l = L/n$ を乗じて $n \rightarrow \infty$ をとると, (1.3.8) により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (L/n) \sum_{k=0}^{n-1} L_k(\lambda_i) L_k(\lambda_j) = \int_0^L dx J_0(2\omega_i\sqrt{x/g}) J_0(2\omega_j\sqrt{x/g}) \quad (1.3.14)$$

⁸これは, Bessel の微分方程式からすぐ導かれるもので, 特殊関数関連の本ならたいてい載っている.

となって, (1.3.12) の左辺が得られる. したがって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (L/n)N_j^2 = \tilde{N}_j^2 \quad (1.3.15)$$

を示せばよい.

(1.2.22) に (1.2.19) を適用して書き直すと,

$$N_j^2 = \frac{1}{\lambda_j} \left[nL_n(\lambda) - \lambda \frac{dL_n(\lambda)}{d\lambda} \right]^2 \Big|_{\lambda=\lambda_j} \quad (1.3.16)$$

となるが, (1.2.11) を用いると角括弧内第 1 項はおちる. $\lambda = l\omega^2/g$ を代入すると,

$$N_j^2 = \frac{l\omega_j^2}{g} \left[\frac{dL_n(l\omega^2/g)}{d(l\omega^2/g)} \right]^2 \Big|_{\omega=\omega_j} = \frac{g\omega_j^2}{l} \left[\frac{dL_n(l\omega^2/g)}{d(\omega^2)} \right]^2 \Big|_{\omega=\omega_j} \quad (1.3.17)$$

となる. 両辺に $l = L/n$ を乗じて, $n \rightarrow \infty$ の極限をとると, (1.3.7) により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (L/n)N_j^2 = g\omega_j^2 \left[\frac{dJ_0(2\omega\sqrt{L/g})}{d(\omega^2)} \right]^2 \Big|_{\omega=\omega_j} = L \left[\frac{dJ_0(2\omega\sqrt{L/g})}{d(2\omega\sqrt{L/g})} \right]^2 \Big|_{\omega=\omega_j} \quad (1.3.18)$$

を得る. したがって, $J'_0(x) = -J_1(x)$ により (1.3.15) が得られる.

完全性の式は, (1.2.23) の $n \rightarrow \infty$ の極限を考えれば,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(2\omega_j\sqrt{x/g})J_0(2\omega_j\sqrt{x'/g})}{\tilde{N}_j^2} = \delta(x - x') \quad (1.3.19)$$

となるはずである. ここにデルタ関数は, 閉区間 $[0, L]$ で定義された C^∞ 級の関数 $\phi(x)$ で, 境界条件 $\lim_{x \rightarrow 0} x\phi'(x) = 0$, $\phi(L) = 0$ を満たすものをテスト関数としたときの超関数である.

1.4 数値計算結果

2 節で得られた Laguerre 多項式で表わされる多重振りの規格化された固有ベクトル $\mathbf{u}^{(j)}$ の各成分 $a_k^{(j)}$ を横軸に, $k = 0, 1, \dots, n-1$ を縦軸にとってグラフに描いた. 図 1, 図 2, 図 3 は, それぞれ, $n = 10$, $n = 20$, $n = 50$ の場合で, モード番号 $j = 1, 2, \dots, 10$ のグラフを図示した. 各グラフの下の数字はモード番号を表す.

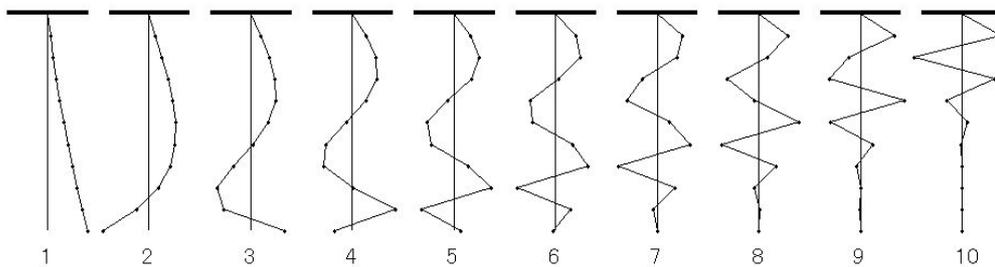


図 1. $n = 10$ の場合

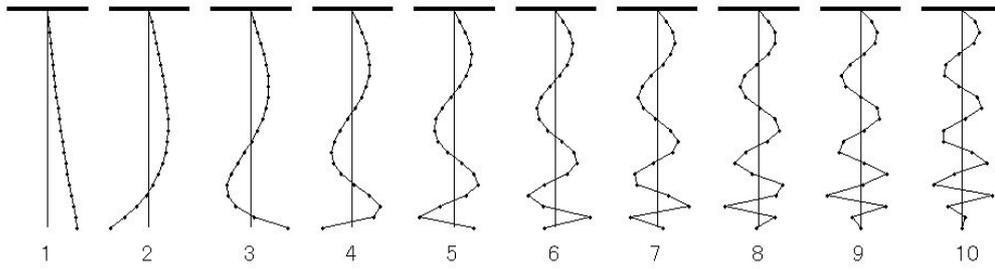


図2. $n = 20$ の場合

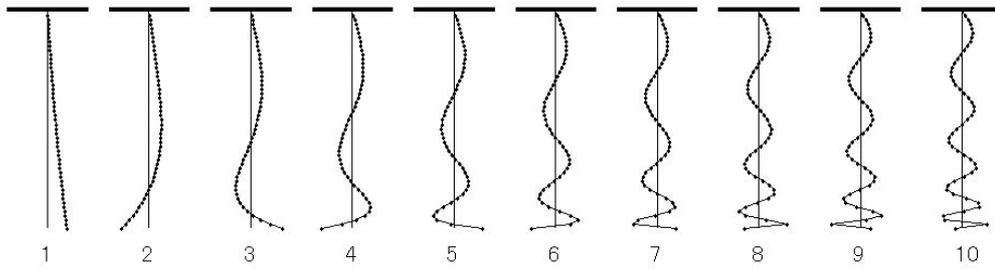


図3. $n = 50$ の場合

図4は、3節で求めた Bessel 関数で表わされる鎖振り子の場合の規格化された固有関数 $f^{(j)}(x)$ を、横軸にその関数値、縦軸に x をとって示す。

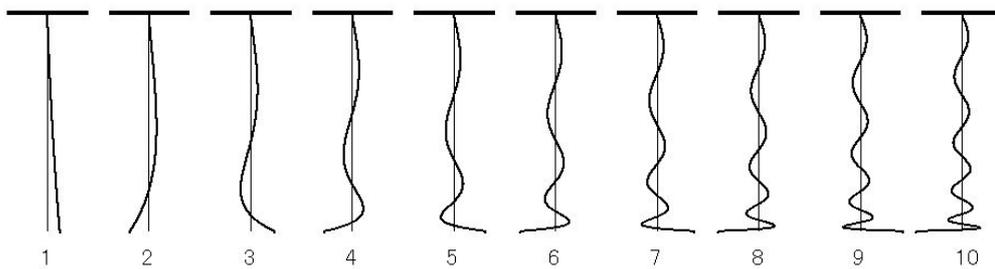


図4. 鎖振り子 (多重振り子の $n \rightarrow \infty$ の極限)

これらのグラフから、 $n = 50$ の場合の多重振り子の固有ベクトルの振る舞いは、鎖振り子の固有関数のそれに非常に近づいているのが見て取れる。また鎖振り子で、下の部分ほど振動が激しくなっているのは張力が小さいためである。

集合算公式の機械的証明

Proof of Formulae in Set Theory by Rote

高木富士夫⁹

Fujio TAKAGI

2.1 はじめに

集合論の教科書の始めの方に出てくる基本的な集合算公式には、ほとんど抵抗なく覚えられる簡単なものから、慣れないと使い方を間違えそうなもの、覚えにくいものまで様々ある。微積分公式とは異なり、ここまでするまでが必須で、それ以外は使うときに確かめればよいというような境目もはっきりしない。一方、個々の公式の証明法は幾通りあるのかははっきりしない。ここではそのような公式の証明法について考える。

例えば次のような問題を考える。

(問題) 集合 A, B, C は、いずれもある集合 X の部分集合とする。次の等式を証明せよ。

$$A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C) \quad (2.1.1)$$

このような公式を証明する一般の方針としては2つ考えられる。

{方法1} A, B, C の間に成立するより基本的な公式を用いて左辺を変形し、右辺に帰着できることを示す。または右辺から出発して左辺に至ることを示す。

{方法2} 例えば左辺で表される集合の元を x として、元 x の集合 A, B, C への属し方を表す式を変形して、 x は右辺で表される集合に属することを示す。逆に右辺から出発して左辺に戻れることも示す。

いずれの方法も慣れないと見通しを立てにくい。いずれの方法がより簡単か、やってみないと分からない。ある教科書 [1] では (2.1.1) 式を方法2を用いて次のように証明している。

$(x \in B - C \Leftrightarrow x \in B, x \notin C)$ であるから $(x \notin B - C \Leftrightarrow x \notin B \text{ または } x \in C)$ 。したがって、 $x \in A - (B - C) \Leftrightarrow x \in A, x \notin B - C \Leftrightarrow x \in A, (x \notin B \text{ または } x \in C) \Leftrightarrow (x \in A, x \notin B) \text{ または } (x \in A, x \in C) \Leftrightarrow x \in A - B \text{ または } x \in A \cap C \Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (A \cap C)$ 。

証明終わり

方法1では、集合の元には依拠せず、集合の間に成り立つ等式だけを用いて、与えられた等式を証明する。しかし、より基本的な等式とは何かあいまいであるし、適当な公式がなかったら証明できない。一方、方法2では集合の元に徹底的に依拠して証明する。上に示した例では元 x の集合 A, B, C への帰属関係を、準備を含めて7段階にわたって変形しており、かなり複雑で長い証明になっている。実際 \Leftrightarrow が7回と、”であるから”、”したがって”が各1回現れる。出発点から終着点までの途中の道筋について正確な見通しを立てないと、このような証明は書けない。文献 [2] には包含関係を用いるなど、方法1、方法2では分類しきれない証明も見られる。

⁹ftakagi@jeans.ocn.ne.jp

ここでは関係する部分集合が有限個の場合に成立する集合算等式を特に工夫することなく機械的に証明する方法を提案する。この方法は準備段階を別とすれば、集合の元には依拠しないので、方法1に近い。個々の等式の証明は簡単な集合算を機械的に実行するだけで済む。2節で一般論を提示し、3節および4節では関係する部分集合がそれぞれ2個および3個の場合について具体例を示す。

2.2 一般論

2.2.1 素集合展開

全体集合を X として、 n 個の部分集合を A, B, C, D, E, \dots とする。ここで n は自然数。これらの部分集合には X の部分集合であるということを除いて何の条件も付けないので、この後に定義される素集合と区別するために一般部分集合と呼ぶ。一般部分集合を元とする集合すなわち集合系を \mathbf{S} とする。

$$\mathbf{S} = \{A, B, C, D, E, \dots\} \quad (2.2.1)$$

X の元 x を \mathbf{S} の各元に属するか属さないかで完全に分類し、 X を有限個の部分集合の和の形に表す。そのために 2^n 個の部分集合を次のように定義する。

$$\begin{aligned} R_0 &= \{x | x \notin A, x \notin B, x \notin C, x \notin D, \dots\} \\ R_A &= \{x | x \in A, x \notin B, x \notin C, x \notin D, \dots\} \\ R_B &= \{x | x \notin A, x \in B, x \notin C, x \notin D, \dots\} \\ R_C &= \{x | x \notin A, x \notin B, x \in C, x \notin D, x \notin E, \dots\} \\ &\dots \\ R_{AB} &= \{x | x \in A, x \in B, x \notin C, x \notin D, \dots\} \\ R_{AC} &= \{x | x \in A, x \notin B, x \in C, x \notin D, x \notin E, \dots\} \\ &\dots \\ R_{ABC} &= \{x | x \in A, x \in B, x \in C, x \notin D, x \notin E, \dots\} \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

ここで右辺の集合の定義式すべてに条件 $x \in X$ が含まれるが、煩雑になるので省略した。

(2.2.2)において、 R_0 は \mathbf{S} のいずれの元にも属さない (X の) 元の全体から成る集合を表す。 R_A は A に属し、それ以外の \mathbf{S} の元に属さない元の全体から成る集合を表し、 R_{AB} は A と B に属し、それ以外の \mathbf{S} の元に属さない元の全体から成る集合を表す。以下同様。これら添字付きの R で表される 2^n 個の集合は、どの2つも共通部分を持たない。つまり互いに素であるから、素集合と呼ぶことにする。 R の添字を i, j などとすると

$$i \neq j \Rightarrow R_i \cap R_j = \emptyset \quad (\emptyset \text{ は空集合}) \quad (2.2.3)$$

これらの素集合全体は X の元 x の一般部分集合への所属の仕方を全て尽くしているから、素集合全体の和集合は全体集合 X に一致する。すなわち

$$R_0 \cup R_A \cup R_B \cup R_C \cup \dots \cup R_{AB} \cup R_{AC} \cup \dots \cup R_{ABC} \cup \dots = X \quad (2.2.4)$$

(2.2.2),(2.2.4) を合わせて、全体集合 X の集合系 \mathbf{S} に関する素集合展開と呼ぶ。素集合展開を用いて集合算公式を証明する手順を $n = 2, 3$ の場合について次節以降で説明する。その前に、必要最小限の集合算基本公式を挙げておく。

2.2.2 基本公式

素集合展開を用いて集合算を実行するときに、最低限の基本公式が必要になるので、それらを以下に列挙する。ここで一般部分集合としては A, B, C の3つを用意する。個々の計算では何を使ったかいちいち断らない。巾等律, 交換律, 結合律

$$\begin{aligned} A \cup A &= A, & A \cup B &= B \cup A, & (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\ A \cap A &= A, & A \cap B &= B \cap A, & (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \end{aligned}$$

分配律

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

吸収律

$$(A \cup B) \cap A = A, \quad (A \cap B) \cup A = A$$

これらは集合の和および共通部分の定義により、簡単に証明できる。

全体集合, 補集合, 空集合に関する公式

$$\begin{aligned} A^c &= X - A, & (\text{補集合の定義}) \\ A \cup A^c &= X, & A \cap A^c &= \emptyset, & X \cup A &= X, & X \cap A &= A \\ A^{cc} &= A, & X^c &= \emptyset, & \emptyset^c &= X, & \emptyset \cup A &= A, & \emptyset \cap A &= \emptyset \end{aligned}$$

これらも全体集合, 補集合, 空集合の定義により、簡単に証明できる。

2.3 $n = 2$ の場合

一般部分集合を A, B とすると、素集合は R_0, R_A, R_B, R_{AB} の4つであり、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} A &= R_A \cup R_{AB} \\ B &= R_B \cup R_{AB} \\ X &= R_0 \cup R_A \cup R_B \cup R_{AB} \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

(2.3.1) の証明 :

素集合の定義より $x \in A \Leftrightarrow (x \in R_A \text{ または } x \in R_{AB}) \Leftrightarrow x \in R_A \cup R_{AB}$. したがって $A = R_A \cup R_{AB}$. 同様に $B = R_B \cup R_{AB}$. また4つの素集合は X の元の A, B への属し方を全て尽くしているから $x \in X \Leftrightarrow (x \in R_0 \text{ または } x \in R_A \text{ または } x \in R_B \text{ または } x \in R_{AB}) \Leftrightarrow x \in R_0 \cup R_A \cup R_B \cup R_{AB}$. したがって $X = R_0 \cup R_A \cup R_B \cup R_{AB}$.

証明終わり

(2.3.1) より

$$\begin{aligned} A \cup B &= (R_A \cup R_{AB}) \cup (R_B \cup R_{AB}) = R_A \cup R_B \cup R_{AB} \\ A \cap B &= (R_A \cup R_{AB}) \cap (R_B \cup R_{AB}) = R_{AB} \\ A - B &= (R_A \cup R_{AB}) - (R_B \cup R_{AB}) = R_A \\ B - A &= (R_B \cup R_{AB}) - (R_A \cup R_{AB}) = R_B \\ A^c &= X - A = (R_0 \cup R_A \cup R_B \cup R_{AB}) - (R_A \cup R_{AB}) = R_0 \cup R_B \\ B^c &= X - B = (R_0 \cup R_A \cup R_B \cup R_{AB}) - (R_B \cup R_{AB}) = R_0 \cup R_A \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

を得る。(2.3.2)において,素集合で表された中辺から右辺への移行は,素集合の性質(2.2.3)に留意すれば視察によって容易に行える.同じ事を基本公式を用いて厳密な式変形だけで達成しようとする,簡単だけれど長い計算になる.例えば(2.3.2)の第2式中辺 $(R_A \cup R_{AB}) \cap (R_B \cup R_{AB})$ は,分配律を2回,素集合の性質(2.2.3)を1回,空集合の性質を2回用いて変形すると,ようやく R_{AB} に帰着する.

以上で公式を証明する準備が完了したので,例題に適用する.

例1) $A - B = (A \cup B) - B = A - (A \cap B) = A \cap B^c$ を証明せよ.

証明:証明すべき等式の各辺を素集合を用いて表し,結果が全て等しいことを示せばよい.(2.3.1),(2.3.2)より

$$\begin{aligned} A - B &= R_A \\ (A \cup B) - B &= (R_A \cup R_B \cup R_{AB}) - (R_B \cup R_{AB}) = R_A \\ A - (A \cap B) &= (R_A \cup R_{AB}) - R_{AB} = R_A \\ A \cap B^c &= (R_A \cup R_{AB}) \cap (R_0 \cup R_A) = R_A \end{aligned}$$

証明終わり

例2) de Morganの法則 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ を証明せよ.

証明:(2.3.1),(2.3.2)より

$$\begin{aligned} (A \cup B)^c &= X - (A \cup B) = (R_0 \cup R_A \cup R_B \cup R_{AB}) - (R_A \cup R_B \cup R_{AB}) = R_0 \\ A^c \cap B^c &= (R_0 \cup R_B) \cap (R_0 \cup R_A) = R_0 \\ (A \cap B)^c &= X - (A \cap B) = (R_0 \cup R_A \cup R_B \cup R_{AB}) - R_{AB} = R_0 \cup R_A \cup R_B \\ A^c \cup B^c &= (R_0 \cup R_B) \cup (R_0 \cup R_A) = R_0 \cup R_A \cup R_B \end{aligned}$$

証明終わり

集合 A, B の対称差 $A \Delta B$ は次の式で定義される.

$$A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \quad (2.3.3)$$

対称差は次式を満たす.

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) \quad (2.3.4)$$

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) \quad (2.3.5)$$

例3) (2.3.4),(2.3.5)を証明せよ.

証明:(2.3.1),(2.3.2)と定義式(2.3.3)より

$$\begin{aligned} A \Delta B &= ((R_A \cup R_{AB}) \cap (R_0 \cup R_A)) \cup ((R_0 \cup R_B) \cap (R_B \cup R_{AB})) = R_A \cup R_B \\ (A - B) \cup (B - A) &= R_A \cup R_B \\ (A \cup B) - (A \cap B) &= (R_A \cup R_B \cup R_{AB}) - R_{AB} = R_A \cup R_B \end{aligned}$$

証明終わり

2.4 $n = 3$ の場合

一般部分集合を A, B, C とすると,素集合は $R_0, R_A, R_B, R_C, R_{AB}, R_{BC}, R_{CA}, R_{ABC}$ の8個である.一般部分集合と全体集合 X は素集合を用いて次のように表される.

$$\begin{aligned} A &= R_A \cup R_{AB} \cup R_{CA} \cup R_{ABC} \\ B &= R_B \cup R_{AB} \cup R_{BC} \cup R_{ABC} \\ C &= R_C \cup R_{BC} \cup R_{CA} \cup R_{ABC} \\ X &= R_0 \cup R_A \cup R_B \cup R_C \cup R_{AB} \cup R_{BC} \cup R_{CA} \cup R_{ABC} \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

ここで文字 A, B, C の現れ方が循環的に整うように $R_{AC} = R_{CA}$ とした. (2.4.1) の証明は $n = 2$ の場合と同様であるから省略する. (2.4.1) を用いて A, B, C の間の基本的組み合わせを素集合の和集合で表すと

$$\begin{aligned}
A \cup B &= R_A \cup R_B \cup R_{AB} \cup R_{BC} \cup R_{CA} \cup R_{ABC} \\
B \cup C &= R_B \cup R_C \cup R_{AB} \cup R_{BC} \cup R_{CA} \cup R_{ABC} \\
C \cup A &= R_C \cup R_A \cup R_{AB} \cup R_{BC} \cup R_{CA} \cup R_{ABC} \\
A \cap B &= R_{AB} \cup R_{ABC} \\
B \cap C &= R_{BC} \cup R_{ABC} \\
C \cap A &= R_{CA} \cup R_{ABC} \\
A - B &= R_A \cup R_{CA} \\
B - C &= R_B \cup R_{AB} \\
C - A &= R_C \cup R_{BC} \\
B - A &= R_B \cup R_{BC} \\
C - B &= R_C \cup R_{CA} \\
A - C &= R_A \cup R_{AB}
\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

となる. また補集合については例えば $A^c = X - A = (R_0 \cup R_A \cup R_B \cup R_C \cup R_{AB} \cup R_{BC} \cup R_{CA} \cup R_{ABC}) - (R_A \cup R_{AB} \cup R_{CA} \cup R_{ABC}) = R_0 \cup R_B \cup R_C \cup R_{BC}$ となり

$$\begin{aligned}
A^c &= R_0 \cup R_B \cup R_C \cup R_{BC} \\
B^c &= R_0 \cup R_C \cup R_A \cup R_{CA} \\
C^c &= R_0 \cup R_A \cup R_B \cup R_{AB}
\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

を得る.

例1) 等式 (2.1.1) を証明せよ.

証明: (2.4.1), (2.4.2) より

$$\begin{aligned}
A - (B - C) &= (R_A \cup R_{AB} \cup R_{CA} \cup R_{ABC}) - (R_B \cup R_{AB}) = R_A \cup R_{CA} \cup R_{ABC} \\
(A - B) \cup (A \cap C) &= (R_A \cup R_{CA}) \cup (R_{CA} \cup R_{ABC}) = R_A \cup R_{CA} \cup R_{ABC}
\end{aligned}$$

証明終わり

例2) 等式 $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ を証明せよ.

証明: (2.4.1), (2.4.2) より

$$\begin{aligned}
A - (B \cup C) &= (R_A \cup R_{AB} \cup R_{CA} \cup R_{ABC}) - (R_B \cup R_C \cup R_{AB} \cup R_{BC} \cup R_{CA} \cup R_{ABC}) = R_A \\
(A - B) \cap (A - C) &= (R_A \cup R_{CA}) \cap (R_A \cup R_{AB}) = R_A
\end{aligned}$$

証明終わり

例3) 対称差の結合律 $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ を証明せよ.

証明: (2.3.5), (2.4.2) より

$$\begin{aligned}
A \Delta B &= (A \cup B) - (A \cap B) \\
&= (R_A \cup R_B \cup R_{AB} \cup R_{BC} \cup R_{CA} \cup R_{ABC}) - (R_{AB} \cup R_{ABC}) \\
&= R_A \cup R_B \cup R_{BC} \cup R_{CA}
\end{aligned}$$

この結果に対して置換 $A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow A$ を施すと

$$B\Delta C = R_B \cup R_C \cup R_{CA} \cup R_{AB}$$

したがって

$$\begin{aligned} (A\Delta B)\Delta C &= ((A\Delta B) \cup C) - ((A\Delta B) \cap C) \\ &= ((R_A \cup R_B \cup R_{BC} \cup R_{CA}) \cup (R_C \cup R_{BC} \cup R_{CA} \cup R_{ABC})) \\ &\quad - ((R_A \cup R_B \cup R_{BC} \cup R_{CA}) \cap (R_C \cup R_{BC} \cup R_{CA} \cup R_{ABC})) \\ &= (R_A \cup R_B \cup R_C \cup R_{BC} \cup R_{CA} \cup R_{ABC}) - (R_{BC} \cup R_{CA}) \\ &= R_A \cup R_B \cup R_C \cup R_{ABC} \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} A\Delta(B\Delta C) &= (A \cup (B\Delta C)) - (A \cap (B\Delta C)) \\ &= ((R_A \cup R_{AB} \cup R_{CA} \cup R_{ABC}) \cup (R_B \cup R_C \cup R_{CA} \cup R_{AB})) \\ &\quad - ((R_A \cup R_{AB} \cup R_{CA} \cup R_{ABC}) \cap (R_B \cup R_C \cup R_{CA} \cup R_{AB})) \\ &= (R_A \cup R_B \cup R_C \cup R_{AB} \cup R_{CA} \cup R_{ABC}) - (R_{AB} \cup R_{CA}) \\ &= R_A \cup R_B \cup R_C \cup R_{ABC} \end{aligned}$$

証明終わり

ところで $(A\Delta B)\Delta C$ の計算結果は、少なくとも見かけでは A, B, C の全ての置換に対して不変すなわち完全対称である。このことに着目すると、 $A\Delta(B\Delta C)$ を計算する代わりに、素集合 R_i の添字 i についての少々の約束と、 $A\Delta B = B\Delta A$ という性質を用いて、証明を完結させることができる。しかし、ここでは機械的証明に徹した。なお、対称差については文献 [2] に結合律の証明を含む詳しい解説がある。

2.5 まとめ

ここでは全体集合の素集合展開を用いた集合算公式の機械的証明を集合算等式の場合についてのみ説明したが、 $A - B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B$ のような命題の証明にも使える。一般部分集合の数については $n = 2, 3$ の場合について例を示したが、 $n \geq 4$ のときは計算が煩雑になるだろう。ただし $n \geq 4$ の場合、証明すべき興味ある公式がどの位あるのか今の所明らかでない。

一旦素集合展開を用意すれば、特に工夫したり、見通しを立てたりする必要がなく、与えられた集合算等式を機械的手順で証明できるのがここで示した方法の特長である。素集合展開を準備する手間を別とすれば、個々の等式の証明の長さは考えられるすべての方法のうちで最短に近いのではないか。なお素集合展開を用意すれば、自分でいろいろの公式を作ることもできる。これはできれば次回以降の話題としたい。

参考文献

- [1] 松坂和夫, 「集合・位相入門」 (岩波書店, 1968.6)
- [2] 新関章三, 集合の対称差と集合列の極限定理 (I), 数学・物理通信, 2 巻 2 号 (2012.6)

四元数と空間回転 3

The Quaternions and Rotations 3

矢野 忠¹⁰

Tadashi YANO

3.1 はじめに

この四元数のシリーズで前にも述べたが、ベクトルなどの空間回転を取り扱う方法としては

1. ベクトルでの表現
2. 行列による表現
3. 四元数による表現
4. 2回の鏡映変換による表現

の少なくとも4つが知られている。

四元数による回転の表現の公式 $u = qvq^{-1}$ をできるだけ天下りではなく導くという趣旨で2回にわたって述べたが [1] [2], その後また別の観点があることを知った。

それは同形（同型）写像を指導原理として四元数による回転表現の式を導くことである。

さて、同形写像とはどういう写像であったか。

$$f(v + w) = f(v) + f(w) \tag{3.1.1}$$

$$f(vw) = f(v)f(w) \tag{3.1.2}$$

この二つの条件を満たす写像を同形写像という [3] [4].

この (3.1.1) は $v, w \rightarrow v + w$ という和の演算が写像 f で保存されており, (3.1.2) は $v, w \rightarrow vw$ という積の演算がやはり写像 f で保存されることを示している. そのときに写像 f とはどんな形の式で表されるか.

そのことを次節で考えることにするが, 結論を先取りして述べれば, (3.1.1),(3.1.2) を同時に満たす, 写像は $f(v) = qvq^{-1}$ であり, v を実部をもたない四元数とすれば, $f(v)$ は空間の回転を四元数で表すことを示したい.

3.2 同形写像

前節で与えた条件 (3.1.1),(3.1.2) を関数方程式としてみた場合にどういう解が得られるか. 2つの条件 (3.1.1),(3.1.2) を同時に満たすような関数の解はないと言われている [5].

しかし, いまは四元数の間の写像を考えるから, そのような写像 f は存在するはずである (実はその写像をすでに何回か求めてもいる [1] [2]). それを (3.1.1),(3.1.2) の条件から求めてみよう.

¹⁰yanotad@earth.ocn.ne.jp

まず (3.1.1) の条件から考えれば, これは写像 f が線形であることを示している. それで (3.1.1) を満たす変換として

$$f(v) = qv, \quad q = \text{一定}$$

はそのような写像の候補となる¹¹. 実際に

$$\begin{aligned} f(v+w) &= q(v+w) \\ &= qv + qw \\ &= f(v) + f(w) \end{aligned}$$

と (3.1.1) を満たす. それでは写像 $f(v) = qv$ は (3.1.2) を満たすだろうか.

$$f(vw) = qvw$$

となって, これでは

$$f(v)f(w) = qv \cdot qw$$

とはならない. しかし, どうしても w の前の因子 q は (3.1.2) が成り立つためには必要である. またそれは可能である. w の前に因子 q をつくる代償として, vw を

$$v \cdot 1 \cdot w = v(q^{-1}q)w = vq^{-1} \cdot qw$$

と考えれば, 必然的に qv の後ろに因子 q^{-1} が来なければならない. そこで, $f(v) = qvq^{-1}$ と修正をする. したがって

$$\begin{aligned} f(vw) &= qvwq^{-1} \\ &= qvq^{-1} \cdot qwq^{-1} \\ &= f(v)f(w) \end{aligned}$$

となる.

確かに, 写像 $f(v) = qvq^{-1}$ は条件 (3.1.2) を満たしている. この写像 f は

$$\begin{aligned} f(v+w) &= q(v+w)q^{-1} \\ &= (qv + qw)q^{-1} \\ &= qvq^{-1} + qwq^{-1} \\ &= f(v) + f(w) \end{aligned}$$

と (3.1.1) も満たす.

すなわち, 四元数の和と積の演算を保つような, すなわち条件 (3.1.1), (3.1.2) を満たす写像 f として

$$f(v) = qvq^{-1} \tag{3.2.1}$$

が得られた.

¹¹2次写像 $f(v) = qv^2$ や一般の1次写像 $f(v) = qv + r$ とかは (3.1.1), (3.1.2) を満たさないことが, 具体的に調べてみればわかる. (3.1.1) を満たす写像 (関数) には $f(v) = qv$ しか存在しない.

3.3 直交補空間

いま n 次元のベクトルの全体の集合を考えて、これを n 次元ベクトル空間 V^n とよぶ¹²。

このベクトル空間の部分空間 W が与えられたとき、 W のすべてのベクトル \mathbf{y} と直交するような \mathbf{x} の全体の集合はもう一つの部分空間 U になる。これを W の直交補空間という。

具体的に直交補空間の例を考えよう。3次元のベクトル空間を考えたととき、この3次元ベクトル空間はそのベクトル空間の中のある一つの直線に垂直な平面（2次元ユークリッド空間）とその平面に垂直な直線の方向の空間に分けることができる。このときそれぞれの空間、すなわち、平面とそれに垂直な直線方向の空間はいま挙げた直交補空間となっている。

いま、この3次元空間の中のある平面に垂直な任意の直線を固定軸として、その軸のまわりに平面を回転させることができる。

この平面上にベクトルをとれば、そのベクトルも固定軸のまわりに回転するが、この平面上からぬけ出すとはなく、この平面上のベクトルでありつづける。また、平面に垂直なベクトルはこの軸のまわりの回転によって、この平面を通る点の位置は固定軸のまわりに回転するけれども、この平面に垂直なベクトルが垂直の状態から傾いてしまったり、はたまた平面上のベクトルになってしまったりすることはない。

こういう状況はもちろん、回転軸のとり方があくまで特殊なのであって、平面に垂直な軸ではなく平面上に存在する、ある軸のまわりの $\pi/2$ の回転をとれば、平面に垂直だったベクトルをその平面上のベクトルには変換することはもちろん可能である。

それはともかく、上に述べた3次元ユークリッド空間を2次元のユークリッド空間とそれに直交した1次元のユークリッド空間とに分けることができるという考えはおもしろい。こういう3次元空間における2次元ユークリッド空間（平面）とそれに直交した1次元空間（直線）という2つの直交した空間を一般化して、直交補空間という考えが生まれた。

平面の直交補空間はそれに垂直な方向の1次元のユークリッド空間であり、またこの1次元のユークリッド空間の直交補空間はそれに直交した平面である。

上で見てきたように、平面に垂直なある直線のまわりの回転によって平面上のベクトルはその方向や向きは変るが、やはりその平面上のベクトルであり続ける。

平面全体で見れば、平面は回転するけれども、その平面の方向（これは平面の法線の方向で決める）は不変である。

Hamilton が“三元数”をつくらうとして、

$$(a + bi + cj)(x + yi + zj)$$

の積を考えたときに、新しい4つ目の元 k の存在を認めざるを得なかった。このことから“三元数”は存在せず、Hamilton が四元数を発見する契機となったことはすでに述べた [6]。

しかし、そうやって発見した四元数の4つの元 $1, i, j, k$ のしたがう代数は1と i, j, k とでは大いに異なっていた。もう一度復習をしておく

- 1は i, j, k の各元とは交換可能である。すなわち $1 \cdot i = i \cdot 1$, $1 \cdot j = j \cdot 1$, $1 \cdot k = k \cdot 1$
- i, j, k の各元は交換可能ではない。もっと詳しくいえば、それらの間の交換に対して反対称（交代）である。またその中の2つの積からこの積の因子にはない、第3の元が生ずる。

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

したがって、こういう考察から i, j, k を元としてつくられる空間が3次元空間と同定できるのではないかというアイデアが浮かんでくる。そうすると、四元数の中で i, j, k でつくられる空間と別のもう一つの1を元とし

¹²この節で部分的かつ不十分にしか述べられなかった、ベクトル空間やユークリッド・ベクトル空間と四元数についての体系的な知識は [3] を参照せよ。

てつくられる空間とがあたかも互いに直交補空間をなしているのではないか。これは四元数の実部の部分 R と虚部の部分 I とが画然と性質が異なっていることから予想されることである¹³。それで四元数の中で実部がつくる空間 R と虚部がつくる空間 I が互いに直交補空間となっていると考えられる。

四元数 v がいま実部のみをもっており、虚部をもたないとき、 q は一般の四元数であるとするれば、 $q \neq 0$ のとき q^{-1} が存在して q^{-1} と v とは交換可能であるので

$$qvq^{-1} = qq^{-1}v = v \quad (3.3.1)$$

となり、写像 $f(v) = qvq^{-1}$ によって v は不変である。このことを記号的に表すならば

$$v \in R \rightarrow qvq^{-1} \in R$$

となる。

つぎに四元数 v が実部をもたず、虚部だけをもつならば、ポントリヤーギン [3] の用いた記号 \hat{v} を用いて

$$\hat{v} = xi + yj + zk, \quad q = d + ai + bj + ck \quad (3.3.2)$$

と表し、写像 $f(v) = q\hat{v}q^{-1}$ を考えよう。このとき $q^{-1} = \frac{1}{|q|^2}(d - ai - bj - ck)$ であった。したがって

$$q\hat{v}q^{-1} = (d + ai + bj + ck)(xi + yj + zk)\frac{1}{|q|^2}(d - ai - bj - ck) \quad (3.3.3)$$

である。

そこで、まず $\hat{v}q^{-1}$ の積の計算を行うと

$$\begin{aligned} \hat{v}q^{-1} &= \frac{1}{|q|^2}(xi + yj + zk)(d - ai - bj - ck) \\ &= \frac{1}{|q|^2}[(ax + by + cz) + (dx - cy + bz)i + (cx + dy - az)j + (-bx + ay + dz)k] \\ &= \frac{1}{|q|^2}[D + Ai + Bj + Ck] \end{aligned}$$

となる。

ここで、

$$D = ax + by + cz \quad (3.3.4)$$

$$A = dx - cy + bz \quad (3.3.5)$$

$$B = cx + dy - az \quad (3.3.6)$$

$$C = -bx + ay + dz \quad (3.3.7)$$

である。

つづいて

$$\begin{aligned} q\hat{v}q^{-1} &= (d + ai + bj + ck)\frac{1}{|q|^2}(D + Ai + Bj + Ck) \\ &= \frac{1}{|q|^2}[(dD - aA - bB - cC) + (aD + dA - cB + bC)i \\ &\quad + (bD + cA + dB - aC)j + (cD - bA + aB + dC)k] \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

が得られる。

¹³四元数の実部の部分空間 R は $v = t$, ($t =$ 実数) の場合であり、虚部の部分空間 I は $v = xi + yj + zk$, ($x, y, z =$ 実数) の場合である。

まず qvq^{-1} の実部

$$dD - aA - bB - cC$$

がどうなるか調べてみよう.

$$\begin{aligned} dD - aA - bB - cC &= d(ax + by + cz) - a(dx - cy + bz) - b(cx + dy - az) - c(-bx + ay + dz) \\ &= (ad - ad - bc + bc)x + (bd + ac - bd - ac)y + (cd - ab + ab - cd)z \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから, $q\hat{v}q^{-1}$ の実部は 0 となる. すなわち

$$\operatorname{Re}(q\hat{v}q^{-1}) = 0 \quad (3.3.9)$$

である.

したがって

$$q\hat{v}q^{-1} = x'i + y'j + z'k \quad (3.3.10)$$

の形に表される. ここで

$$x' = \frac{1}{|q|^2}(aD + dA - cB + bC) \quad (3.3.11)$$

$$y' = \frac{1}{|q|^2}(bD + cA + dB - aC) \quad (3.3.12)$$

$$z' = \frac{1}{|q|^2}(cD - bA + aB + dC) \quad (3.3.13)$$

である.

したがって, $q\hat{v}q^{-1}$ は実部をもたない, 虚部だけの四元数であることがわかった. これは実は [6] ですでにそうなるように写像をつくったことを思い出してほしい.

すなわち, 写像 $u = f(v) = qvq^{-1}$ によって実部だけからなる四元数 v は実部だけからなる四元数 u に, 虚部だけからなる四元数 v は虚部だけの四元数 u に写像される: 四元数 v の部分空間 R の写像 f は R であり, 部分空間 I の写像は I であることを示している.

前に述べた用語でいえば四元数の実部のつくる部分空間 R と虚部のつくる部分空間 I は, ベクトル空間のそれぞれ互いの直交補空間となっており, 互いに直交補空間であるという性質は写像 $u = f(v) = qvq^{-1}$ によつては変らない (保存される)¹⁴.

このことを前の実部だけの四元数がやはり実部だけの四元数に写像されるという性質とあわせて, まとめて記号的に表せば

$$v \in R \rightarrow qvq^{-1} \in R$$

$$v \in I \rightarrow qvq^{-1} \in I$$

と表すことができる.

3.4 \hat{v} の大きさの保存

この節では記号を簡単にするために $\hat{v} = xi + yj + zk$ を単に v と表すことにしよう. すなわち, v は実部をもたない四元数である. 写像 $u = f(v) = qvq^{-1}$ によって v の大きさが保存されることを見ておこう. このこ

¹⁴Hamilton が三元数をつくらうとして $(a + bi + cj)(x + yi + zk)$ の積を考えたときに, どうしても新しい第四の元 $k = ij = -ji$ の存在を認めなければならなかった. その事実と対照すれば, 四元数 v の実部の部分空間 R と虚部の部分空間 I がそれぞれ写像 qvq^{-1} によって交じり合わないで, 保存されているという事実は興味深い. そしてこの事実から写像 qvq^{-1} が空間回転を表すという発想へと導かれたのではないかと推測される.

とは幾何学的に考えるとベクトルはこの写像によって、その大きさが変わらないこと、すなわち、ベクトルの空間回転を写像 $u = f(v)$ が表すことを意味する。

v とは違って、いま q は一般の四元数である。普通の文献には q を単位四元数にとっている。すなわち、そのノルム $|q|$ が $|q| = 1$ にとられているが、いましばらくは任意の四元数とする。その一般的な四元数による写像 $u = f(v) = qvq^{-1}$ はその大きさを保存することを示そう。

そのために qvq^{-1} のノルムの2乗を考えよう。 $\overline{qvq^{-1}}$ と \bar{v} は qvq^{-1} と v の共役を表すとすれば

$$\begin{aligned} |qvq^{-1}|^2 &= (qvq^{-1})(\overline{qvq^{-1}}) \\ &= \frac{1}{|q|^2} qvq^{-1}q\bar{v}\bar{q} \\ &= \frac{1}{|q|^2} q|v|^2\bar{q} \\ &= \frac{1}{|q|^2} |q|^2 |v|^2 \\ &= |v|^2 \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

したがって、 v の大きさは写像 f によっては変わらない（保存される）¹⁵。

これは $v = xi + yj + zk$, $q = d + ai + bj + ck$ を代入して $|qvq^{-1}|^2$ を直接計算しても確かめられる。

大部分の文献では q を単位四元数としているが、この q が単位四元数であると限定する理由は、この四元数を $q = \cos \frac{\theta}{2} + n \sin \frac{\theta}{2}$ と表すためである。ここで、 n は空間回転の回転軸の方向を表しており、角 θ は空間の回転軸 n のまわりの回転角を表している。

3.5 四元数表現から SO(3) 表現へ

この節では空間回転の四元数による表現から行列の SO(3) 表現を導く¹⁶。

これは 3.3 節の (3.3.10) を四元数 q のノルムが 1 の場合、すなわち $|q| = 1$ に対して単に計算するだけである。したがって、3.4 節までとは異なって、この節では四元数 q は単位四元数にとる。

この単位四元数は $q = \cos \frac{\theta}{2} + n \sin \frac{\theta}{2}$ と表すことができる。ここで $n = n_1i + n_2j + n_3k$ であり、 $|n|^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ である。この四元数 n は空間回転の軸の方向を示している。 n_1, n_2, n_3 は回転軸の方向余弦であり、3つのパラメータがあるように見えるが、実は $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ の条件があるから、フリーなパラメータは2つしかない。このとき $|q| = 1$ であることは自明であろう。したがって、このとき $q^{-1} = \bar{q}$ が成り立つ。

3.3 節では

$$q = d + ai + bj + ck$$

と表していたから

$$d = \cos \frac{\theta}{2}, \quad a = n_1 \sin \frac{\theta}{2}, \quad b = n_2 \sin \frac{\theta}{2}, \quad c = n_3 \sin \frac{\theta}{2} \tag{3.5.1}$$

ととることになる。

$$v = xi + yj + zk$$

であるが、この式の記号を

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z \tag{3.5.2}$$

と変更する。

さらに、3.3 節の (3.3.10) で

$$x'_1 = x', \quad x'_2 = y', \quad x'_3 = z' \tag{3.5.3}$$

¹⁵ qvq^{-1} の計算は付録 1 で述べる。

¹⁶SO(3) とは、要素が実数の 3 行 3 列の行列のつくる直交群 O で、 O の転置行列が逆行列となり、すなわち $O^t = O^{-1}$ が成立し、かつその行列式 $\det O = 1$ であるものをいう。群については、例えば、[7] を参照せよ。

と記号を変更すれば

$$qv\bar{q} = x'_1 i + x'_2 j + x'_3 k \quad (3.5.4)$$

と表され、また x'_1, x'_2, x'_3 は (3.3.11), (3.3.12), (3.3.13) で表されており、 D, A, B, C は (3.3.4)~(3.3.7) で表されている。

これらの式に (3.5.1) の d, a, b, c を代入すれば、 D, A, B, C は

$$\begin{aligned} D &= (n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3) \sin \frac{\theta}{2} \\ A &= x_1 \cos \frac{\theta}{2} + (n_2 x_3 - n_3 x_2) \sin \frac{\theta}{2} \\ B &= x_2 \cos \frac{\theta}{2} + (n_3 x_1 - n_1 x_3) \sin \frac{\theta}{2} \\ C &= x_3 \cos \frac{\theta}{2} + (n_1 x_2 - n_2 x_1) \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

となる。

つぎに x'_1, x'_2, x'_3 を

$$x'_1 = aD + dA - cB + bC = E_1 x_1 + E_2 x_2 + E_3 x_3 \quad (3.5.5)$$

$$x'_2 = bD + cA + dB - aC = F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 \quad (3.5.6)$$

$$x'_3 = cD - bA + aB + dC = G_1 x_1 + G_2 x_2 + G_3 x_3 \quad (3.5.7)$$

と表す。ここで

$$\begin{aligned} E_1 &= n_1^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta \\ E_2 &= n_1 n_2(1 - \cos \theta) - n_3 \sin \theta \\ E_3 &= n_1 n_3(1 - \cos \theta) + n_2 \sin \theta \\ F_1 &= n_1 n_2(1 - \cos \theta) + n_3 \sin \theta \\ F_2 &= n_2^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta \\ F_3 &= n_2 n_3(1 - \cos \theta) - n_1 \sin \theta \\ G_1 &= n_1 n_3(1 - \cos \theta) - n_2 \sin \theta \\ G_2 &= n_2 n_3(1 - \cos \theta) + n_1 \sin \theta \\ G_3 &= n_3^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta \end{aligned}$$

である。

x'_1, x'_2, x'_3 と x_1, x_2, x_3 の関係 (3.5.5)~(3.5.7) はもちろん行列で線形変換として書き表すこともできる。

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (3.5.8)$$

そして、この 3 行 3 列の行列が直交行列であることを証明することができる。その証明は式が少し面倒なので、付録 2 に述べる¹⁷。

¹⁷この変換 (3.5.8) は行列の成分が回転角 $\theta = 0$ のときに、対角成分は $E_1 = F_2 = G_3 = 1$ で、かつ非対角成分はすべて 0 であるので恒等変換を含んでいる。すなわち、この行列の行列式の値は 1 である。

3.6 おわりに

同形写像 (3.1.1), (3.1.2) から空間回転の四元数表現 $u = f(v) = qvq^{-1}$ を導いた. しかし, どうしてこのような同形写像を考えついたのかはいまのところまだ私には明らかではない. 歴史的に振り返って見る必要があるであろう.

それはともかく四元数の回転表現 $u = f(v) = qvq^{-1}$ が行列の直交変換と結びつくことがわかった. しかし, さらに行列での回転の表現とベクトルでの回転表現との同等性や行列による回転の表現についても $SO(3)$ 表現と $SU(2)$ 表現の同等性とかまだまだ議論したいことが残っている. それらは次回以降のテーマとしたい.

付録 1 $\overline{qvq^{-1}}$ の計算

$\overline{qvq^{-1}}$ の計算は
いま,

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$$

であるから

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \overline{qvq^{-1}} \\ &= \overline{qv \frac{\bar{q}}{|q|^2}} \\ &= \frac{1}{|q|^2} q \overline{(qv)} \\ &= \frac{1}{|q|^2} q \bar{v} \bar{q}\end{aligned}$$

となる.

付録 2 (3.5.8) は直交変換である

(3.5.8) が直交変換であることは

$$\begin{pmatrix} E_1 & F_1 & G_1 \\ E_2 & F_2 & G_2 \\ E_3 & F_3 & G_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.6.1)$$

であることを示せばよい. したがって,

$$E_1^2 + F_1^2 + G_1^2 = 1 \quad (3.6.2)$$

$$E_2^2 + F_2^2 + G_2^2 = 1 \quad (3.6.3)$$

$$E_3^2 + F_3^2 + G_3^2 = 1 \quad (3.6.4)$$

$$E_1E_2 + F_1F_2 + G_1G_2 = 0 \quad (3.6.5)$$

$$E_1E_3 + F_1F_3 + G_1G_3 = 0 \quad (3.6.6)$$

$$E_2E_3 + F_2F_3 + G_2G_3 = 0 \quad (3.6.7)$$

が示せればよい.

以下ではその詳細な計算を示す. 上の式の6つの式の前半の3つの式 (3.6.2)~(3.6.4) と後半の3つの式 (3.6.5)~(3.6.7) がそれぞれ成り立つことを示す.

まず、前半の式の証明をする。いま

$$P = [n_i^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta]^2 + [n_i n_j(1 - \cos \theta) + n_k \sin \theta]^2 + [n_i n_k(1 - \cos \theta) - n_j \sin \theta]^2$$

とおけば、この P は

$$i = 1, j = 2, k = 3 \text{ のときに } E_1^2 + F_1^2 + G_1^2$$

$$i = 2, j = 3, k = 1 \text{ のときに } E_2^2 + F_2^2 + G_2^2$$

$$i = 3, j = 1, k = 2 \text{ のときに } E_3^2 + F_3^2 + G_3^2$$

となる。したがって、この P を計算すればよい。式の表記を簡単にするために $\cos \theta = c, \sin \theta = s$ と略記する。また計算の中で $n_i^2 + n_j^2 + n_k^2 = 1$ の関係を用いる。

$$\begin{aligned} P &= [n_i^2(1 - c) + c]^2 + [n_i n_j(1 - c) + n_k s]^2 + [n_i n_k(1 - c) - n_j s]^2 \\ &= n_i^4(1 - c)^2 + c^2 + 2n_i^2(1 - c)c \\ &\quad + n_i^2 n_j^2(1 - c)^2 + n_k^2 s^2 + 2n_i n_j n_k(1 - c)s \\ &\quad + n_i^2 n_k^2(1 - c)^2 + n_j^2 s^2 - 2n_i n_j n_k(1 - c)s \\ &= n_i^2(1 - c)^2 + 2n_i^2(1 - c)c + c^2 + s^2 - n_i^2 s^2 \\ &= n_i^2(1 - c)(1 + c) - n_i^2 s^2 + 1 \\ &= n_i^2(1 - c^2 - s^2) + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

ただし、上の P の式の 2 行目から 4 行目では計算がわかりやすいように上下に同じ位置にそろった項ごとに加えて計算している。これで、前半の 3 つの式が証明された。

つぎの後半の式の証明をする。いま

$$\begin{aligned} Q &= [n_i^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta][n_i n_j(1 - \cos \theta) - n_k \sin \theta] \\ &\quad + [n_i n_j(1 - \cos \theta) + n_k \sin \theta][n_j^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta] \\ &\quad + [n_i n_k(1 - \cos \theta) - n_j \sin \theta][n_j n_k(1 - \cos \theta) + n_i \sin \theta] \end{aligned}$$

とおけば、この Q は

$$i = 1, j = 2, k = 3 \text{ のときに } E_1 E_2 + F_1 F_2 + G_1 G_2$$

$$i = 3, j = 1, k = 2 \text{ のときに } E_1 E_3 + F_1 F_3 + G_1 G_3$$

$$i = 2, j = 3, k = 1 \text{ のときに } E_2 E_3 + F_2 F_3 + G_2 G_3$$

となる。したがって、この Q を計算すればよい。前と同じく $\cos \theta = c, \sin \theta = s$ と略記し、計算で $n_i^2 + n_j^2 + n_k^2 = 1$ の関係を用いる。

$$\begin{aligned}
Q &= [n_i^2(1-c) + c][n_i n_j(1-c) - n_k s] + [n_i n_j(1-c) + n_k s][n_j^2(1-c) + c] \\
&\quad + [n_i n_k(1-c) - n_j s][n_j n_k(1-c) + n_i s] \\
&= n_i^3 n_j(1-c)^2 - n_i^2 n_k(1-c)s + n_i n_j(1-c)c - n_k c s \\
&\quad + n_i n_j^3(1-c)^2 + n_j^2 n_k(1-c)s + n_i n_j(1-c)c + n_k c s \\
&\quad + n_i n_j n_k^2(1-c)^2 + (n_i^2 n_k - n_j^2 n_k)(1-c)s - n_i n_j s^2 \\
&= n_i n_j(1-c)^2 + 2n_i n_j(1-c)c - n_i n_j s^2 \\
&= n_i n_j(1-c)(1+c) - n_i n_j s^2 \\
&= n_i n_j(1-c^2 - s^2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ただし、上の Q の式の 3 行目から 5 行目では計算がわかりやすいように上下の同じ位置にそろった項ごとに加えて計算している。

以上から、(3.5.8) の行列は直交行列であり、したがって (3.5.8) は直交変換であることが示された。

(2013. 2. 13)

参考文献

- [1] 矢野 忠, 四元数と空間回転 1, 数学・物理通信 第 2 巻, 第 2 号 (2012.6) 19-29
- [2] 矢野 忠, 四元数と空間回転 2, 数学・物理通信 第 2 巻, 第 5 号 (2012.10) 20-27
- [3] ポントリャーギン, 「数概念の拡張」(森北出版, 2002) 32-66
- [4] http://sammaya.garyoutensei.com/math_phys/math1/math1-12/math1-12.html
- [5] http://www004.upp.so-net.ne.jp/s_honma/func-eq/func-eq.htm
- [6] 矢野 忠, 四元数の発見へ, 数学・物理通信 第 1 巻, 第 11 号 (2011.12) 16-23
- [7] 山内恭彦, 杉浦光夫, 「連続群論入門」(培風館, 1960)

編集後記

寒さの中にもようやく春の兆しを感じられるようになってきました。皆様方もお元気でお過ごしのことと存じます。

さて、今回は3編の論文が掲載された。ほとんど毎回投稿を頂いている、中西先生と高木先生、そしてこの通信の編集者である矢野先生の三人の方である。掲載された3編の内容は、身近に見られる物理現象や物理学を数学的に解析したものである。後者は解析の道具として四元数を用いている。何れも興味深い論文ばかりである。

毎回一定数の原稿を確保するのは大変ではあるが、何とか“継続は力なり”を念頭に頑張って、この通信を続けて発行して行きたいと思っている。

今後も皆様のご投稿をお待ちしております。

(新関章三 記)