数学・物理通信

3巻2号　　2013年3月

編集　新関章三・矢野　忠

2013 年 3 月 29 日

目 次

Contents

半無限弾性棒の弾丸衝突問題に基づくFourier変換の拡張

Extended Fourier Transform Arising from Bullet Collision with a Semi-Infinite Elastic Rod

世戸　憲治 [1]　中 西　襄 [2]
Kenji SETO [3]　Noboru NAKANISHI [4]

1.1　はじめに

我々は「数学・物理通信」2 巻 3 号（2012 年 7 月）において「弾丸衝突により弾性棒に発生する波動の数学的解析」と題する論文を発表し，有限の長さを持つ弾性棒の一端に弾丸が棒の長さ方向に衝突したときに弾性棒に発生する波動を解析した．この問題の解法は，波動方程式の一般解を利用して解く方法と固有値・固有関数を求めその重ね合わせとして解く方法とがあるが，これら 2 通りの解法で得られた解の形は，見かけ上まったく異なるものであった．固有値・固有関数を使用する方法では，まず固有値が整数では求まらずに超越方程式の根として求められ，固有関数の重ね合わせは通常の Fourier 級数を超えた非 Fourier 三角級数の形になる．前回の論文ではこの非 Fourier 三角級数について，解析学の種々の分野の知識を駆使して和を求めることに成功し，結果としてこの和は指数関数と Laguerre 多項式の積の有限和の形で書けることがわかった．この種の解析はかなり技巧を要するものであるが，これは有限の長さの弾性棒を扱ったために弾性棒の内部で波の反射が何度も繰り返されることに起因する．なお，前回の論文の発表後，現著者の一人（世戸）は一般解を利用した方法によっても同じ解が再現されるのを示すことに成功した．

今回の論文では半無限の長さを持つ弾性棒に，長さの方向に弾丸が衝突したとき弾性棒に発生する波動を解析する．今度の場合は反射波は存在せず入射波のみとなるため，解析は前回のものと比べると著しく簡単になる．それは，左端は前と同様に境界条件が時間に依存するが，右端の境界条件がないため離散的な固有値問題にはならず，固有値のスペクトルが連続となるからである．したがって，解は級数の形ではなく，三角関数で書ける解析関数の積分で表されることになる．すなわち固有関数を用いた解法は，通常の Fourier 解析を拡張したタイプのものとなる．

次節ではここでの解析の下準備として，通常の Fourier 変換と Fourier-Bessel 変換について復習しておく．1.3 節で錘付き半無限弾性棒の固有関数を求め，その直交性と完全性を用いた新しい Fourier 変換を導入する．$\mathrm{L}_2(0,\infty)$ 関数に対する Fourier-Bessel 変換が その特別な場合として Fourier-cosine, Fourier-sine 変換を含む

[1] 北海学園大学名誉教授
[2] 京都大学名誉教授
[3] seto@pony.ocn.ne.jp
[4] nbr-nak@trio.plala.or.jp

ように，ここで新しく導出する変換もその特別な場合として Fourier-cosine, Fourier-sine 変換を含むものとなる．1.4 節では錘の他にばねをも付けた場合の解析をし，1.3 節で求めた Fourier 変換の拡張を試みる．1.5 節では物理的基礎付けはないが数学的にはさらに拡張された Fourier 変換が作れることを紹介する．

1.2　通常の Fourier 変換について

1.2.1　Fourier 変換

拡張された Fourier 変換の議論を始める前に，通常の Fourier 変換について復習しておこう．$\mathrm{L}_2(-\infty,\infty)$ に属する関数 $f(x)$ について，つぎの Fourier 変換，およびその逆変換が成立する．

$$\hat{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}f(x)dx,\qquad \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}\hat{f}(k)dk \tag{1.2.1}$$

この第 2 式の左辺にある $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ は，もし $f(x)$ に不連続点が存在する場合は x での値がその左右からの極限値の相加平均になることを示す．$f(x)$ が連続関数であれば単に $f(x)$ でよい．以下では $f(x)$ を連続関数と仮定しよう．

この変換式の証明は簡単である．この第 2 式に第 1 式の $\hat{f}(k)$ を代入し，積分順序を入れ換えると，

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x')\Big[\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-x')}dk\Big]dx' \tag{1.2.2}$$

となるが，この k 積分の部分は

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-x')}dk=\lim_{M\to\infty}\frac{\sin[(x-x')M]}{\pi(x-x')} \tag{1.2.3}$$

となるので，ここで，デルタ関数に関する超関数公式

$$\lim_{M\to\infty}\frac{\sin(Mx)}{\pi x}=\delta(x),\qquad \lim_{M\to\infty}\frac{\cos(Mx)}{\pi x}=0 \tag{1.2.4}$$

を利用すると，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-x')}dk=\delta(x-x') \tag{1.2.5}$$

となり，(1.2.2) が成立することが示される．

この (1.2.5) で k と x を入れ替えて書くことにすると，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix(k-k')}dx=\delta(k-k') \tag{1.2.6}$$

となるが，ここで，k を連続的な $\ll$ 固有値 $\gg$ と考え，

$$X(x,k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx} \tag{1.2.7}$$

を $\ll$ 固有関数 $\gg$ と見なすことにすると (1.2.6) は

$$\int_{-\infty}^{\infty}X(x,k)\bar{X}(x,k')dx=\delta(k-k') \tag{1.2.8}$$

となるので，この式はデルタ関数の意味での $\ll$ 固有関数の直交性 $\gg$ を示す式とみなされる．同様に，(1.2.5) は

$$\int_{-\infty}^{\infty}X(x,k)\bar{X}(x',k)dk=\delta(x-x') \tag{1.2.9}$$

と書け，これは ≪ 固有関数の完全性 ≫ を示す式とみなされる．なお，(1.2.8) (1.2.9) で X の上の横棒は複素共役を表す.

関数 $f(x)$ が $\mathrm{L}_2(-\infty,\infty)$ に属するものとすると，$\hat{f}(k)$ も同じ $\mathrm{L}_2(-\infty,\infty)$ に属することが証明されるので，(1.2.1) の第 1 式および (1.2.5) からそのノルムを求めると

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(k)|^2dk=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx \tag{1.2.10}$$

と元の関数 $f(x)$ のノルムと変換された後の関数 $\hat{f}(k)$ のノルムが等しくなることが示される．これが ≪Parseval の等式 ≫ と呼ばれるものである．

ここで，関数 $f(x)$ が偶関数 $f(-x)=f(x)$ の場合を考えると，(1.2.1) は

$$\hat{f}(k)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\cos(kx)f(x)dx,\qquad f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\cos(kx)\hat{f}(k)dk \tag{1.2.11}$$

と書け，これは，Fourier-cosine 変換と呼ばれる．同様に，関数 $f(x)$ が奇関数 $f(-x)=-f(x)$ のときは，(1.2.1) は

$$\hat{f}(k)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\sin(kx)f(x)dx,\qquad f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\sin(kx)\hat{f}(k)dk \tag{1.2.12}$$

と書け，これは，Fourier-sine 変換と呼ばれる．

これまでに述べた Fourier 変換は最も標準的なものであるが，この変換は色々な形に拡張されて使われることが多い．しかし，どのように拡張されてもそこで重要な役割を演じているのは (1.2.4) 式である．この式に帰着するものはすべて Fourier 変換とみなせる．

1.2.2 Fourier-Bessel 変換

一つの拡張として，Fourier-Bessel 変換（Hankel 変換とも言う）の例を挙げよう．$J_\nu(z)$ を $\nu(>-1)$ 次の Bessel 関数，$f(x)$ を $\mathrm{L}_2(0,\infty)$ に属する実関数とするとき，つぎの変換，およびその逆変換が成り立つ.

$$\hat{f}(k)=\int_0^{\infty}\sqrt{kx}J_\nu(kx)f(x)dx,\qquad f(x)=\int_0^{\infty}\sqrt{kx}J_\nu(kx)\hat{f}(k)dk \tag{1.2.13}$$

この式の証明は以下のように行うことができる．まず，第 2 式の $\hat{f}(k)$ に第 1 式を代入し，積分順序を入れ換えると，

$$f(x)=\int_0^{\infty}f(x')\Big[\int_0^{\infty}\sqrt{xx'}kJ_\nu(kx)J_\nu(kx')dk\Big]dx' \tag{1.2.14}$$

となるが，以下，この k 積分の部分を計算する．変数を k としたときの $J_\nu(kx)$, $J_\nu(kx')$ が満たす微分方程式をそれぞれ設定し，$J_\nu(kx)$ が満たす方に $kx'^2J_\nu(kx')$ を掛け，他方，$J_\nu(kx')$ が満たす方に $kx^2J_\nu(kx)$ を掛けて，辺々を引き算すると，

$$kJ_\nu(kx)J_\nu(kx')=\frac{1}{x^2-x'^2}\frac{d}{dk}\Big[kJ_\nu(kx)\frac{dJ_\nu(kx')}{dk}-kJ_\nu(kx')\frac{dJ_\nu(kx)}{dk}\Big], \tag{1.2.15}$$

を得る．ここで，Bessel 関数の漸化式

$$\frac{dJ_\nu(z)}{dz}=\frac{\nu}{z}J_\nu(z)-J_{\nu+1}(z) \tag{1.2.16}$$

を利用して変形すると，

$$kJ_\nu(kx)J_\nu(kx')=\frac{1}{x^2-x'^2}\frac{d}{dk}\Big[kxJ_\nu(kx')J_{\nu+1}(kx)-kx'J_\nu(kx)J_{\nu+1}(kx')\Big] \tag{1.2.17}$$

となる．そこで，$\sqrt{xx'}$ を掛け，k について積分をすると，

$$\int_0^\infty \sqrt{xx'}kJ_\nu(kx)J_\nu(kx')dk = \frac{\sqrt{xx'}}{x^2-x'^2}\Big[kxJ_\nu(kx')J_{\nu+1}(kx) - kx'J_\nu(kx)J_{\nu+1}(kx')\Big]\Big|_0^\infty \tag{1.2.18}$$

を得る．Bessel 関数の変数がゼロでの漸近形は $J_\nu(z) \simeq (z/2)^\nu/\Gamma(\nu+1)$ なので，上式右辺で $k=0$ としたときは，$\nu > -1$ ならばゼロとなる．したがって，$k \to \infty$ の方だけを見積もるとよい．Bessel 関数の変数が大きいところでの漸近形

$$J_\nu(z) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos[z-(2\nu+1)\pi/4] \tag{1.2.19}$$

を用いて (1.2.18) の右辺を見積もると，

$$\int_0^\infty \sqrt{xx'}kJ_\nu(kx)J_\nu(kx')dk = \lim_{M\to\infty}\Big[\frac{\cos[(x+x')M-(\nu+1)\pi]}{\pi(x+x')} + \frac{\sin[(x-x')M]}{\pi(x-x')}\Big] \tag{1.2.20}$$

となる．ここで，超関数公式 (1.2.4) を使うと，

$$\int_0^\infty \sqrt{xx'}kJ_\nu(kx)J_\nu(kx')dk = \delta(x-x') + \sin((\nu+1)\pi)\delta(x+x') \tag{1.2.21}$$

となるが，この式の右辺２項目は ν が整数ならばゼロ，整数でなくても x, x' は正の領域の変数なので，実際には効力を持たない．したがって，

$$\int_0^\infty \sqrt{xx'}kJ_\nu(kx)J_\nu(kx')dk = \delta(x-x') \tag{1.2.22}$$

とおくことができ，これで，(1.2.14) 式の正しさが証明された．

また，この場合も変換式 (1.2.13) と (1.2.22) から Parseval の等式

$$\int_0^\infty [\hat{f}(k)]^2 dk = \int_0^\infty [f(x)]^2 dx \tag{1.2.23}$$

が成立することが，容易に示される．

なお，付記しておくと，(1.2.13) の変換式において $\nu = -\frac{1}{2}$, $\nu = \frac{1}{2}$ の場合，Bessel 関数は三角関数で表わされ，

$$J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z, \qquad J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z \tag{1.2.24}$$

なので，これらの場合，(1.2.13) は (1.2.11) (1.2.12) の Fourier-cosine, Fourier-sine 変換と一致する．したがって，ここで扱った Fourier-Bessel 変換は通常の Fourier 変換の拡張になっている．

以上からわかるように，Fourier 変換，およびその拡張されたものを含めて，そこでは，超関数公式 (1.2.4) が重要な働きをしていることになる．

1.3 半無限弾性棒の衝突問題

1.3.1 固有値・固有関数について

長さが半無限の弾性棒を考え，その左端を原点として棒に沿った座標 x を設定する．この棒の左端に質量 μ の錘を付けたときの振動を考え，時刻 $t(\geqq 0)$，座標 $x(\geqq 0)$ で弾性棒の長さ方向に発生する変位を $U(x,t)$ とする．この変位 $U(x,t)$ は通常の波動方程式

$$\partial_t{}^2 U(x,t) = \partial_x{}^2 U(x,t) \tag{1.3.1}$$

に従う．なおここでは，単位はすべて無次元系で扱うものとする[5]．この解を変数分離型の

$$U(x,t) = \left[A\cos(kx) + B\sin(kx)\right]\frac{\sin(kt)}{k} \tag{1.3.2}$$

とおく．任意定数 A, B は振幅，k は波数である．$x=0$ では錘の運動方程式を満たさなければならないので，

$$\mu{\partial_t}^2 U(0,t) = \partial_x U(x,t)|_{x=0} \tag{1.3.3}$$

となる．この式の右辺は弾性棒が錘に与える反作用である．これに (1.3.2) 式を当てはめると

$$B = -\mu k A \tag{1.3.4}$$

の関係が成立しなければならない．これを踏まえて，k を連続固有値としたときの固有関数を

$$X(x,k) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(kx-\alpha), \qquad k>0 \tag{1.3.5}$$

と定義しておく．ただし，α は

$$\tan\alpha = -\mu k \tag{1.3.6}$$

という形で k に従属したものである．この意味で，以後，α を $\alpha(k)$ と書くことにする．

ここでは，弾性棒と左端の錘とが一体になった系を考えているので，この固有関数の直交性を求めるには，積分するときに重み関数を導入しなければならない．すなわち，ϵ を錘の大きさとして，

$$\rho_\epsilon(x) = 1 + \mu\frac{\theta(\epsilon - x)}{\epsilon} \tag{1.3.7}$$

と重み関数を定義する．ここに $\theta(x)$ は単位階段関数であり，錘の大きさ ϵ は積分後に無限小にするものとする．固有関数 (1.3.5) にはこの重み関数を付けた直交性

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\infty \rho_\epsilon(x)X(x,k)X(x,k')dx = \delta(k-k') \tag{1.3.8}$$

が成り立つ．この式の証明は多少長い計算になる．まず，三角関数の加法定理で x が付く部分と付かない部分に分解し，x が付く部分は積をとってから三角関数の積和公式を用いると，

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\infty \rho_\epsilon(x)X(x,k)X(x,k')dx \\
&= \frac{2\mu}{\pi}\cos\alpha(k)\cos\alpha(k') + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Big[\cos(\alpha(k)-\alpha(k'))\cos((k-k')x) + \cos(\alpha(k)+\alpha(k'))\cos((k+k')x) \\
&\qquad + \sin(\alpha(k)-\alpha(k'))\sin((k-k')x) + \sin(\alpha(k)+\alpha(k'))\sin((k+k')x)\Big]dx
\end{aligned} \tag{1.3.9}$$

となる．これを積分し，結果が sine になるところは超関数公式 (1.2.4) を用いてデルタ関数に直す．$\delta(k+k')$ という項もでるが，k, k' は正なのでこれは効いてこない．積分結果が cosine のところは (1.2.4) で $x=\infty$ の部分はゼロとなるが，$x=0$ の部分が残ってしまう．この余分な項を消す役目が重み関数で，(1.3.6) の関係式を用いると重み関数から出る部分とうまく相殺される．これが固有関数の直交関係式である．

また，固有関数の完全性の方は重み関数を付ける必要はなく

$$\int_0^\infty X(x,k)X(x',k)dk = \delta(x-x') \tag{1.3.10}$$

と証明される．この式の証明は，まず，(1.3.9) を得たときと同じように三角関数の加法定理，積和公式を用いると，

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty X(x,k)X(x',k)dk \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Big[(2\cos^2\alpha(k)-1)\cos(k(x+x')) + 2\sin\alpha(k)\cos\alpha(k)\sin(k(x+x')) + \cos(k(x-x'))\Big]dk
\end{aligned} \tag{1.3.11}$$

[5]実際には，弾性棒の Young 率 E, 断面積 S, 密度 ρ をすべて 1 とした単位系を採用する．

となる．ここで，関係式 (1.3.6) より導かれる

$$\cos\alpha(k) = \frac{1}{\sqrt{1+(\mu k)^2}}, \qquad \sin\alpha(k) = -\frac{\mu k}{\sqrt{1+(\mu k)^2}} \tag{1.3.12}$$

を代入してから，積分公式

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ak)}{k^2+b^2}dk = \frac{\pi}{2b}e^{-|a|b}, \qquad \int_0^\infty \frac{k\sin(ak)}{k^2+b^2}dk = \varepsilon(a)\frac{\pi}{2}e^{-|a|b}, \qquad b>0 \tag{1.3.13}$$

を使う．ここに，$\varepsilon(a)$ は符号関数で，$\varepsilon(a) = 2\theta(a)-1$ である．指数関数がでるがこれらは相殺し，デルタ関数だけが残って (1.3.10) が証明される．

$L_2(0,\infty)$ に属する任意の関数を $f(x)$ とする．この関数について，(1.3.10) 式を用いると，

$$f(x) = \int_0^\infty \delta(x'-x)f(x')dx' = \int_0^\infty X(x,k)\Big[\int_0^\infty X(x',k)f(x')dx'\Big]dk \tag{1.3.14}$$

と書ける．これから，大括弧中を

$$\hat{f}(k) = \int_0^\infty X(x,k)f(x)dx \tag{1.3.15}$$

とおくことにすると，元の $f(x)$ は変換された $\hat{f}(k)$ から

$$f(x) = \int_0^\infty X(x,k)\hat{f}(k)dk \tag{1.3.16}$$

と求められることになる．この式および (1.3.8) を用いると，

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\infty \rho_\epsilon(x)f^2(x)dx &= \int_0^\infty\int_0^\infty \hat{f}(k)\hat{f}(k')\Big[\int_0^\infty \rho_\epsilon(x)X(x,k)X(x,k')dx\Big]dkdk' \\ &= \int_0^\infty \hat{f}^2(k)dk \end{aligned} \tag{1.3.17}$$

となる．これが Parseval の等式である．

(1.3.15) (1.3.16) の変換式を元の固有関数の定義 (1.3.5) を用いて書き直すと，

$$\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos(kx-\alpha(k))f(x)dx, \qquad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos(kx-\alpha(k))\hat{f}(k)dk \tag{1.3.18}$$

と書ける．ここで，つぎのことを注意する．α と k の関係式 (1.3.12) から $\mu=0$ のときは $\alpha(k)=0$, また，$\mu\to\infty$ のときは $\alpha(k)=-\pi/2$ とおけるので，この変換式は $\mu=0$, または ∞ のとき，それぞれ，(1.2.11) (1.2.12) で述べた Fourier-cosine, Fourier-sine 変換になる．つまり，この変換式 (1.3.18) は，Fourier-Bessel 変換がそうであったように，Fourier-cosine, Fourier-sine の各変換を内挿するものとなっている．次節では，この変換のさらなる拡張を試みる．

1.3.2 左端の錘に初速度を与えた場合の解

左端の錘に初速度 v_0 を与えた場合の解を求める．と言うよりは，半無限弾性棒の左端に，x が負の方向から，錘の代わりに質量 μ の弾丸を衝突させたと言う方がわかり易いかもしれない．

このときの変位 $U(x,t)$ をここでの固有関数 $X(x,k)$ で展開し，

$$U(x,t) = \int_0^\infty K(k)X(x,k)\frac{\sin(kt)}{k}dk \tag{1.3.19}$$

とおく．$K(k)$ はこのときの展開係数である．初期条件は，左端に衝突した大きさ ϵ の弾丸の速度 v_0 を与えることで，

$$\partial_t U(x,t)|_{t=0} = v_0\theta(\epsilon - x) \tag{1.3.20}$$

となる．この式に (1.3.19) を代入して，

$$\int_0^\infty K(k)X(x,k)dk = v_0\theta(\epsilon - x) \tag{1.3.21}$$

となり，この式の両辺に $\rho_\epsilon(x)X(x,k')$ を掛けて x 積分し，(1.3.8) の直交性を用いると，

$$K(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} v_0\mu\cos\alpha(k) \tag{1.3.22}$$

と展開係数 $K(k)$ が決まる．これを (1.3.19) に戻して，

$$U(x,t) = \frac{2v_0\mu}{\pi}\int_0^\infty \cos\alpha(k)\cos(kx-\alpha(k))\frac{\sin(kt)}{k}dk \tag{1.3.23}$$

と求められる．これを x で微分し弾性棒に発生する歪みを求めておくと，

$$\partial_x U(x,t) = -\frac{2v_0\mu}{\pi}\int_0^\infty \cos\alpha(k)\sin(kx-\alpha(k))\sin(kt)dk \tag{1.3.24}$$

となる．この式の k 積分を実行してみよう．三角関数の積和公式を使い，$\cos\alpha(k)$ の定義 (1.3.12)，および，積分公式 (1.3.13) を用いると，

$$\partial_x U(x,t) = -v_0 e^{-(t-x)/\mu}\theta(t-x) \tag{1.3.25}$$

と求められる．このとき，半無限の長さを持つ弾性棒を考えているので，反射波は存在せずに，右進行波のみで記述されることに注意する．もっともこの式自体は波動方程式の一般解から直接求めることができる．右進行波解 $f(t-x)$ を仮定し，

$$U(x,t) = f(t-x) \tag{1.3.26}$$

とおき，境界条件 (1.3.3) に代入すると

$$\frac{df'(t)}{dt} = -\frac{1}{\mu}f'(t) \tag{1.3.27}$$

となる．ここで，f' は f の微係数である．$t=0$ での初速度が v_0 となる解は

$$f'(t) = v_0 e^{-t/\mu}\theta(t) \tag{1.3.28}$$

となるが，ここで，時間 t を $t \to t-x$ と並行移動し，t 微分を x 微分に直してやると $\partial_t f(t-x) = -\partial_x f(t-x)$ なので，(1.3.25) が導かれる．

1.4 錘とばねが付いたモデル

1.4.1 固有関数の直交性と完全性

半無限の長さを持つ弾性棒の左端 $x=0$ に質量 μ の錘を付けることは前節と同じであるが，さらにこの端にばね定数 $\nu(\geqq 0)$ のばねを付けたモデルを考える．ばねの他端は静止したところに固定しておく．このときの境界条件は，錘が弾性棒から受ける反作用の他にばねから受ける力を考慮して，

$$\mu{\partial_t}^2 U(0,t) = \partial_x U(x,t)|_{x=0} - \nu U(0,t) \tag{1.4.1}$$

となる．このときの変位 $U(x,t)$ を変数分離型の

$$U(x,t) = X(x,k)\frac{\sin(kt)}{k} \tag{1.4.2}$$

とし，x 依存部分 $X(x,k)$ を

$$X(x,k)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(kx-\alpha(k)) \tag{1.4.3}$$

とする．これに (1.4.1) の条件を入れると

$$\tan\alpha(k)=-\mu k+\frac{\nu}{k} \tag{1.4.4}$$

と $\alpha(k)$ は k に依存した形になる．

前と同じ (1.3.7) の重み関数を付けて，この固有関数の直交性が

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\infty \rho_\epsilon(x)X(x,k)X(x,k')dx=\delta(k-k') \tag{1.4.5}$$

と求められる．計算方法は (1.3.8) を得たときとほぼ同じで，(1.2.4) の超関数公式，および，関係式 (1.4.4) を用いる．

固有関数の完全性を示すには，$\int_0^\infty X(x,k)X(x',k)dk$ を計算する．これに (1.4.3) を代入し，三角関数の加法定理，さらに積和公式を用いると，(1.3.11) と同じ形の式が得られるが，こんどは (1.4.4) から導かれる

$$\cos\alpha(k)=\frac{k}{\sqrt{k^2+(\mu k^2-\nu)^2}},\qquad \sin\alpha(k)=-\frac{\mu k^2-\nu}{\sqrt{k^2+(\mu k^2-\nu)^2}} \tag{1.4.6}$$

を代入する．結果は

$$\begin{aligned}\int_0^\infty & X(x,k)X(x',k)dk\\ &=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\Big[\frac{2k^2}{k^2+(\mu k^2-\nu)^2}\cos(k(x+x'))-\frac{2k(\mu k^2-\nu)}{k^2+(\mu k^2-\nu)^2}\sin(k(x+x'))\\ &\qquad\qquad +\cos(k(x-x'))-\cos(k(x+x'))\Big]dk\end{aligned} \tag{1.4.7}$$

となり，ここで,「新数学公式集 I」（丸善）397 - 398p にある公式

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{k^2\cos(ak)}{k^4+2b^2k^2+c^4}dk&=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}e^{-a\sqrt{(b^2+c^2)/2}}\Big[\frac{\cos(a\sqrt{(c^2-b^2)/2})}{\sqrt{b^2+c^2}}-\frac{\sin(a\sqrt{(c^2-b^2)/2})}{\sqrt{c^2-b^2}}\Big]\\ \int_0^\infty \frac{k\sin(ak)}{k^4+2b^2k^2+c^4}dk&=\frac{\pi}{2\sqrt{c^4-b^4}}e^{-a\sqrt{(b^2+c^2)/2}}\sin(a\sqrt{(c^2-b^2)/2})\\ \int_0^\infty dk\frac{k^3\sin(ak)}{k^4+2b^2k^2+c^4}dk&=\frac{\pi}{2}e^{-a\sqrt{(b^2+c^2)/2}}\Big[\cos(a\sqrt{(c^2-b^2)/2})-\frac{b^2\sin(a\sqrt{(c^2-b^2)/2})}{\sqrt{c^4-b^4}}\Big]\end{aligned} \tag{1.4.8}$$

を使う．ここで $a>0$ とする．この２番目の式については違う形で載っていたものを他の式に合せる形に修正した．計算はかなり面倒ではあるが，結果的に (1.4.7) 式の被積分関数のうち，１項目，２項目は消去され，残るのは３項目，４項目のみ，ただし，この４項目は $x,\ x'>0$ では消えるので，最終的に

$$\int_0^\infty X(x,k)X(x',k)dk=\delta(x-x') \tag{1.4.9}$$

と固有関数の完全性が導かれる．したがって，この場合も前節の (1.3.15) から (1.3.17) までの式がそのままの形で成立する．

1.4.2 完全性の別証明

積分公式 (1.4.8) の証明は，複素積分を用いてなされる．それならばいっそのこと，初めから複素積分を使うことにすれば，このような面倒な積分公式を使わずにすむのではないか．ここでは，関係式 (1.4.4) 式に一般性を持たせるため，

$$\tan\alpha(k)=g(k) \tag{1.4.10}$$

と記すことにする．

固有関数の完全性を求めるための式を

$$I \equiv \int_0^\infty X(x,k)X(x',k)dk = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(kx-\alpha(k))\cos(kx'-\alpha(k))dk \tag{1.4.11}$$

と表わしておく．ここで，三角関数の加法定理，積和公式を用いると，(1.3.11) と同じ形の式が得られるので，こんどは，(1.4.10) 式から得られる

$$\cos\alpha(k) = \frac{1}{\sqrt{1+g^2(k)}}, \qquad \sin\alpha(k) = \frac{g(k)}{\sqrt{1+g^2(k)}} \tag{1.4.12}$$

を代入すると

$$I = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Big[2\frac{\cos(k(x+x')) + g(k)\sin(k(x+x'))}{1+g^2(k)} + \cos(k(x-x')) - \cos(k(x+x'))\Big]dk \tag{1.4.13}$$

となる．この式の被積分関数の 2 項目，3 項目は

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Big[\cos(k(x-x')) - \cos(k(x+x'))\Big]dk = \delta(x-x') \tag{1.4.14}$$

と積分される．ここで， x, $x'>0$ なので，$\delta(x+x')$ の方はゼロと見なした．

(1.4.13) 式の残る項を J とおく．すなわち，

$$J \equiv \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(ak) + g(k)\sin(ak)}{1+g^2(k)}dk \tag{1.4.15}$$

ここで，$a = x+x' > 0$ とおいた．

この積分値がゼロであることを以下に示す．まず，$g(k)$ が奇関数であることを仮定するとこの被積分関数は偶関数となるので，

$$J = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(ak) + g(k)\sin(ak)}{1+g^2(k)}dk \tag{1.4.16}$$

と積分範囲を $-\infty$ から $+\infty$ とできる．ここで，三角関数にはオイラーの公式，分母は因数分解して，

$$J = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{[1-ig(k)]e^{iak} + [1+ig(k)]e^{-iak}}{[1+ig(k)][1-ig(k)]}dk \tag{1.4.17}$$

となる．さらに，k 積分を複素積分 z に拡張し，

$$J = \frac{1}{2\pi}\Big[\oint_{C_+}\frac{e^{iaz}}{1+ig(z)}dz + \oint_{C_-}\frac{e^{-iaz}}{1-ig(z)}dz\Big] \tag{1.4.18}$$

とする．ここに， 1 項目の積分 C_+ は実軸上を $-\infty$ から $+\infty$ まで積分したあと，半径無限大の上半平面の半円に沿った積分，また， 2 項目の積分 C_- は同じく実軸上を積分したのち，下半平面の半円に沿った積分である．ここで，これら積分の分母のゼロ点の位置を調べてみる．(1.4.4) 式から

$$g(z) = -\mu z + \frac{\nu}{z} \tag{1.4.19}$$

なので，$1+ig(z)$ のゼロ点を $Z_\pm^{(+)}$ とすると，

$$Z_\pm^{(+)} = \frac{-i \pm \sqrt{4\mu\nu - 1}}{2\mu} \tag{1.4.20}$$

と求められる．μ, $\nu>0$ なので，$4\mu\nu - 1 \geqq 0$ の場合は明らかにこれらゼロ点は下半平面上にある．また，$4\mu\nu - 1 < 0$ の場合は $\sqrt{4\mu\nu-1}$ は虚数になるが，その絶対値は 1 より小なので，やはりゼロ点は下半面上に

存在する．したがって，留数定理より，(1.4.18) 式の 1 項目の積分はその積分路内に極を持たず，積分値はゼロになる．

２項目の積分についても同様に言える．$1 - ig(z)$ のゼロ点を $Z_{\pm}^{(-)}$ とすると，

$$Z_{\pm}^{(-)} = \frac{i \pm \sqrt{4\mu\nu - 1}}{2\mu} \tag{1.4.21}$$

となり，$4\mu\nu - 1$ の正負に関係なくこれらのゼロ点は上半面上に存在する．したがって，(1.4.18) 式 2 項目の積分路内には極が存在せずその積分値はゼロとなる．かくして，(1.4.15) 式の J がゼロとなることがわかったので，(1.4.9) の完全性の式が得られたことになる．

ここでの結果を導くにあたって主要な役目をはたしているのは，(1.4.18) の被積分関数の極の位置だけである．このことは，関数 $g(k)$ がさらに一般化される可能性があることを示唆している．これについては次節で議論する．

1.5　さらなる一般化

これまでの議論をまとめると，変数 α と k を関係付ける条件式 (1.4.4) を (1.4.10) のように $\tan\alpha(k) = g(k)$ と一般化した場合，k を複素数 z に拡張した $g(z)$ がつぎの 3 条件を満たすならば完全性が証明できることがわかる．すなわち，

条件 1 $g(z)$ は奇関数．

条件 2 $g(z)$ は上半面で正則．

条件 3 $1 + ig(z)$ は上半面でゼロにならない．また，$1 + ig(z)$ は $z \to \infty$ で指数関数的にゼロに近づかない．

下半面に関する要請は，これから導かれるのでここでは省略する．

幸いこれらの条件にぴったり叶う関数が存在する．Herglotz 関数というもので，これに関しては現著者の一人（中西）が「物理学辞典」（培風館）（1924p）に解説を執筆しているので，以下にその全文を引用する．

[ヘルグロッツ関数]　一般化された R 関数ともよばれ，次のヘルグロッツの定理にでてくる関数である：実軸上にカット $(-\infty, a\,]$ および $[\,a, \infty)$ $(a > 0)$ をいれた複素平面上の解析関数 $f(z)$ であって，上半面 $(\Im z > 0)$ において，$\Im f(z) \geqq 0$ であるものとする．このとき $f(z)$ はそのカット平面上で

$$f(z) = Az + B + \frac{C}{z} + \int_0^\infty \frac{z}{x}\Big[\frac{d\alpha(x)}{x - z} + \frac{d\beta(x)}{x + z}\Big]$$

と表示される．ここに，A，B，C は実の定数で，$A \geqq 0$，$C \leqq 0$，$\lim_{|\Im z| \to \infty} f(z)/z = A$，$\alpha(x)$ と$\beta(x)$ は区間 $[\,0, \infty)$ において非減少な実関数であって，スチルチェス積分

$$\int^\infty \frac{d\alpha(x)}{x^2}, \qquad \int^\infty \frac{d\beta(x)}{x^2}, \qquad \int^\infty \frac{d\alpha(x) - d\beta(x)}{x}$$

が収束するものとする．

この定理は，物理学でははじめモーメントの問題や回路のリアクタンスの理論で用いられた．場の量子論では，1955 年 L. Castillejo, R. H. Dalitz, F. J. Dyson がロー方程式の解を求めるのに応用し，ロー方程式の解は一意に決まらず無限個の極が存在しうるという不定性のあることを示した．この極を CDD 極という．この定理は，$f(z)$ の虚部の符号と z のそれが一致するという性質から $f(z)$ の漸近的ふるまいが決まってしまうところが著しい特長である．

Herglotz 関数自体は一般に偶関数でも奇関数でもないが，奇関数に制限するには，$B=0,\ \alpha(x)=\beta(x)$ とするとよい．これで条件 1 は満たされる．条件 3 を満たすには，Herglotz 関数は複素平面の上半面でその虚部は非負なので，ここで使用する関数 $g(z)$ を Herglotz 関数 $f(z)$ の符号を変えたもの $g(z)=-f(z)$ にしておくと $1+ig(z)$ の実部は上半面で 1 以上になり，ゼロ点をもたなくなる．したがって，

$$g(z)=-Az-\frac{C}{z}-2z\int_0^\infty \frac{d\alpha(s)}{s^2-z^2} \tag{1.5.1}$$

とおける．あるいは，$A=\mu,\ C=-\nu,\ d\alpha(s)=\sigma(s)ds/2$ とおいて，

$$g(z)=-\mu z+\frac{\nu}{z}-z\int_0^\infty \frac{\sigma(s)}{s^2-z^2}ds \tag{1.5.2}$$

と表わされる．ここに，$\mu,\ \nu,\ \sigma(s)$ はすべて非負の量で，$\sigma(s)$ はデルタ関数を含んでもよい．したがって，$g(z)$ を有理型関数に制限した場合は，$\sigma(s)=\sum_n a_n\delta(s-b_n)$ とおいて

$$g(z)=-\mu z+\frac{\nu}{z}-z\sum_n \frac{a_n}{{b_n}^2-z^2} \tag{1.5.3}$$

とおくことができる．ただし，a_n，b_n は正の定数とする．これで，条件 2 も満たされた関数ができあがる．(1.4.19) と比べてみるとこの式右辺の 3 項目が増えたことになる．ただし，この 3 項目に関しては物理的観点からの意味付けはかなり困難なものと思われるが，少なくも数学的にはこれで固有関数の完全性が証明される．したがって，この式 (1.5.3) を用いた拡張型の Fourier 変換式が前々節同様の (1.3.15) (1.3.16) の形で書けることになる．なお，この変換式を導出するには，固有関数の完全性だけがあれば十分で，固有関数の直交性は必ずしも必要ではないことを注意する．実際，重み関数として (1.3.7)，固有関数として (1.4.3) の形のものを仮定し，直交性の式を求めてみると，

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\infty \rho_\epsilon(x)X(x,k)X(x,k')dx=\delta(k-k')-\frac{2}{\pi}\cos\alpha(k)\cos\alpha(k')\sum_n \frac{a_n{b_n}^2}{({b_n}^2-k^2)({b_n}^2-k'^2)} \tag{1.5.4}$$

となる．ここで，重み関数あるいは固有関数を変更することで，この式右辺の 2 項目がうまく消去される方法が見つかるとよい．ひとつ考えられる方法として，不満足ではあるが，固有関数の方は (1.4.3) の形のままにしておき，重み関数の方を，x の微分演算子を含む形

$$\rho_\epsilon(x)=1+\mu\frac{\theta(\epsilon-x)}{\epsilon}+\sum_n a_n{b_n}^2\frac{1}{{b_n}^2+\overleftarrow{\partial}_x{}^2}\delta(x-\epsilon)\frac{1}{{b_n}^2+\overrightarrow{\partial}_x{}^2} \tag{1.5.5}$$

と修正する．ここに，$\overleftarrow{\partial}_x$，$\overrightarrow{\partial}_x$ は，それぞれ，左右に作用する微分演算子である．これを用いると (1.5.4) 式右辺の 2 項目は相殺され，

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\infty X(x,k)\rho_\epsilon(x)X(x,k')dx=\delta(k-k') \tag{1.5.6}$$

と固有関数の直交性が示せる．直交性が求められるとこの場合も (1.3.17) と同じ形の Parseval の等式が成り立つ．数学的にはこれで問題はないのであるが，この種の解析の物理的意味付けは残された課題である．

並進演算子

Translation Operators

矢野　忠[6]

2.1　はじめに

運動量の x 成分を p_x と表すと量子力学ではこれはエルミート演算子であり，この p_x からつくられた演算子

$$U(a) = \exp(-iap_x/\hbar) \tag{2.1.1}$$

は並進演算子といわれ，これはユニタリー演算子である．

すなわち，この並進演算子 $U(a)$ を何回でも微分できる，任意の関数 $f(x)$ にオペレート（演算）すれば，

$$U(a)f(x) = f(x-a) \tag{2.1.2}$$

となる．

すなわち，演算子 $U(a)$ を任意の無限回微分可能な x の関数 $f(x)$ にオペレートすれば，この $U(a)$ の作用（働き）はもとの関数 $f(x)$ を x の正の方向に a だけ平行移動した関数 $f(x-a)$ となる．そのために $U(a)$ は並進を引き起こす演算子 (translation operator) となっている．

一見したところでは，(2.1.2) はちょっと不思議に思える．はたして本当にそんな式が成り立つのか．そのことを調べてみようというのが，このエッセイの目的である．

2.2　量子力学での運動量

(2.1.2) が成り立つことを示せればいいのだが，そのためにはいくつかのことを知っておかねばならない．

まず，運動量とは何か．いま質量 m の粒子があって，その粒子が 3 次元空間の x 軸の正の方向に速さ v で動いているとしよう．そのとき

$$p = mv \tag{2.2.1}$$

で x 軸の方向の運動量 p を定義する．

普通には 3 次元空間の中に 3 次元の直交座標系 O-xyz を設定して，その x 軸の方に粒子が進んでいるとしているので，p の代わりに p_x と添字をつけて x 軸の方向の運動量の成分を表す．一般には勝手に座標系を設定して，その x 軸の方向に粒子がたまたま進んでいることはあまり起こらないが，座標系の取り方は任意であるから，3 次元空間で粒子が一直線で進む方向を座標系の x 軸になるように座標系をとるとよい．また，普通の粒子は空間中でジグザグのコースをたどって動くが，いまはそういうことは考えない．

[6]yanotad@earth.ocn.ne.jp

ところで，量子力学では古典力学とはちがって位置座標 x とそれに正準共役な運動量 p_x との間には

$$xp_x - p_x x = i\hbar \tag{2.2.2}$$

という関係が成り立つ．ここで，i は虚数単位を表し，$\hbar$ はエッチバーとか Dirac の h と呼ばれる，ある小さな値をとる物理定数である．

$$\hbar = 1.0546 \times 10^{-34}\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}$$

$\hbar$ はとても小さな値をとる定数ではあるが，(2.2.2) は $xp_x = p_x x$ が成立しないことを示している．

普通の数の掛け算では $ab = ba$ が成立するが，量子力学では正準共役な量の間の積の順序は交換しない．(2.2.2) は交換関係と呼ばれる，よく知られた関係である．ところで (2.2.2) が成り立つことは天下りであり，それをそのままではなかなか了解できないが，微分演算を知っていれば，なるほどと了解できる方法がある．

いま，天下りだが，

$$p_x = -i\hbar\frac{d}{dx} \tag{2.2.3}$$

と定義する．そして $xp_x - p_x x$ を x で連続無限回微分可能である，x の任意関数 $f(x)$ にオペレートしてみよう．

$$\begin{aligned}(xp_x - p_x x)f(x) &= \left[x\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right) - \left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)x\right]f(x)\\ &= -i\hbar\left[x\frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}(xf(x))\right]\\ &= i\hbar f(x)\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

ここで $f(x)$ は任意の関数であるから，(2.2.2) が成り立つことがわかった．

2.3 Taylor 展開

この節では Taylor 展開の公式を思い出すことにしよう．

Taylor 展開は関数 $f(x+h)$ を $f(x)$ とその x での導関数を用いて，h のべき級数として

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) + \cdots \tag{2.3.1}$$

で表される．この Taylor 展開の式の導出は付録に与える．

この Taylor 展開は総和を表す記号 Σ を用いると，簡単に

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) \tag{2.3.2}$$

と表すこともできる．ただし，

$$f^{(0)} \equiv f(x) \tag{2.3.3}$$

とする．

この Taylor 展開を用いると指数関数 $\exp(x)$ の Taylor 展開は

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \tag{2.3.4}$$

と表すことができる．この関係を次節で用いる．

2.4　（2.1.2）の導出

この節では (2.1.2) を導出しよう.

まず $U(a)$ は (2.3.4) で $x = -iap_x/\hbar$ とおけば,

$$
\begin{aligned}
U(a) &= \exp(-iap_x/\hbar) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-iap_x/\hbar)^n
\end{aligned}
\tag{2.4.1}
$$

と Taylor 展開を用いて表すことができる.

さらに

$$
p_x = -i\hbar\frac{d}{dx} \tag{2.2.3}
$$

を用いれば

$$
-iap_x/\hbar = -a\frac{d}{dx}
$$

と表すことができる.

そうすれば,

$$
\begin{aligned}
U(a) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-a\frac{d}{dx}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-a)^n\left(\frac{d}{dx}\right)^n
\end{aligned}
\tag{2.4.2}
$$

いま

$$
\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x) = f^{(n)}(x)
$$

と表せば,

$$
U(a)f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} f^{(n)}(x) \tag{2.4.3}
$$

となる.

一方，前に記した Taylor 展開 (2.3.2) で $h = -a$ とおけば,

$$
f(x-a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} f^{(n)}(x) \tag{2.4.4}
$$

となり，(2.4.3) と (2.4.4) とから

$$
U(a)f(x) = f(x-a) \tag{2.1.2}
$$

が導かれる.

2.5　3 次元への一般化

いままではわかりやすいように，問題を 1 次元で取り扱ってきたが，これを 3 次元に一般化することは難しくない.

$$
a \Longrightarrow \mathbf{a}
$$

$$
p_x \Longrightarrow \mathbf{p} = -i\hbar\nabla
$$

と置き換え，3 次元の運動量 $\mathbf{p}$ をベクトルの微分演算記号ナブラを用いて表せば

$$
\begin{aligned}
U(\mathbf{a})f(\mathbf{x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-i\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}}{\hbar} \right)^n f(\mathbf{x}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\mathbf{a}\cdot\nabla \right)^n f(\mathbf{x}) \\
&= f(\mathbf{x}-\mathbf{a}) \qquad (2.5.1)
\end{aligned}
$$

となる．

2.6 おわりに

量子力学や Taylor 展開を知っている人にはなんでもないことかもしれないが，あまり物理学を学んだことがない人にもわかるように並進演算子について述べてみた．さて，一般の人がこれについてどのように感じられたかを一度聞いてみたい．

付録 Taylor 展開の導出

Taylor 展開 (2.3.1) は関数 $f(x+h)$ の値を $x+h$ の近傍の点 x での値 $f(x)$ とその高階の微係数 $f^{(n)}(x)$，$(n=1,2,3,\cdots)$ から求める．

いま無限回微分可能な関数 $f(x+h)$ があるとき，これを h のべき級数で

$$
f(x+h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + a_4 h^4 + \cdots + a_n h^n + \cdots \qquad (2.6.1)
$$

と表すことができるとしよう．このときに h のべきの係数 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots$ は未定の係数である．

さて，どうやってこれらの係数を決めていけばよいだろうか．まず (2.6.1) で $h=0$ とおけば，直ちに

$$
a_0 = f(x)
$$

と求められる．

つぎに，(2.6.1) の両辺を h で微分すれば

$$
f'(x+h) = a_1 + 2a_2 h + 3a_3 h^2 + 4a_4 h^3 + \cdots + n a_n h^{n-1} + \cdots \qquad (2.6.2)
$$

が得られる．(2.6.2) で $h=0$ とおけば

$$
a_1 = f'(x)
$$

と求められる．

さらに，(2.6.2) の両辺を h で微分すれば

$$
f''(x+h) = 2a_2 + 2\cdot 3a_3 h + 3\cdot 4a_4 h^2 + \cdots + (n-1)n a_n h^{n-2} + \cdots \qquad (2.6.3)
$$

が得られる．(2.6.3) で $h=0$ とおけば

$$
a_2 = \frac{1}{2!} f''(x)
$$

と求められる．

さらにつづけて，(2.6.3) の両辺を h で微分すれば

$$
f'''(x+h) = 1\cdot 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4 h + \cdots + (n-2)(n-1)n a_n h^{n-3} + \cdots \qquad (2.6.4)
$$

が得られる．(2.6.4) で $h = 0$ とおけば

$$a_3 = \frac{1}{3!} f'''(x)$$

と求められる．

以下，同様な方法で係数を求めれば

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)$$

と求められる．

このようにして求められた係数を (2.6.1) に代入すれば，

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^n(x) + \cdots \tag{2.3.1}$$

が求められる．

(2012. 8. 7)

四元数と空間回転4

The Quaternions and Rotations 4

矢野　忠 [7]
Tadashi Yano

3.1　はじめに

前回のエッセイ [1] で行列による回転の表示として SO(3) による表現を述べた．この SO(3) の表現に対応した SU(2) の表現をこのエッセイでは述べたい．

SO(3) による表現として 3 次元のベクトル $x^1e_1+x^2e_2+x^3e_3$ を考えるとき，ここで基底ベクトル e_1,e_2,e_3 を

$$e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad e_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

ととる．

すなわち，

$$\begin{bmatrix}x^1\\x^2\\x^3\end{bmatrix}=x^1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+x^2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+x^3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=x^1e_1+x^2e_2+x^3e_3 \tag{3.1.1}$$

このようにして 3 次元のベクトルを 3 行 1 列の列ベクトルとして表すことができる．

成分が (x^1,x^2,x^3) のベクトルは回転してそのベクトルの成分が (x'^1,x'^2,x'^3) になったとしよう．このときに (x^1,x^2,x^3) と (x'^1,x'^2,x'^3) との関係は 3 行 3 列の行列で表される．

これが前回に取り扱った回転の SO(3) 表現であった．次節では SU(2) の表現を述べよう．

つぎの節に行く前に一つ注意をしておきたい．次節以下で少しこみいったことはすべて付録に回した．だから読んで途中で気になったところがあっても，まずは話の筋を優先してほしい．その後で気になったところは付録の説明で補うか，またはそこに挙げられた参考文献を参照してほしい．それらを参照すれば，いくらかは納得をして頂けるであろう．

3.2　SU(2) の表現

いま，$x^1e_1+x^2e_2+x^3e_3$ で基底ベクトル e_1,e_2,e_3 を 2 行 2 列の行列

$$\sigma_1=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\quad \sigma_2=\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix},\quad \sigma_3=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix} \tag{3.2.1}$$

[7] yanotad@earth.ocn.ne.jp

に変えると

$$x^1\sigma_1 + x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3 \tag{3.2.2}$$

が得られる．この $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ は Pauli 行列といい，量子力学で電子にスピン（電子の固有角運動量）を導入するために考えられたものである [8].

上に与えた Pauli 行列の表現を用いると

$$\begin{aligned} x^1\sigma_1 + x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3 &= x_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

となる [9].

SO(3) のときに

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \text{ と } \begin{bmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix}$$

とを 3 行 3 列の行列で関係づけたが，SU(2) では

$$P = \begin{bmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{bmatrix} \tag{3.2.4}$$

と

$$P' = \begin{bmatrix} x'^3 & x'^1 - ix'^2 \\ x'^1 + ix'^2 & -x'^3 \end{bmatrix} \tag{3.2.5}$$

との関係をつける変換の 2 行 2 列のユニタリー行列 Q を考える．

すなわち，P と P' とはユニタリー行列 Q で

$$P' = QPQ^\dagger \tag{3.2.6}$$

と関係付けられる．この相似変換 (3.2.6) はここでは天下りだが，すぐ後で四元数の回転の表現から導く．

ユニタリー行列 Q とはそのエルミート共役行列 $Q^\dagger$ が逆行列 Q^{-1} となる行列のことである．すなわち，

$$Q^\dagger = Q^{-1}$$

この行列がユニタリーであるという条件を用いれば，Q は一般に

$$Q = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}, \quad \text{where} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \tag{3.2.7}$$

と表される（付録 3 参照）．ここで $\bar{a}$ は a の共役複素数である．$\bar{b}$ も同様である．

このとき

$$P' = QPQ^\dagger = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{bmatrix} \tag{3.2.8}$$

となる．

いま (3.2.8) をあまりはっきり理由を述べないで示したが，これを四元数の空間回転の表現

$$u = qv\bar{q} \tag{3.2.9}$$

[8] この Pauli 行列の求め方を述べた文献を付録 1 で紹介する．

[9] なぜ (3.1.1) の代わりに (3.2.2) をとるのか．それは 2 行 2 列の任意の行列を単位行列 1 と Pauli 行列 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ の 1 次結合として表すことができるからである．立ち入った説明は付録 2 で述べる．

から導いてみよう．ただし，このときにちょっと注意が必要である．前に

$$v = x^1 i + x^2 j + x^3 k \tag{3.2.10}$$

と表したが [1] [10]，このとき i, j, k を Pauli の行列で

$$i \to i\sigma_1, \quad j \to i\sigma_2, \quad k \to i\sigma_3$$

と対応させて置き換えれば

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j \tag{3.2.11}$$

が成り立たない．それを修正して (3.2.11) を成立させるために普通にとられているのは

$$i \to i\sigma_3, \quad j \to i\sigma_2, \quad k \to i\sigma_1 \tag{3.2.12}$$

と対応させることである（付録 4）．またこの置き換えをするときには (3.2.10) で $x^1 \leftrightarrow x^3$ の入れ替えも必要である．このとき x^2 はそのままである．このような置き換えをすると

$$v = i(x^3\sigma_3 + x^2\sigma_2 + x^1\sigma_1) = i\begin{bmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{bmatrix}$$

となる [11]．

同様な置換をすれば，$q = q^0 + q^1 i + q^2 j + q^3 k$ は

$$q = q^0 + i(q^3\sigma_3 + q^2\sigma_2 + q^1\sigma_1) = \begin{bmatrix} q^0 + iq^3 & i(q^1 - iq^2) \\ i(q^1 + iq^2) & q^0 - iq^3 \end{bmatrix}$$

となる．また $\bar{q} = q^0 - (q^1 i + q^2 j + q^3 k)$ は

$$q = q^0 - i(q^3\sigma_3 + q^2\sigma_2 + q^1\sigma_1) = \begin{bmatrix} q^0 - iq^3 & -i(q^1 - iq^2) \\ -i(q^1 + iq^2) & q^0 + iq^3 \end{bmatrix}$$

となる．

したがって，$qv\bar{q}$ は

$$qv\bar{q} = \begin{bmatrix} q^0 + iq^3 & i(q^1 - iq^2) \\ i(q^1 + iq^2) & q^0 - iq^3 \end{bmatrix} i \begin{bmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^0 - iq^3 & -i(q^1 - iq^2) \\ -i(q^1 + iq^2) & q^0 + iq^3 \end{bmatrix} \tag{3.2.13}$$

である．

いま $v = iP$ とおき，

$$Q = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q^0 + iq^3 & i(q^1 - iq^2) \\ i(q^1 + iq^2) & q^0 - iq^3 \end{bmatrix} \tag{3.2.14}$$

とおくことができる．$a = q^0 + iq^3$ とすれば，$\bar{a} = q^0 - iq^3$ であり，$b = i(q^1 - q^2)$ とすれば，$-\bar{b} = i(q^1 + q^2)$ である．また

$$Q^\dagger = \begin{bmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q^0 - iq^3 & -i(q^1 - iq^2) \\ -i(q^1 + iq^2) & q^0 + iq^3 \end{bmatrix} \tag{3.2.15}$$

であるから，したがって $qv\bar{q}$ から $P' = QPQ^\dagger$，すなわち (3.2.9) から (3.2.8) が導かれる．Q がユニタリー行列，すなわち $QQ^\dagger = 1$ を満たすことはいうまでもない．

形式的には上の説明でいいのだが，実際に (3.2.13) の行列の演算を行って，それが SO(3) の表現と一致することを次節で確かめよう．

ただし，SO(3) の表現と比較するときにはちょっとした注意が必要であるが，これは (3.2.13) の演算を行った後に改めて述べるので当面は忘れてもらってもよい．

[10] この [1] の式では $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ と表されている．

[11] この行列はトレース=0 で，エルミートである．この 2 つの性質は相似変換で不変である．トレースとエルミートの定義は付録 5 で述べる．

3.3 SO(3) との同等性

では (3.2.13) の演算にとりかかろう．その前に (3.2.13) は計算が面倒なので，記号をいくつか導入しておこう．

$$
\begin{aligned}
x_- &= x^1 - ix^2 \\
x_+ &= x^1 + ix^2 \\
q_- &= q^1 - iq^2 \\
q_+ &= q^1 + iq^2
\end{aligned}
$$

と略記する．これらの記号を用いて $P' = QPQ^\dagger$ を計算する．すなわち

$$
\begin{bmatrix} x'^3 & x'_- \\ x'_+ & -x'^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q^0 + iq^3 & iq_- \\ iq_+ & q^0 - iq^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^3 & x_- \\ x_+ & -x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^0 - iq^3 & -iq_- \\ -iq_+ & q^0 + iq^3 \end{bmatrix} \tag{3.3.1}
$$

この計算を一度にするのは大変なので，まず

$$
\begin{bmatrix} x^3 & x_- \\ x_+ & -x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^0 - iq^3 & -iq_- \\ -iq_+ & q^0 + iq^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}
$$

と表すことにしよう．ここで，

$$
\begin{aligned}
A &= x^3(q^0 - iq^3) - ix_-q_+ \\
B &= -ix^3q_- + x_-(q^0 + iq^3) \\
C &= x_+(q^0 - iq^3) + ix^3q_+ \\
D &= -ix_+q_- - x^3(q^0 + iq^3)
\end{aligned}
$$

である．

したがって

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x'^3 & x'_- \\ x'_+ & -x'^3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} q^0 + iq^3 & iq_- \\ iq_+ & q^0 - iq^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (q^0 + iq^3)A + iq_-C & (q^0 + iq^3)B + iq_-D \\ iq_+A + (q^0 - iq^3)C & iq_+B + (q^0 - iq^3)D \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

となる．

まず，簡単に求められる x'^3 は

$$
\begin{aligned}
x'^3 &= (q^0 + iq^3)A + iq_-C \\
&= G_3x^3 - G_-x_- + G_+x_+ \\
&= G_1x^1 + G_2x^2 + G_3x^3
\end{aligned} \tag{3.3.2}
$$

である．ここで

$$
\begin{aligned}
G_3 &= (q^0)^2 + (q^3)^2 - (q^1)^2 - (q^2)^2 \\
G_- &= i(q^0 + iq^3)q_+ \\
G_+ &= iq_-(q^0 - iq^3)
\end{aligned}
$$

ところで

$$
-G_-x_- + G_+x_+ = G_1x_1 + G_2x_2 \tag{3.3.3}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
G_1 &= G_+ - G_- = 2(q^0q^2 + q^1q^3) \\
G_2 &= i(G_+ + G_-) = 2(q^2q^3 - q^0q^1) \\
G_3 &= (q^0)^2 + (q^3)^2 - (q^1)^2 - (q^2)^2
\end{aligned}
$$

である．

つぎに

$$
\begin{aligned}
x'^1 - ix'^2 &= (q^0 + iq^3)B + iq_-D \\
&= R_3x^3 + R_-x_- + R_+x_+
\end{aligned} \tag{3.3.4}
$$

である．ここで

$$
\begin{aligned}
R_3 &= -2iq_-(q^0 + iq^3) \\
R_- &= (q^0 + iq^3)^2 \\
R_+ &= (q_-)^2
\end{aligned}
$$

である．また

$$
\begin{aligned}
x'^1 + ix'^2 &= iq_+A + (q^0 - iq^3)C \\
&= S_3x^3 + S_-x_- + S_+x_+
\end{aligned} \tag{3.3.5}
$$

である．ここで

$$
\begin{aligned}
S_3 &= 2iq_+(q^0 - iq^3) \\
S_- &= (q_+)^2 \\
S_+ &= (q^0 - iq^3)^2
\end{aligned}
$$

である．

(3.3.2),(3.3.4),(3.3.5) から

$$x'^1 = E_1x^1 + E_2x^2 + E_3x^3 \tag{3.3.6}$$

$$x'^2 = F_1x^1 + F_2x^2 + F_3x^3 \tag{3.3.7}$$

$$x'^3 = G_1x^1 + G_2x^2 + G_3x^3 \tag{3.3.8}$$

と表すことにしよう．ここで

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \frac{1}{2}(R_+ + R_- + S_+ + S_-) = (q^0)^2 + (q^1)^2 - (q^2)^2 - (q^3)^2 \\
E_2 &= \frac{i}{2}(R_+ + S_+ - R_- - S_-) = 2(q^1q^2 + q^0q^3) \\
E_3 &= \frac{1}{2}(R_3 + S_3) = 2(q^1q^3 - q^0q^2) \\
F_1 &= \frac{1}{2i}(S_+ + S_- - R_+ - R_-) = 2(q^1q^2 - q^0q^3) \\
F_2 &= \frac{1}{2}(S_+ + R_- - R_+ - S_-) = (q^0)^2 + (q^2)^2 - (q^1)^2 - (q^3)^2 \\
F_3 &= \frac{1}{2i}(S_3 - R_3) = 2(q^0q^1 + q^2q^3) \\
G_1 &= G_+ - G_- = 2(q^0q^2 + q^1q^3) \\
G_2 &= i(G_+ + G_-) = 2(q^2q^3 - q^0q^1) \\
G_3 &= (q^0)^2 + (q^3)^2 - (q^1)^2 - (q^2)^2
\end{aligned}
$$

である．これらの $E_1, E_2, \cdots$ に

$$
\begin{aligned}
q^0 &= \cos\frac{\theta}{2} \\
q^1 &= n_1 \sin\frac{\theta}{2} \\
q^2 &= n_2 \sin\frac{\theta}{2} \\
q^3 &= n_3 \sin\frac{\theta}{2}
\end{aligned}
$$

を代入すれば

$$E_1 = \cos\theta + n_1^2(1-\cos\theta) \tag{3.3.9}$$
$$E_2 = n_1 n_2(1-\cos\theta) + n_3\sin\theta \tag{3.3.10}$$
$$E_3 = n_1 n_3(1-\cos\theta) - n_2\sin\theta \tag{3.3.11}$$
$$F_1 = n_1 n_2(1-\cos\theta) - n_3\sin\theta \tag{3.3.12}$$
$$F_2 = \cos\theta + n_2^2(1-\cos\theta) \tag{3.3.13}$$
$$F_3 = n_2 n_3(1-\cos\theta) + n_1\sin\theta \tag{3.3.14}$$
$$G_1 = n_2\sin\theta + n_1 n_3(1-\cos\theta) \tag{3.3.15}$$
$$G_2 = n_2 n_3(1-\cos\theta) - n_1\sin\theta \tag{3.3.16}$$
$$G_3 = \cos\theta + n_3^2(1-\cos\theta) \tag{3.3.17}$$

これで，得られた x'^1, x'^2, x'^3 を [1] で得られた式と一致するかどうか調べることができる．ただし，そのままでは式が一致しない．なぜなら，[1] で得られた式は

$$v = x^1 i + x^2 j + x^3 k$$

に対して得られた式であるが，ここで得られた式は

$$v = x^3 i + x^2 j + x^1 k$$

に対する式であった．それで [1] の式で

$$x^1 \leftrightarrow x^3, \quad x'^1 \leftrightarrow x'^3, \quad n_1 \leftrightarrow n_3 \tag{3.3.18}$$

との置き換えを行った後に上の結果と一致することを確かめねばならない．

(3.3.18) の置き換えを前の式で行うと上で得られた式と完全に一致している（詳細は付録 6 に示す）．したがって，SU(2) の表現と SO(3) の表現とが一致していることが示された．

3.4 おわりに

このエッセイでは四元数の空間回転から，行列による空間回転の SU(2) 表現を導き，かつそれが行列のよく知られた SO(3) 表現と一致をすることを述べた．

次回は空間回転のベクトル表現を導き，これが行列の SO(3) 表現と同等であることを示すことにしたい．

付録 1　Pauli 行列の求め方

Pauli 行列はとても有名なものであり，いまさらその形が (3.2.1) のように求められることを示す必要もないだろう．その求め方を示した文献だけを挙げておきたい．

求め方として一番簡単なのは文献 [2] であろう．また同じくらい簡単な求め方が [3] にある．それよりは少し複雑だが，やはり求め方の説明は [4] にもある．

もちろん大多数の量子力学の書は角運動量の一般的な行列の式の求め方の説明があり，その特殊な場合として Pauli 行列が与えられている．

付録 2　(3.2.3) の行列の由来

(3.2.2) または (3.2.3) はきわめて形式的に導出されたので，その由来をみておく．

一般的な 2 行 2 列の行列は

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

と表せる．ここで a, b, c, d は任意の複素数とする．

このときこの 4 つの行列要素の 1 つのみがゼロではない，1 次独立な 4 つの行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

を用いれば，

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

と表すことができる．

ところで，これらの 4 つの行列は Pauli 行列 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ に単位行列 1 を加えた 4 つの行列で

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}[1 - i(i\sigma_3)], \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}[1 + i(i\sigma_3)], \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) = \sigma_+, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) = \sigma_-$$

と表すことができる．ここで σ_+, σ_- は電子のスピンの第 3 成分 σ_3 の固有値を 1 だけ上げたり，下げたりする演算子で昇降演算子といわれている [12].

単位行列 1 に対して Pauli 行列にいつも因子 i をかけることにすれば，

$$1, \quad i\sigma_1, \quad i\sigma_2, \quad i\sigma_3$$

となり，これらで 2 行 2 列の複素行列を表せば，つぎの 2 行 2 列の任意な行列

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^0 + ix^3 & ix^1 + x^2 \\ ix^1 - x^2 & x^0 - ix^3 \end{bmatrix} = x^0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{bmatrix} \tag{3.4.1}$$

が得られるが，右辺の第 2 項の因子 i を除いた部分が (3.2.3) に与えた 2 行 2 列の行列であり，(3.2.3) の第 2 行，第 2 列の要素 x^3 での前の負号はこのようにして現れている．

[12] 電子のスピンは 1/2 で 1 ではないから，正しくは電子のスピン演算子は $\mathbf{s} = \frac{\hbar}{2}\sigma$ である．

付録 3　2 行 2 列のユニタリー行列

ユニタリ行列 Q が (3.2.7) のように表されることは

$$Q = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

とおいて Q がユニタリーである条件 $QQ^\dagger = 1$ と $\det Q = 1$ という条件

$$\det Q = ad - bc = 1$$

を使えば，簡単に導くことができる．

参考文献を上げる必要もないであろうが，あえて一つだけあげれば，[5] がある．この書は現在第 3 版となっているが，むしろ参考文献として挙げた第 2 版の方がこの点に関しては詳しい．

付録 4　i, j, k と $i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3$ の対応

本文でも示したように (3.2.12) に示された対応は確かに (3.2.11) の関係を満たす，1 つの対応である．

しかし，(3.2.12) だけが唯一の対応のさせ方ではなく

$$i \to i\sigma_1, \quad j \to i\sigma_3, \quad k \to i\sigma_2$$

の対応でも

$$i \to i\sigma_2, \quad j \to i\sigma_1, \quad k \to i\sigma_3$$

の対応でも (3.2.11) を満たすことができる．

付録 5 トレースとエルミート

トレースとは行列 A の対角要素の和である．n 行 n 列の行列なら，その対角要素は $a_{11}, a_{22}, \cdots a_{nn}$ と n 個あるが，

$$\mathrm{Tr}A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

と表される．

行列 A の各要素の共役複素数をとり，その行列の各行を各列にした行列をエルミート共役行列 $A^\dagger$ という．

エルミート共役行列 $A^\dagger$ がエルミート共役をとる前の元の行列 A と等しいとき，すなわち

$$A^\dagger = A$$

のとき，その行列 A はエルミートであるという．

付録 6　[1] の結果との一致

[1] の式 (3.5.5),(3.5.6),(3.5.7) は

$$\begin{aligned} x'^1 &= \bar{E}_1 x^1 + \bar{E}_2 x^1 + \bar{E}_3 x^3 \\ x'^2 &= \bar{F}_1 x^1 + \bar{F}_2 x^1 + \bar{F}_3 x^3 \\ x'^3 &= \bar{G}_1 x^1 + \bar{G}_2 x^1 + \bar{G}_3 x^3 \end{aligned}$$

であった．この式で

$$x^1 \leftrightarrow x^3,\quad x'^1 \leftrightarrow x'^3,\quad n_1 \leftrightarrow n_3$$

の置き換えを行うが，このエッセイの (3.3.6), (3.3.7),(3.3.8) と [1] で同じ記号を使っているので，識別のために [1] の式の係数はすべて $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \cdots$ のように変更して表した．

また，まず置換 $x^1 \leftrightarrow x^3$， $x'^1 \leftrightarrow x'^3$ を上の式で行えば，

$$\begin{aligned}
x'^1 &= \bar{G}_1 x^3 + \bar{G}_2 x^2 + \bar{G}_3 x^1 = E_1 x^1 + E_2 x^2 + E_3 x^3 \\
x'^2 &= \bar{F}_1 x^3 + \bar{F}_2 x^2 + \bar{F}_3 x^1 = F_1 x^1 + F_2 x^2 + F_3 x^3 \\
x'^3 &= \bar{E}_1 x^3 + \bar{E}_2 x^2 + \bar{E}_3 x^1 = G_1 x^1 + G_2 x^2 + G_3 x^3
\end{aligned}$$

となる．上の式で最右辺はこのエッセイの (3.3.6),(3.3.7),(3.3.8) を示している．

これらの式の対比から, つぎの関係が得られる．

$$\begin{aligned}
&E_1 = \bar{G}_3, &&E_2 = \bar{G}_2, &&E_3 = \bar{G}_1 \\
&F_1 = \bar{F}_3, &&F_2 = \bar{F}_2, &&F_3 = \bar{F}_1 \\
&G_1 = \bar{E}_3, &&G_2 = \bar{E}_2, &&G_3 = \bar{E}_1
\end{aligned}$$

が成り立つ．さらに前に得られた $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \cdots$ の中で $n_1 \leftrightarrow n_3$ の置換を行えば,

$$\begin{aligned}
E_1 &= \bar{G}_3 = n_1^2(1-\cos\theta) + \cos\theta \\
E_2 &= \bar{G}_2 = n_1 n_2(1-\cos\theta) + n_3\sin\theta \\
E_3 &= \bar{G}_1 = n_1 n_3(1-\cos\theta) - n_2\sin\theta \\
F_1 &= \bar{F}_3 = n_1 n_2(1-\cos\theta) - n_3\sin\theta \\
F_2 &= \bar{F}_2 = n_2^2(1-\cos\theta) + \cos\theta \\
F_3 &= \bar{F}_1 = n_2 n_3(1-\cos\theta) + n_1\sin\theta \\
G_1 &= \bar{E}_3 = n_1 n_3(1-\cos\theta) + n_2\sin\theta \\
G_2 &= \bar{E}_2 = n_2 n_3(1-\cos\theta) - n_1\sin\theta \\
G_3 &= \bar{E}_1 = n_3^2(1-\cos\theta) + \cos\theta
\end{aligned}$$

が得られる．これらは上に記した (3.3.9)〜(3.3.17) と一致する．

(2013. 3. 19)

参考文献

[1] 矢野　忠，四元数と空間回転 3，　数学・物理通信　第 3 巻，第 1 号 (2013.3) 15-24

[2] 朝永振一郎,「角運動量とスピン」（みすず書房，1989）33-43

[3] E. Merzbacher, “ Quantum Mechanics ” (John Wiley and Sons, 1961) 251-275

[4] マージナウ・マーフィ（佐藤次彦，国宗　真訳）（共立出版，1961) 440-450, 621-626

[5] ゴールドスタイン（瀬川，矢野，江沢訳）,「古典力学」（第 2 版）上（吉岡書店，1983）193-196

編集後記

冬の寒さが厳しかったせいか，桜の開花が 10 日から，場所によっては 2 週間ぐらい早まると報道されています．それでもうお花見を済まされたという方もおられるかもしれません．編集人も先日お花見ではありませんが，小さな懇親会を個人的に開きました．

皆様，ご健勝のことと存じます．つい先日 3 巻 1 号を発行したばかりですが，引き続いて 2 号の発行となりました．発行の時期がかなり恣意的でありますが，お許しのほどをお願いします．

つぎの 3 号は 6 月に発行を予定しています．

(矢野　忠)