

数学・物理通信

3卷3号 2013年6月

編集 新関章三・矢野 忠

2013年6月6日

目次

弾丸衝突により弾性棒に発生する波動の数学的解析 (その2)	3
1.1 はじめに	3
1.2 自由端モデルの場合	5
1.3 固定端モデルの場合	7
1.4 その他のモデル	9
1.4.1 錘モデルの場合	9
1.4.2 ばねモデル	11
1.4.3 摩擦モデル	12
1.5 おわりに	14
WKB 近似とトンネル効果	16
2.1 はじめに	16
2.2 漸近解を求める	17
2.2.1 積分表示	17
2.2.2 解とその漸近形	18
2.2.3 まとめと新しい表現	21
2.3 トンネリングの確率を求める	22
2.4 おわりに	24
編集後記	28

Contents

1. Kenji SETO: Mathematical Analysis of the Waves in an Elastic Rod
Produced by Bullet Collision (Part 2)
— Analysis Based on General Solutions —
2. Yasuo MORIMOTO: WKB Approximation and Tunnel Effects
3. Shozo NIIZEKI: Editorial Comments

弾丸衝突により弾性棒に発生する波動の 数学的解析(その2)

— 一般解から出発する方法 —

Mathematical Analysis of the Waves in an Elastic Rod Produced by Bullet Collision (Part 2)

— Analysis Based on General Solutions —

世戸 憲治¹
Kenji SETO²

1.1 はじめに

現著者と中西襄³は「数学・物理通信」2巻3号(2012年7月)において「弾丸衝突により弾性棒に発生する波動の数学的解析」と題する論文を発表し、有限の長さを持つ弾性棒の一端に弾丸が棒の長さ方向に衝突したときに弾性棒に発生する波動を解析した。この問題の解法は、波動方程式の一般解を利用して解く方法と固有値・固有関数を求めその重ね合わせとして解く方法とがあるが、これら2通りの解法で得られた解の形は、見かけ上まったく異なるものであった。固有値・固有関数を使用する方法では、まず固有値が整数では求まらずに超越方程式の根として求められ、固有関数の重ね合わせは通常の Fourier 級数を越えた非 Fourier 三角級数の形になる。前回の論文ではこの非 Fourier 三角級数について、解析学の種々の分野の知識を駆使して和を求めることに成功し、結果としてこの和は指数関数と Laguerre 多項式の積の有限和の形で書けることがわかった。この種の解析はかなり技巧を要するものであるが、これは有限の長さの弾性棒を扱ったために弾性棒の内部で波の反射が何度も繰り返されることに起因する。なお、前回の論文の発表時点では一般解を利用した解法は、波動が弾性棒中を最初の一往復する間のみに限定されていたので Laguerre 多項式が出現するところまでは求められていなかった。今回の論文で一般解を用いた解法でも任意時間における解を求めることが可能であることを示す。

弾丸衝突により弾性棒に発生する波動の解析をするが、ここでは、初めから無次元系で記すことにし、弾性棒の長さ l 、Young 率 E 、密度 ρ をすべて 1 とする。この設定で、弾性棒中を伝播する波動の速度も 1 となる。弾丸の質量の弾性棒のそれに対する比を μ とする。弾性棒の左端を原点とし、この長さ方向に座標 x をとったとき、弾性棒中に起こる変位の時刻 $t(\geq 0)$ 、座標 $(0 \leq x \leq 1)$ での値を $U(x, t)$ とする。このときの波動方程式は通常の形の

$$\partial_t^2 U(x, t) = \partial_x^2 U(x, t) \quad (1.1.1)$$

¹ 北海学園大学名誉教授

² Professor Emeritus, Hokkai-Gakuin University, seto@pony.ocn.ne.jp

³ 京都大学名誉教授 Professor Emeritus, Kyoto University

で記述される．よく知られているように，この方程式には

$$U(x, t) = f(t - x) + g(t + x) \quad (1.1.2)$$

という一般解が存在し， $f(t - x)$ は右進行波， $g(t + x)$ は左進行波である．

弾丸は $x = 0$ の端に速度 v_0 で衝突するものとし，衝突後は弾性棒にそのまま付着し続けるものとする．したがってここでは，この弾丸と弾性棒が一体となった系で考えることにするので， ϵ を弾丸の大きさとして， $0 \leq x \leq \epsilon$ までを弾丸部分，残りの $\epsilon < x \leq 1$ を弾性棒が占める部分と考えることにする．このときの初期条件は，弾丸が衝突する時刻を $t = 0$ として，

$$U(x, 0) = 0, \quad \partial_t U(x, t)|_{t=0} = v_0 \theta(\epsilon - x) \quad (1.1.3)$$

と設定する．この第2式で θ は単位階段関数で，弾丸の方は衝突時に速度 v_0 を有するが，弾性棒の方は完全な静止状態にあることを意味する．ただし，以下ではこの弾丸の大きさ ϵ は無限小量として扱うことにする．

また，境界条件として $x = 0$ の端では弾丸の運動方程式，

$$\mu \partial_t^2 U(0, t) = \partial_x U(x, t)|_{x=0} \quad (1.1.4)$$

が成り立つことが要請される．ただし，この式の右辺は弾丸が弾性棒から受ける反作用である．

もう一方の $x = 1$ の端における境界条件は，その端をどういう状態にしておくかで異なってくる．次節ではこの $x = 1$ の端を自由端とした場合を扱うが，このときはこの境界でいかなる力も作用しないので，歪み無しの状態，

$$\partial_x U(x, t)|_{x=1} = 0 \quad (1.1.5)$$

となる．また，3節ではこの端を固定端とした場合を扱う．このときの条件は， $x = 1$ での変位をゼロとして，

$$U(1, t) = 0 \quad (1.1.6)$$

となる．これら2つのモデル，自由端モデルと固定端モデルについては，波動が弾性棒の中を何度も往復したときの任意時刻における完全な解を求めることが可能である．

以下の図1にこれら2種のモデル，自由端モデルと固定端モデルを図示する．

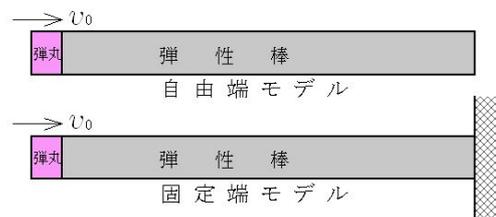


図1 2種のモデル

4節ではその他のモデルとして，錘モデル，ばねモデル，速度に比例する摩擦モデルを扱う．ただし，錘モデルとばねモデルについては，任意時刻における解を求めることは非常に難しく，波動の往復回数が少ないときの解を求めるに留める．また，摩擦モデルについては任意時刻の解を求めることが可能であり，このモデルは前回の論文の数学モデルと本質的に等価になることを示す．

1.2 自由端モデルの場合

この節では、境界条件 (1.1.5) で示される自由端モデルを扱う。図 2 に示すように、弾丸衝突によって、初めに発生する右進行波を $f_0(t-x)$ 、それが $x=1$ の端に達し、反射されて出てくる波を $g_0(t+x-2)$ 、この $g_0(t+x-2)$ が $x=0$ に達したときに発生する右進行波を $f_1(t-x-2)$ 、さらにこれが $x=1$ に達したときに発生する左進行波を $g_1(t+x-4)$ 、以下同様に番号付けをしていくと、一般に、時刻が $t=2n$ のときに $x=0$ で発生する右進行波を $f_n(t-x-2n)$ 、それが時刻 $t=2n+1$ で $x=1$ の端に達し、そこで発生する左進行波を $g_n(t+x-2n-2)$ とする。ここでは、関数 f_n, g_n の定義域を後で統一するため、敢えて n に依存した形の変数を採用することにした。

まず、 $x=1$ での境界条件 (1.1.5) を、時刻 $1 \leq t < 3$ で考えると、そこでは $U(x, t) = f_0(t-x) + g_0(t+x-2)$ の波が存在するので、

$$f'_0(t-1) = g'_0(t-1) \quad (1.2.1)$$

となる。これを一般化して考えると、時刻 $2n+1 \leq t < 2n+3$ で、 $x=1$ に到達する波は、 $U(x, t) = \sum_{j=0}^n [f_j(t-x-2j) + g_j(t+x-2j-2)]$ となるので、条件式 (1.1.5) を課すと、

$$\sum_{j=0}^n [-f'_j(t-2j-1) + g'_j(t-2j-1)] = 0 \quad (1.2.2)$$

となる。これがすべての n に対し成立するので、 n 番号を 1 下げたものを引き算すると、 n について、

$$f'_n(t-2n-1) = g'_n(t-2n-1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2.3)$$

が成立する。ここで、 t は任意なので、 $t-2n-1$ を t とすると

$$f'_n(t) = g'_n(t) \quad (1.2.4)$$

が成り立つ。

つぎに、 $x=0$ での境界条件 (1.1.4) を考える。これを時刻 $2n \leq t < 2n+2$ の範囲で適用すると、そこでは $U(x, t) = \sum_{j=0}^n f_j(t-x-2j) + \sum_{j=0}^{n-1} g_j(t+x-2j-2)$ となっているので、条件式は

$$\mu \frac{d}{dt} \left[\sum_{j=0}^n f'_j(t-2j) + \sum_{j=0}^{n-1} g'_j(t-2j-2) \right] = - \sum_{j=0}^n f'_j(t-2j) + \sum_{j=0}^{n-1} g'_j(t-2j-2) \quad (1.2.5)$$

となる。これがすべての n で成立するので、この式から n 番号を 1 下げたものを引き算すると、

$$\mu \frac{d}{dt} [f'_n(t-2n) + g'_{n-1}(t-2n)] = -f'_n(t-2n) + g'_{n-1}(t-2n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2.6)$$

が成立する。ただし、 $n=0$ のときは、 $g_{-1}(t) = 0$ とする。また、ここで、変数はすべて $t-2n$ で共通なので、これを t とすると

$$\mu \frac{d}{dt} [f'_n(t) + g'_{n-1}(t)] = -f'_n(t) + g'_{n-1}(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2.7)$$

となる。これに先の (1.2.4) で得た関係式を用いて、

$$\mu \frac{d}{dt} [f'_n(t) + f'_{n-1}(t)] = -f'_n(t) + f'_{n-1}(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2.8)$$

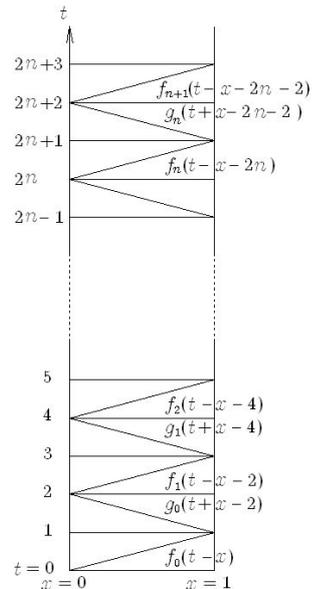


図 2 多重反射の図

となる. $n = 0$ のときは, $f_{-1}(t) = 0$ とするので,

$$\mu \frac{d}{dt} f'_0(t) = -f'_0(t) \quad (1.2.9)$$

となる. この方程式を $f'(0) = v_0$ の条件の基に解くと,

$$f'_0(t) = v_0 e^{-t/\mu} \quad (1.2.10)$$

を得る.

一般の n について (1.2.8) 式を解くことは, 前節で紹介した論文の (2.27) 式を解くことと同じである. ここではその処方箋に従って解いていく. まず, $f'_n(t)$ を,

$$f'_n(t) = P_n(t) e^{-t/\mu} \quad (1.2.11)$$

とおくと,

$$\mu \frac{d}{dt} [P_n(t) + P_{n-1}(t)] = 2P_{n-1}(t) \quad (1.2.12)$$

となる. さらに,

$$P_n(t) = (-1)^n L_n(2t/\mu) \quad (1.2.13)$$

とおくと,

$$\frac{d}{dv} L_n(v) = \frac{d}{dv} L_{n-1}(v) - L_{n-1}(v) \quad (1.2.14)$$

となる. ここで, $v = 2t/\mu$ とおいた. この式は Laguerre 多項式の漸化微分方程式と同じものである. $L_{-1}(v) = 0$ とすると, $L_0(v)$ は定数となる. ここで, $L_0(v) = 1$ とすると, この式から $L_n(v)$ は完全に Laguerre の多項式

$$L_n(v) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{n!}{(r!)^2 (n-r)!} v^r \quad (1.2.15)$$

と一致することが証明される.

方程式 (1.2.8) は線形なので, 積分定数を $v_0 c_n$ としてこの解は,

$$f'_n(t) = v_0 c_n (-1)^n L_n(2t/\mu) e^{-t/\mu} \quad (1.2.16)$$

として与えられる. 特に, $n = 0$ の場合は (1.2.10) 式から $c_0 = 1$ である.

ここで, 図 1 のところで説明したように, $f_n(t - x - 2n)$ は変数の $t - x - 2n$ が正になったときに発生する波であり, また, $g_n(t + x - 2n - 2)$ も同じく $t + x - 2n - 2$ が正になったときに発生する波であることに注意する. この意味で, これらの関数に階段関数 θ を付けて, 変位の解を, 正しくは

$$U(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t - x - 2n) \theta(t - x - 2n) + \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t + x - 2n - 2) \theta(t + x - 2n - 2) \quad (1.2.17)$$

のように表すべきものである. しかも, これらの波は発生した時点ではゼロから発生, すなわち,

$$f_n(0) = 0, \quad g_n(0) = 0 \quad (1.2.18)$$

と考えてよい. また, 関数 f_n, g_n の変数の領域は導出の過程からすると 0 以上, 2 より小に限定されるはずであるが, ここでは 2 以上の領域にそのまま解析接続して扱うものとする.

この (1.2.17) 式を座標 x で微分して, 歪みを求めると

$$\partial_x U(x, t) = - \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(t - x - 2n) \theta(t - x - 2n) + \sum_{n=0}^{\infty} g'_n(t + x - 2n - 2) \theta(t + x - 2n - 2) \quad (1.2.19)$$

となる．あるいは，(1.2.4) の関係 $f'_n(t) = g'_n(t)$ を用いると

$$\partial_x U(x, t) = - \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(t-x-2n)\theta(t-x-2n) + \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(t+x-2n-2)\theta(t+x-2n-2) \quad (1.2.20)$$

と書ける．ここで， $f'_n(t)$ に (1.2.16) の解を代入すると，

$$\begin{aligned} v_0^{-1} \partial_x U(x, t) = & - \sum_{n=0}^{\infty} c_n (-1)^n L_n \left(\frac{2(t-x-2n)}{\mu} \right) e^{-(t-x-2n)/\mu} \theta(t-x-2n) \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (-1)^n L_n \left(\frac{2(t+x-2n-2)}{\mu} \right) e^{-(t+x-2n-2)/\mu} \theta(t+x-2n-2) \end{aligned} \quad (1.2.21)$$

を得る．

積分定数 c_n を決定するには，運動量保存則，

$$\int_0^1 \partial_t U(x, t) dx + \mu \partial_t U(0, t) = \mu v_0 \quad (1.2.22)$$

を用いる．ここで，左辺の 1 項目は時刻 t で弾性棒が持つ運動量，2 項目はこの時点で弾丸が持つ運動量，また，右辺は初めに弾丸が持っていた運動量である．この式の左辺が時間 t に依存しないことは，容易に確かめられる．左辺を t で微分し，波動方程式 (1.1.1) を用いると

$$\begin{aligned} \int_0^1 \partial_t^2 U(x, t) dx + \mu \partial_t^2 U(0, t) &= \int_0^1 \partial_x^2 U(x, t) dx + \mu \partial_t^2 U(0, t) \\ &= \partial_x U(x, t)|_{x=1} - \partial_x U(x, t)|_{x=0} + \mu \partial_t^2 U(0, t) \end{aligned} \quad (1.2.23)$$

となり，境界条件 (1.1.4) (1.1.5) によりこの式の値はゼロとなる．したがって，(1.2.22) の左辺は時間に依存しないので， $t=0$ で見積もると初期条件 (1.1.3) によりその正しさが証明される⁴．

この運動量保存則 (1.2.22) 式は変位 $U(x, t)$ について非斉次の式という利点を生かして，積分定数 c_n を決定することができる．実際，(1.2.21) 式に現れるすべての c_n が 1 となることが証明されるが，これは大変長い計算になる．先に挙げた論文で，数学的帰納法を用いたこの計算を詳しく掲載しているので，それを参照されたい．最終的に，この場合の歪みは，

$$\begin{aligned} v_0^{-1} \partial_x U(x, t) = & - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n \left(\frac{2(t-x-2n)}{\mu} \right) e^{-(t-x-2n)/\mu} \theta(t-x-2n) \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n \left(\frac{2(t+x-2n-2)}{\mu} \right) e^{-(t+x-2n-2)/\mu} \theta(t+x-2n-2) \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

と与えられる．

1.3 固定端モデルの場合

固定端のときの $x=1$ での境界条件は (1.1.6) 式で述べたように $U(1, t) = 0$ となる．時刻 $2n+1 \leq t < 2n+3$ で， $x=1$ に到達する波は， $U(x, t) = \sum_{j=0}^n [f_j(t-x-2j) + g_j(t+x-2j-2)]$ となるので，これに条件式 (1.1.6) を課すと，

$$\sum_{j=0}^n [f_j(t-2j-1) + g_j(t-2j-1)] = 0 \quad (1.3.1)$$

⁴ 弾丸の大きさ ϵ を有限としたとき，(1.2.22) は $\int_{\epsilon}^1 \partial_t U(x, t) dx + \mu \partial_t U(0, t) = \mu v_0$ となることに注意する．

となり，この式が任意の n で成り立つので，

$$f_n(t - 2n - 1) + g_n(t - 2n - 1) = 0 \quad (1.3.2)$$

となる．前と同様に変数 $t - 2n - 1$ を t に変え，時間で微分すると

$$f'_n(t) + g'_n(t) = 0 \quad (1.3.3)$$

を得る． $x = 0$ における境界条件は前節と同じなので，(1.2.7) 式はそのまま成り立つ．この (1.2.7) 式に (1.3.3) の関係を用いて $g'_n(t)$ を消去すると，

$$\mu \frac{d}{dt} [f'_n(t) - f'_{n-1}(t)] = -f'_n(t) - f'_{n-1}(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3.4)$$

となる．この方程式も前節と同じ手法で解くことができる．

$$f'_n(t) = P_n(t) e^{-t/\mu} \quad (1.3.5)$$

とおくと，

$$\mu \frac{d}{dt} [P_n(t) - P_{n-1}(t)] = -2P_{n-1}(t) \quad (1.3.6)$$

となる．さらに，

$$P_n(t) = L_n(2t/\mu) \quad (1.3.7)$$

とおくと，

$$\frac{d}{dv} L_n(v) = \frac{d}{dv} L_{n-1}(v) - L_{n-1}(v), \quad v = 2t/\mu \quad (1.3.8)$$

となって，前節同様 Laguerre 多項式の漸化微分方程式がでてくる．前節と異なる点は，因子 $(-1)^n$ が付かない点だけである．したがって，この場合の歪みは (1.2.21) に替って，

$$\begin{aligned} v_0^{-1} \partial_x U(x, t) = & - \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n \left(\frac{2(t-x-2n)}{\mu} \right) e^{-(t-x-2n)/\mu} \theta(t-x-2n) \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n \left(\frac{2(t+x-2n-2)}{\mu} \right) e^{-(t+x-2n-2)/\mu} \theta(t+x-2n-2) \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

となる．積分定数 c_n を決めるには前節同様に運動量保存則を用いるが，この場合の保存則は

$$\int_0^1 \partial_t U(x, t) dx + \mu \partial_t U(0, t) - \int_0^t \partial_x U(x, t')|_{x=1} dt' = \mu v_0 \quad (1.3.10)$$

となる．この左辺の3項目は，弾性棒が固定端から受ける力積 $\int_0^t \partial_x U(x, t')|_{x=1} dt'$ を考慮したもので，この分を差し引かないと運動量保存則が成り立たない．この式が正しいことは，(1.2.22) 式のとおり同じように左辺を時間 t で微分したときゼロになるので左辺は時間に依存しないことと， $t = 0$ としたとき両辺が等しくなることによる．

この式を用いて (1.3.9) 式の積分定数 c_n がすべて 1 となることが示されるが，この証明も先に挙げた論文に譲る．結果として，

$$\begin{aligned} v_0^{-1} \partial_x U(x, t) = & - \sum_{n=0}^{\infty} L_n \left(\frac{2(t-x-2n)}{\mu} \right) e^{-(t-x-2n)/\mu} \theta(t-x-2n) \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} L_n \left(\frac{2(t+x-2n-2)}{\mu} \right) e^{-(t+x-2n-2)/\mu} \theta(t+x-2n-2) \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

を得る．

1.4 その他のモデル

この節では、その他のモデルとして3種のモデルについて議論する。これらはすべて弾性棒の弾丸が衝突する方とは反対側の $x = 1$ における境界条件を変えたもので、次ページの図3に示すように上から、錘を付けたモデル、ばねを付けたモデル、速度に比例する摩擦抵抗を付けたモデルである。これらのモデルは、錘の質量、ばね定数、摩擦抵抗係数をゼロとしたときは、それぞれが自由端モデルに、また、それらを無限大としたときは、それぞれが固定端モデルとなるはずで、いわば自由端モデルと固定端モデルの内挿モデルとなるはずのものである。

なお、これらのモデルでは、 $x = 0$ における境界条件はすべて、(1.1.4) 式のまま変わらないが、 $x = 1$ での境界条件が、それぞれ、異なることになる。



図3 3種のモデル

1.4.1 錘モデルの場合

ここでは、 $x = 1$ の端に質量 $\hat{\mu}$ の錘を付けた場合を考える。このときの境界条件はこの錘の運動方程式

$$\hat{\mu} \partial_t^2 U(1, t) = -\partial_x U(x, t)|_{x=1} \quad (1.4.1)$$

となる。この式の右辺はこの錘が弾性棒から受ける反作用である。

初めにこの $x = 1$ での境界条件を考える。時刻 $2n + 1 \leq t < 2n + 3$ で、 $x = 1$ に到達する波は、 $U(x, t) = \sum_{j=0}^n [f_j(t - x - 2j) + g_j(t + x - 2j - 2)]$ となるので、これを (1.4.1) 式に当てはめると、

$$\hat{\mu} \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^n [f'_j(t - 2j - 1) + g'_j(t - 2j - 1)] = \sum_{j=0}^n [f'_j(t - 2j - 1) - g'_j(t - 2j - 1)] \quad (1.4.2)$$

となる。これがすべての n に対し成立するので、 n 番号を1下げたものを引き算すると、

$$\hat{\mu} \frac{d}{dt} [f'_n(t - 2n - 1) + g'_n(t - 2n - 1)] = f'_n(t - 2n - 1) - g'_n(t - 2n - 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4.3)$$

が成立するが、この式の変数はすべて $t - 2n - 1$ で同じなのでこれを t として、

$$\hat{\mu} \frac{d}{dt} [f'_n(t) + g'_n(t)] = f'_n(t) - g'_n(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4.4)$$

が成立する。

$x = 0$ での境界条件は、自由端のときと同じなので、(1.2.7) 式がそのまま、

$$\mu \frac{d}{dt} [f'_n(t) + g'_{n-1}(t)] = -f'_n(t) + g'_{n-1}(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4.5)$$

と成立し、結局、 $f'_n(t)$, $g'_n(t)$ を未知関数とする (1.4.4) (1.4.5) 式で与えられる連立型の漸化微分方程式となる。これらを、

$$\begin{aligned} \left(\mu \frac{d}{dt} + 1\right) f'_n(t) &= -\left(\mu \frac{d}{dt} - 1\right) g'_{n-1}(t), \\ \left(\hat{\mu} \frac{d}{dt} - 1\right) f'_n(t) &= -\left(\hat{\mu} \frac{d}{dt} + 1\right) g'_n(t) \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

とまとめ直しておく。

この方程式を解く前に、この場合の運動量保存則を書いておく。

$$\int_0^1 \partial_t U(x, t) dx + \mu \partial_t U(0, t) + \hat{\mu} \partial_t U(1, t) = \mu v_0 \quad (1.4.7)$$

ここで、左辺の1項目が弾性棒、2項目は弾丸、3項目は $x = 1$ に付けた錘の、それぞれ、時刻 t における運動量で、それらの和が初めに弾丸が持っていた運動量になる。

(1.4.6) 式を一般の n について解こうとすると難解な問題になってしまうので、ここでは、 n 番号の小さい方から逐次的に解いていくことにする。 $n = 0$ とし、 $g'_{-1}(t) = 0$ とすると、

$$\left(\mu \frac{d}{dt} + 1\right) f'_0(t) = 0, \quad \left(\hat{\mu} \frac{d}{dt} - 1\right) f'_0(t) = -\left(\hat{\mu} \frac{d}{dt} + 1\right) g'_0(t) \quad (1.4.8)$$

この第1式を $f'_0(0) = v_0$ の条件のもとに解くと、(1.2.10) 式と同じ、 $f'_0(t) = v_0 e^{-t/\mu}$ となり、これを第2式に代入して $g'_0(t)$ を求めると、

$$g'_0(t) = -v_0 \frac{\hat{\mu} + \mu}{\hat{\mu} - \mu} e^{-t/\mu} + v_0 d_0 e^{-t/\hat{\mu}} \quad (1.4.9)$$

となる。ただし、 $\hat{\mu}$ と μ が等しい場合は別の処理が必要になるので、ここでは μ と $\hat{\mu}$ は異なるものとした。ここでの積分定数 d_0 を決めるには、 $1 \leq t < 2$ の範囲で $U(x, t) = f_0(t-x) + g_0(t+x-2)\theta(t+x-2)$ 、 $\partial_t U(x, t) = f'_0(t-x) + g'_0(t+x-2)\theta(t+x-2)$ として、運動量保存則 (1.4.7) 式に代入すると、

$$d_0 = 2\mu/(\hat{\mu} - \mu) \quad (1.4.10)$$

と決まり、結果として、

$$g'_0(t) = -v_0 \frac{\hat{\mu} + \mu}{\hat{\mu} - \mu} \left(e^{-t/\mu} - \frac{2\mu}{\hat{\mu} + \mu} e^{-t/\hat{\mu}} \right) \quad (1.4.11)$$

となる。 f'_0 , g'_0 が求まったので、つぎは、(1.4.6) 式で $n = 1$ として、 $f'_1(t)$, $g'_1(t)$ を求めてみよう。(1.4.6) の第1式で $n = 1$ とし、(1.4.11) の $g'_0(t)$ を代入すると、

$$\left(\mu \frac{d}{dt} + 1\right) f'_1(t) = 2v_0 \frac{\hat{\mu} + \mu}{\hat{\mu} - \mu} \left(-e^{-t/\mu} + \frac{\mu}{\hat{\mu}} e^{-t/\hat{\mu}} \right) \quad (1.4.12)$$

これを解いて、

$$f'_1(t) = v_0 \frac{\hat{\mu} + \mu}{\hat{\mu} - \mu} \left[\left(c_1 - \frac{2t}{\mu} \right) e^{-t/\mu} + \frac{2\mu}{\hat{\mu} - \mu} e^{-t/\hat{\mu}} \right] \quad (1.4.13)$$

と求まるが、ここで積分定数 c_1 を決めるには $2 \leq t < 3$ のときの運動量保存の式に代入する。このときの弾性棒の各点における速度は $\partial_t U(x, t) = f'_0(t-x) + g'_0(t+x-2) + f'_1(t-x-2)\theta(t-x-2)$ となっているので、これを (1.4.7) 式に代入すると

$$c_1 = 1 - 4\hat{\mu}\mu/(\hat{\mu}^2 - \mu^2) \quad (1.4.14)$$

と決まり、 $f'_1(t)$ は

$$f'_1(t) = v_0 \frac{\hat{\mu} + \mu}{\hat{\mu} - \mu} \left[\left(1 - \frac{4\hat{\mu}\mu}{\hat{\mu}^2 - \mu^2} - \frac{2t}{\mu} \right) e^{-t/\mu} + \frac{2\mu}{\hat{\mu} - \mu} e^{-t/\hat{\mu}} \right] \quad (1.4.15)$$

と求められる。つぎに $g'_1(t)$ を求めよう。(1.4.6) の第2式で $n = 1$ とおき、(1.4.15) の $f'_1(t)$ を代入すると、

$$\left(\hat{\mu} \frac{d}{dt} + 1\right) g'_1(t) = v_0 \frac{\hat{\mu} + \mu}{\hat{\mu} - \mu} \left[\frac{2\hat{\mu}}{\mu} e^{-t/\mu} + \frac{\hat{\mu} + \mu}{\mu} \left(c_1 - \frac{2t}{\mu} \right) e^{-t/\mu} + \frac{4\mu}{\hat{\mu} - \mu} e^{-t/\hat{\mu}} \right] \quad (1.4.16)$$

となる．ここでは，式が長くなることを避けるため，すでに求められた c_1 もそのままにしてある．これを解くと

$$g'_1(t) = -v_0 \left(\frac{\hat{\mu} + \mu}{\hat{\mu} - \mu} \right)^2 \left[\left(1 - \frac{8\hat{\mu}\mu}{\hat{\mu}^2 - \mu^2} - \frac{2t}{\mu} \right) e^{-t/\mu} + \frac{2\mu}{\hat{\mu} + \mu} \left(d_1 - \frac{2t}{\hat{\mu}} \right) e^{-t/\hat{\mu}} \right] \quad (1.4.17)$$

を得る．ここで，積分定数の d_1 を決めるには， $3 \leq t < 4$ の場合の運動量保存則を用いる．その範囲では，弾性棒の各点の速度は $\partial_t U(x, t) = f'_0(t-x) + g'_0(t+x-2) + f'_1(t-x-2) + g'_1(t+x-4)\theta(t+x-4)$ となっている．これらをすべて (1.4.7) 式に代入すると

$$d_1 = 1 + (\hat{\mu}^2 + 6\hat{\mu}\mu + \mu^2)/(\hat{\mu}^2 - \mu^2) \quad (1.4.18)$$

と決まり， $g'_1(t)$ は

$$g'_1(t) = -v_0 \left(\frac{\hat{\mu} + \mu}{\hat{\mu} - \mu} \right)^2 \left[\left(1 - \frac{8\hat{\mu}\mu}{\hat{\mu}^2 - \mu^2} - \frac{2t}{\mu} \right) e^{-t/\mu} + \frac{2\mu}{\hat{\mu} + \mu} \left(1 + \frac{\hat{\mu}^2 + 6\hat{\mu}\mu + \mu^2}{\hat{\mu}^2 - \mu^2} - \frac{2t}{\hat{\mu}} \right) e^{-t/\hat{\mu}} \right] \quad (1.4.19)$$

と求められる．

この段階でも n に対する一般形は見えてこないで，この一つ先の $f'_2(t)$ まで求めてみよう．(1.4.6) の第 1 式で $n = 2$ とおき (1.4.19) 式を代入すると，

$$\left(\mu \frac{d}{dt} + 1 \right) f'_2(t) = -2v_0 \left(\frac{\hat{\mu} + \mu}{\hat{\mu} - \mu} \right)^2 \left[2 \left(c_1 - \frac{t}{\mu} \right) e^{-t/\mu} + \frac{2\mu^2}{\hat{\mu}(\hat{\mu} + \mu)} e^{-t/\hat{\mu}} + \frac{\mu}{\hat{\mu}} \left(d_1 - \frac{2t}{\hat{\mu}} \right) e^{-t/\hat{\mu}} \right] \quad (1.4.20)$$

これを解いて，

$$f'_2(t) = v_0 \left(\frac{\hat{\mu} + \mu}{\hat{\mu} - \mu} \right)^2 \left[\left(c_2 - 2c_1 \left(\frac{2t}{\mu} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{2t}{\mu} \right)^2 \right) e^{-t/\mu} - \frac{2\mu}{\hat{\mu} - \mu} \left(1 + \frac{\hat{\mu}^2 + 10\hat{\mu}\mu + \mu^2}{\hat{\mu}^2 - \mu^2} - \frac{2t}{\hat{\mu}} \right) e^{-t/\hat{\mu}} \right] \quad (1.4.21)$$

となる．ここでまた積分定数の c_2 を決めなくてはならない．時間が $4 \leq t < 5$ の範囲では， $\partial_t U(x, t) = f'_0(t-x) + g'_0(t+x-2) + f'_1(t-x-2) + g'_1(t+x-4) + f'_2(t-x-4)\theta(t-x-4)$ となっているので，これを運動量保存の式に代入する．もっとも，いままでもそうであったが，この式は時間に依存することなく成り立つ式なので，時間に依存する部分はすべて相殺される．したがって，時間に依存しない定数項を拾うだけでよい．そのときは，上に書いた式の $f'_0(t-x) + g'_0(t+x-2) + f'_1(t-x-2) + g'_1(t+x-4)$ は，運動量保存の式に代入したときすべて時間に依存する項， $f'_2(t-x-4)\theta(t-x-4)$ だけが定数項を含む項になるので，実際には，この項だけを代入するだけで十分である．積分定数 c_2 を求めた結果は，

$$c_2 = \frac{\hat{\mu}^4 + 30\hat{\mu}^2\mu^2 + 16\hat{\mu}\mu^3 + \mu^4}{(\hat{\mu}^2 - \mu^2)^2} \quad (1.4.22)$$

というまったく予想外の式になる．予想外というのは， μ ， $\hat{\mu}$ の対称性がない式になり，これから一般の n に対する $f'_n(t)$ ， $g'_n(t)$ を予測することは困難である．このモデルでのこれ以上の議論はしないことにしよう．

1.4.2 ばねモデル

つぎは弾性棒の右端 $x = 1$ に弾性棒の長さ方向にばねを付けたモデルを考える．この場合の $x = 1$ での境界条件はばね定数を ν とし，ばねの力 $-\nu U(1, t)$ と弾性棒の歪みによる力 $\partial_x U(x, t)|_{x=1}$ が釣り合う条件，

$$\partial_x U(x, t)|_{x=1} = -\nu U(1, t) \quad (1.4.23)$$

となる．この条件を時間が $2n+1 \leq t < 2n+3$ の間隔で考えると，このときの変位は $U(x, t) = \sum_{j=0}^n [f_j(t-x-2j) + g_j(t+x-2j-2)]$ となるので，これに $x = 1$ での境界条件を課すと，

$$\sum_{j=0}^n [-f'_j(t-2j-1) + g'_j(t-2j-1)] + \nu \sum_{j=0}^n [f_j(t-2j-1) + g_j(t-2j-1)] = 0 \quad (1.4.24)$$

となる。これがすべての n で成立するので、 n 番号を 1 下げたものを引き算し、変数がすべて $t - 2j - 1$ なので、これを t とすると

$$-f'_n(t) + g'_n(t) + \nu[f_n(t) + g_n(t)] = 0 \quad (1.4.25)$$

あるいは、これを整理し直し、 $x = 0$ での境界条件 (1.2.7) とまとめて、

$$\begin{aligned} \left(\mu \frac{d}{dt} + 1\right) f'_n(t) &= -\left(\mu \frac{d}{dt} - 1\right) g'_{n-1}(t), \\ \left(\frac{1}{\nu} \frac{d}{dt} - 1\right) f_n(t) &= \left(\frac{1}{\nu} \frac{d}{dt} + 1\right) g_n(t) \end{aligned} \quad (1.4.26)$$

となる。また、このときの運動量保存の式は、弾性棒がばねから受ける力積を考慮して、

$$\int_0^1 \partial_t U(x, t) dx + \mu \partial_t U(0, t) + \nu \int_0^t U(1, t') dt' = \mu \nu_0 \quad (1.4.27)$$

となる。この式の左辺が時間に依存しないことは、時間で微分したとき、 $x = 0, 1$ での境界条件 (1.1.4), (1.4.23) により、ゼロになることから明らかである。またこの式で、 $t = 0$ としたときは初期条件 (1.1.3) により、両辺が等しくなる。

方程式 (1.4.26) を運動量保存則 (1.4.27) および、 $f_n(0) = 0$, $g_n(0) = 0$ の条件のもとに解くことになるが、これは鍾モデルのときと同じように n 番号が小さい方から逐次的に解くしか方法はないであろう。しかもこの場合も一般の n についての予測は困難であり、ここではこの解法についてこれ以上は述べないことにする。

1.4.3 摩擦モデル

図 3 に示すように、ここで扱う摩擦モデルは、弾性棒の右端に質量の無視できる棒が付いていて、その棒が固定された粗い面をこすることによって、速度に比例する摩擦力が働くものとする。こときの比例係数を λ としたとき、 $x = 1$ での境界条件は、摩擦力 $-\lambda \partial_t U(1, t)$ と弾性棒の歪みによる力 $\partial_x U(x, t)|_{x=1}$ が釣り合うことで、

$$\partial_x U(x, t)|_{x=1} = -\lambda \partial_t U(1, t) \quad (1.4.28)$$

となる。この境界条件を解析するため、時間を $2n + 1 \leq t < 2n + 3$ の範囲で考えてみる。このとき変位は、前と同じく、 $U(x, t) = \sum_{j=0}^n [f_j(t - x - 2j) + g_j(t + x - 2j - 2)]$ となり、これを (1.4.28) 式に代入すると

$$\sum_{j=0}^n [-f'_j(t - 2j - 1) + g'_j(t - 2j - 1)] + \lambda \sum_{j=0}^n [f'_j(t - 2j - 1) + g'_j(t - 2j - 1)] = 0 \quad (1.4.29)$$

となり、これがすべての n で成り立つので n 番号を 1 下げたものを辺々引き算すると

$$-f'_n(t - 2n - 1) + g'_n(t - 2n - 1) + \lambda [f'_n(t - 2n - 1) + g'_n(t - 2n - 1)] = 0, \quad (1.4.30)$$

さらに、変数がすべて $t - 2n - 1$ で共通なので、これを t と書くことにすると、

$$g'_n(t) = -\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} f'_n(t) \quad (1.4.31)$$

を得る。

$x = 0$ の境界条件は 2 節におけるものと同じなので、(1.2.7) 式がそのまま成り立ち、

$$\left(\mu \frac{d}{dt} + 1\right) f'_n(t) = -\left(\mu \frac{d}{dt} - 1\right) g'_{n-1}(t) \quad (1.4.32)$$

となり、これに、(1.4.31) 式を代入すると

$$\left(\mu \frac{d}{dt} + 1\right) f'_n(t) = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \left(\mu \frac{d}{dt} - 1\right) f'_{n-1}(t) \quad (1.4.33)$$

となる. このあとは, (1.2.8) 式以下に類似した処方が使える. この式で $n=0$ とし, $f'_{-1}(t)=0$, および, 初期条件 $f'_0(0)=v_0$ を用いると

$$f'_0(t) = v_0 e^{-t/\mu} \quad (1.4.34)$$

と決まる. 一般の n に対しては, まず,

$$f'_n(t) = P_n(t) e^{-t/\mu} \quad (1.4.35)$$

とおくと,

$$\mu P'_n(t) = \frac{\lambda-1}{\lambda+1} [\mu P'_{n-1}(t) - 2P_{n-1}(t)] \quad (1.4.36)$$

となる. さらに,

$$P_n(t) = \left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1} \right)^n L_n(2t/\mu) \quad (1.4.37)$$

とおくと,

$$\frac{d}{dv} L_n(v) = \frac{d}{dv} L_{n-1}(v) - L_{n-1}(v), \quad v = 2t/\mu \quad (1.4.38)$$

となって, (1.2.14) 式と同じになり, $L_n(v)$ は Laguerre の多項式となる. したがって, この場合の解は 2 節における因子 $(-1)^n$ が因子 $\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1} \right)^n$ に替るだけでそのまま成り立つ. したがって, $f'_n(t)$ は積分定数 $v_0 c_n$ を付けて,

$$f'_n(t) = v_0 c_n \left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1} \right)^n L_n(2t/\mu) e^{-t/\mu} \quad (1.4.39)$$

と求められる. 一般の t に対する歪み $\partial_x U(x, t)$ は (1.2.19) 式, つまり,

$$\partial_x U(x, t) = - \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(t-x-2n) \theta(t-x-2n) + \sum_{n=0}^{\infty} g'_n(t+x-2n-2) \theta(t+x-2n-2) \quad (1.4.40)$$

となっているので, これに (1.4.31) および (1.4.39) 式を代入すると, 歪みの式は (1.2.21) 式に替って

$$\begin{aligned} v_0^{-1} \partial_x U(x, t) = & - \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1} \right)^n L_n \left(\frac{2(t-x-2n)}{\mu} \right) e^{-(t-x-2n)/\mu} \theta(t-x-2n) \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1} \right)^{n+1} L_n \left(\frac{2(t+x-2n-2)}{\mu} \right) e^{-(t+x-2n-2)/\mu} \theta(t+x-2n-2) \end{aligned} \quad (1.4.41)$$

となる. 積分定数 c_n の決定には運動量保存則を使うがこの場合は, $x=1$ の端で摩擦力 $-\lambda \partial_t U(1, t)$ を受けるのでこれを時間で積分した力積 $-\lambda U(1, t)$ の分を差し引いて, 保存則は

$$\int_0^1 \partial_t U(x, t) dx + \mu \partial_t U(0, t) + \lambda U(1, t) = \mu v_0 \quad (1.4.42)$$

となる. この式の左辺が時間に依存しないことは, これを時間で微分し, 波動方程式 (1.1.1), 境界条件 (1.1.4) (1.4.28) を用いるとゼロとなることからわかる.

この運動量保存則を用いるとすべての積分定数 c_n が 1 となることが証明されるが大変長い計算になるので, ここでは 1 節で挙げた論文に依拠した形で説明するに留めよう. 前論文の第 5 節「数学モデル」において, $2n+1 < y < 2n+3$ の範囲で定義された (5.22) 式の関数

$$S_\alpha(y) = \sum_{k=0}^n c_k e^{-2\alpha(n-k)i} (-1)^{n-k} L_{n-k}(2(y-2(n-k)-1)/\mu) e^{-(y-2(n-k)-1)/\mu} \quad (1.4.43)$$

が, 条件式 (5.23)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \int_0^1 dx [S_\alpha(t-x+1) + e^{-2\alpha i} S_\alpha(t+x-1)] + S_\alpha(t+1) + e^{-2\alpha i} S_\alpha(t-1) \\ + \frac{1}{\mu} (1 - e^{-2\alpha i}) \int_0^t dy S_\alpha(y) = 1 \end{aligned} \quad (1.4.44)$$

を満たすためには、 $c_0 = 1$ から出発する数学的帰納法で、すべての c_n が 1 でなければならないということが証明されている。この事実をそのまま使うことにして、ここで扱っている摩擦モデルが比例係数 λ を複素数に拡張すると前論文の数学モデルになることを示す。すなわち、比例定数 λ を、

$$\lambda = i \tan \alpha \quad (1.4.45)$$

とおく。この置き換えで (1.4.41) 式に出てくる因子 $(\lambda - 1)/(\lambda + 1)$ は

$$\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} = -e^{-2i\alpha} \quad (1.4.46)$$

となる。つぎに、(1.4.43) 式の c_k を c_{n-k} と置き換えてから、 θ 関数を用いてこの式をすべての y で使えるように書きなおすと、

$$S_\alpha(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-2i\alpha n} (-1)^n L_n(2(y - 2n - 1)/\mu) e^{-(y-2n-1)/\mu} \theta(y - 2n - 1) \quad (1.4.47)$$

となる。この $S_\alpha(y)$ と (1.4.46) 式を使うと (1.4.41) 式は

$$v_0^{-1} \partial_x U(x, t) = -S_\alpha(t - x + 1) + e^{-2i\alpha} S_\alpha(t + x - 1) \quad (1.4.48)$$

となり、また、変位 $U(x, t)$ の時間微分はこの右辺の 1 項目の符号が変わって

$$v_0^{-1} \partial_t U(x, t) = S_\alpha(t - x + 1) + e^{-2i\alpha} S_\alpha(t + x - 1) \quad (1.4.49)$$

となる。つぎに、運動量保存則 (1.4.42) の左辺 3 項目を境界条件 (1.4.28) を用いて

$$\int_0^1 \partial_t U(x, t) dx + \mu \partial_t U(0, t) - \int_0^t \partial_x U(x, t')|_{x=1} dt' = \mu v_0 \quad (1.4.50)$$

と書き換えておく。これに、(1.4.48) (1.4.49) 式を代入するとちょうど (1.4.44) の条件式になる。

かくしてすべての積分定数 c_n が 1 となることが示され、最終的に、(1.4.41) 式の歪みは

$$\begin{aligned} v_0^{-1} \partial_x U(x, t) = & - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right)^n L_n \left(\frac{2(t - x - 2n)}{\mu} \right) e^{-(t-x-2n)/\mu} \theta(t - x - 2n) \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right)^{n+1} L_n \left(\frac{2(t + x - 2n - 2)}{\mu} \right) e^{-(t+x-2n-2)/\mu} \theta(t + x - 2n - 2) \end{aligned} \quad (1.4.51)$$

と求められる。この式で、 $\lambda = 0$ のときは 2 節での自由端モデルに、また、 $\lambda \rightarrow \infty$ のときは 3 節の固定端モデルになる。すなわち、ここで扱った摩擦モデルはこれら 2 つのモデルの内挿モデルになっていることがわかる。また、 $\lambda = 1$ のときは、右辺 1 項目の $n = 0$ 以外の項はすべて消えてしまうが、これは、(1.4.28) 式からわかるように、 $x = 1$ の端が右進行波だけになり、反射波が発生しなくなるためである。

1.5 おわりに

ここでは、弾性棒に弾丸が衝突するとき弾性棒中に発生する波動を 5 種類のモデルで解析した。すなわち、弾丸が衝突する方とは反対側の端に、何も付けない自由端モデル、固定した場合の固定端モデル、錘を付けた錘モデル、ばねを付けたばねモデル、速度に比例する摩擦抵抗を付けた摩擦モデルである。このうち完全に解くことができたのは、自由端モデル、固定端モデル、摩擦モデルの 3 つである。錘モデル、ばねモデルについては任意時刻での解を求めることができず、途中であきらめざるを得なかった。

前回の論文を書いた時点では、数学モデルについて物理的解釈はまったく予測されなかったが、今回の解析で摩擦モデルの抵抗係数を複素数に拡張したものであるという解釈がされたことは一つの収穫であった。しか

し、この摩擦モデルはエネルギー非保存系であるため、通常の固有値、固有関数を用いた方法では解くことができないということを付記しておく。

謝辞

この稿を書くにあたって、京都大学名誉教授の中西襄先生にご精読をいただき、たくさんのご指摘をいただきました。ここに謹んで感謝いたします。

WKB 近似とトンネル効果

WKB Approximation and Tunnel Effects

森本安夫⁵
Yasuo MORIMOTO⁶

2.1 はじめに

Gamow は原子核の α 崩壊の理論で原子核の周りのクーロンポテンシャルの障壁を α 粒子が通り抜ける確率を求めた。これは大抵の量子力学の教科書に掲載されている有名な公式で、WKB 近似の絶好の応用例として取り上げられている。ただここで使われている、WKB 近似が難物なのである。回帰点がない場合は Schrödinger 方程式はそれほど難しくないが⁷、いざそれが存在すると、問題は突然複雑になる。それは $\frac{1}{m+2}$ 次の Bessel 関数（簡単な場合は $m = 1$ ）の漸近形の理論が必要になるからである。

散乱理論とか金属中の磁性不純物の理論をやっている人にとってはお手のものであろうが、量子力学の初心者にとっては難解を極める。Bessel 関数の表示の理論から始めなければならないからだ。その道の遠さにウンザリするとともに、学習の意欲が減退すること間違いない。その証拠に手元の量子力学の教科書を開いてみてもざっと流して説明しているのが通例である。

ところが Bessel 関数の理論をやらないでも WKB 近似を理解できる方法が紹介されている。次の演習書

詳解理論・応用量子力学演習（共立出版，1985） [1]

である。

pp.59-67 に WKB 近似についての解説といくつかの演習問題が載っている。解の接続についての基本的な説明は pp.61-64 の 4 ページに記載されている。

ただ難点がある。非常に読みづらい。おそらくは Bessel 関数等の漸近形に触れないで解説しようとしたため、種々の工夫がなされ、それが記述を複雑にしたものと思われる。

このノートにおいて、それを整理し、WKB 近似の真髄である解の接続公式を理解しやすい形で示し、WKB 近似の一つの例題である、トンネリングの確率を導いてみたい。

1次元の Schrödinger 方程式

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]u(x) = 0 \quad (2.1.1)$$

の古典的極限 ($\hbar \rightarrow 0$) を考えよう。 $x \rightarrow \pm\infty$ で解は簡単に求められ何の問題もない。問題は $E = V(x_0)$ となる x_0 、すなわち古典的回帰点がある場合である。この場合には古典的極限での解は破綻する。ではどうするのか。 x_0 の近傍で $V(x)$ を直線（一般的には曲線）で近似して、(2.1.1) を直接解いて、これをつないでやるとというのが WKB 法である。

⁵明治鍼灸大学名誉教授

⁶yacchan999@gmail.com

⁷これは原理的にという意味である。Schrödinger 方程式が与えられたときに簡単に解ける場合は束縛状態に対しても散乱状態に対してもそんなに多くはない。これは量子力学を少し学んだ者なら誰でも知っている。

議論は古典的回帰点 $x = x_0$ で $x_0 = 0$ ととっても一般性を失うことはない。そのときに $E = V(0)$ である。 $x = 0$ の近くで $V(x)$ の Taylor 展開を行なうと、

$$V(x) = V(0) + V'(0)x = E + V'(0)x$$

となるので、

$$E - V(x) = -V'(0)x$$

となる。 $\alpha = \frac{2m}{\hbar^2}V'(0)$ とおけば、(2.1.1) は

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \alpha x u \quad (2.1.2)$$

となる。ここで、 $u(x)$ の変数 x は省いた。さらに独立変数を x から変数 $z = \alpha^{1/3}x$ に変えると

$$\frac{d^2u}{dz^2} = zu \quad (2.1.3)$$

ここで、波動関数 u の変数は x から z に変換されている⁸。

ここで重要なことは α は $1/\hbar$ を含むので x が少しでも 0 から離れると $z \rightarrow \pm\infty$ となる。すなわち解の漸近形が得られることになる。

(2.1.3) が解くべき方程式である。この解は $1/3$ 次の Bessel 関数になり、その漸近形がわかれば、それで終ることである。しかし前に述べた事情により、その誘惑をグッと抑えて [1] に沿って解説していく。

2.2 漸近解を求める

2.2.1 積分表示

(2.1.3) の解となる次のような積分表示された関数を考える⁹。

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \exp\left(zt - \frac{t^3}{3}\right) dt \quad (2.2.1)$$

ここで、 C は適当な積分路である。

何故考えるかと言うと、適当な積分路 C をとれば (2.1.3) を満たすことができるからだ。すなわち、 C の両端を t_1, t_2 とすると、

$$\frac{d^2u}{dz^2} - zu = \frac{1}{2\pi i} \int_{t_1}^{t_2} (t^2 - z) \exp\left(zt - \frac{t^3}{3}\right) dt = -\frac{1}{2\pi i} \left[\exp\left(zt - \frac{t^3}{3}\right) \right]_{t_1}^{t_2}$$

したがって、 $t \rightarrow t_1, t_2$ で $\exp(zt - \frac{t^3}{3}) \rightarrow 0$ ならば、 $\frac{d^2u}{dz^2} - zu = 0$ が成立する。この条件は $|t| \rightarrow \infty$ で t^3 の実部が正になれば満たされる。そこで、 t の偏角を θ とすればこの条件は $\cos 3\theta > 0$ 、すなわち、 θ が $-\pi/6 \sim \pi/6$ 、 $(1/2)\pi \sim (5/6)\pi$ 、 $(7/6)\pi \sim (3/2)\pi$ となる範囲で、図示すると図 1 の線を引いた部分となる。

$|t| \rightarrow \infty$ の端が図の斜線の部分にあれば要件は満たされるので、 C_1, C_2, C_3 のような積分路を考える。各領域の無限遠点でこれらを接続すれば¹⁰、閉積分路 $C = C_1 + C_2 + C_3$ が得られる。この中では被積分関数は正則なので Cauchy の定理により (2.2.1) の積分は 0 になる。すなわち、

$$\frac{1}{2\pi i} \left[\int_{C_1} f(t) dt + \int_{C_2} f(t) dt + \int_{C_3} f(t) dt \right] = 0$$

である。ここで $f(t) = \exp(zt - \frac{t^3}{3})$ である。

積分路が 3 個あり、上の条件が 1 個あるので、2 個の独立な積分表示関数が得られる。この 2 個を (2.1.3) の独立な解としようというわけである。

⁸ x から z への変数変換が少し技巧的だが、付録 1 にその説明を述べる。

⁹この解をどうやって導くかを付録 2 に述べる。この積分を Airy 積分という。Airy が虹の理論でこの関数の性質を調べたためにこの名がついている。

¹⁰図 1 では十分そのことを表現できてはいない。

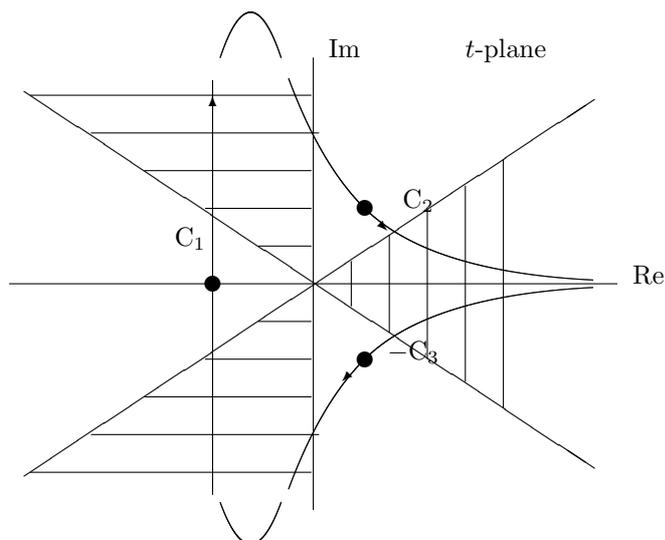


図 2.1: (2.2.1) が (2.1.3) を満たす領域とその積分路

2.2.2 解とその漸近形

次のように u_1, u_2 を定義する. この関数は (2.1.3) を満足している.

$$u_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1}, \quad u_2 = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{C_2} - \int_{C_3} \right) \quad (2.2.2)$$

(2.2.2) の u_1, u_2 で $\exp\left(z t - \frac{t^3}{3}\right) dt$ を省略している. 以下同様の記述をする.

これからこの関数形を鞍点法で評価しよう. 鞍点法は良く知られた手法であるが, ここでは基本的に重要な技術であるのでざっと見ておこう. 次のような関数を考える.

$$I(z) = \int_D e^{zf(t)} dt \quad (2.2.3)$$

もちろん $zf(t) = z t - \frac{t^3}{3}$ である. D は適当な積分路である. z は $\pm\infty$ になる状況を考える. まず $f(t)$ を $t = t_0$ のまわりで Taylor 展開する.

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2} f''(t_0)(t - t_0)^2 + \dots$$

この Taylor 展開では $f'(t_0) = 0$ のとき $t = t_0$ で極大となるとき, $f''(t_0) < 0$ である. したがって, $f''(t_0) = -|f''(t_0)|$ と表せば, 上の展開は

$$f(t) = f(t_0) - \frac{1}{2} |f''(t_0)| (t - t_0)^2 + \dots$$

となる.

鞍点法では $f'(t_0) = 0$ となる t_0 (停留点) を求め, そこを通る積分路を用いる. $z \rightarrow \pm\infty$ では $e^{zf(t)}$ は t が t_0 を離れると急激に小さくなるので, 計算の精度が上がるからである. Taylor 展開を用いれば, (2.2.3) は以下のようなになる.

$$I(z) \approx e^{zf(t_0)} \int \exp\left(-\frac{z}{2} |f''(t_0)| (t - t_0)^2\right) dt$$

積分は $t - t_0 = re^{i\beta}$ とおき, β としては被積分関数がかっとも急激に減少する方向を選ぶ. その方が精度が増すからだ. 積分は簡単で, $I(z)$ は次のように評価される¹¹.

$$I(z) \approx \frac{\sqrt{2\pi} e^{zf(t_0)} e^{i\beta}}{\sqrt{|zf''(t_0)|}} \quad (2.2.4)$$

これを (2.2.2) に適用する. $zf(t) = zt - \frac{t^3}{3}$ であるから,

$$f(t) = t - \frac{t^3}{3z}, \quad f'(t) = 1 - \frac{t^2}{z}, \quad f''(t) = -\frac{2t}{z}$$

である.

停留点 t_0 は $f'(t) = 1 - \frac{t^2}{z} = 0$ から求まり, z の正負で 4 個の場合がある.

$$t_0 = \begin{cases} \pm\sqrt{z}, & \text{for } z > 0 \\ \pm i\sqrt{|z|}, & \text{for } z < 0 \end{cases}$$

各場合について (2.2.2) を評価してやろう.

$z > 0$, $t_0 = \sqrt{z}$ の場合

$zf(t_0) = \frac{2}{3}z^{3/2}$ および, $zf''(t_0) = -2\sqrt{z}$ である. β を求めるため, $t = \sqrt{z} + re^{i\beta}$ を代入して, 微小な r に対して r^3 以上の項を無視すれば,

$$zf(t) = \frac{2}{3}z^{3/2} - \sqrt{z}r^2e^{2i\beta}$$

となる. 実部が最小になるように β をとるには, $-e^{2i\beta} = -1$, すなわち, $e^{2i\beta} = 1$ とればよい. これから $\beta = 0$ となる. したがって, (2.2.4) から

$$I(z) = \sqrt{\pi} z^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)$$

と評価される. \sqrt{z} を $\beta = 0$ で通るのは図 2.1 で積分路 C_2 と $-C_3$ であるから, これを図 2.2 のようにとる. ただし C_2 と $-C_3$ は t の実軸と一致させる. C_2 と $-C_3$ の積分路で与えられるのは (2.2.2) より u_2 であり,

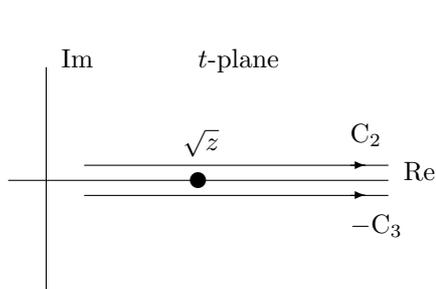


図 2.2: $t_0 = \sqrt{z}$, $z > 0$ の場合の積分路

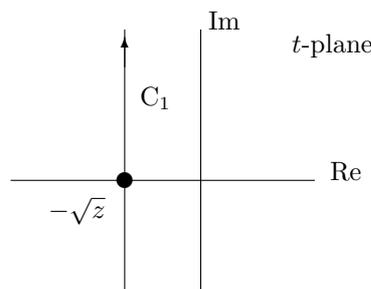


図 2.3: $t_0 = -\sqrt{z}$, $z > 0$ の場合の積分路

$z \rightarrow \infty$ での u_2 の漸近形が次のように評価される. C_2 と $-C_3$ に沿っての積分値は同じであるから上の $I(z)$ の 2 倍となる. よって,

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{C_2} - \int_{C_3} \right) \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right), \quad z \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

¹¹積分の計算の詳細を付録 3 に述べる.

$z > 0$, $t_0 = -\sqrt{z}$ の場合

$zf(t_0) = -\frac{2}{3}z^{3/2}$ および $zf''(t_0) = 2\sqrt{z}$ である. β を求めるため, $t = -\sqrt{z} + re^{i\beta}$ を代入して, 微小な r に対して r^3 以上の項を無視すれば,

$$zf(t) = -\frac{2}{3}z^{3/2} + \sqrt{z}r^2e^{2i\beta}$$

実部が最小になるように β をとるには, $e^{2i\beta} = -1$ ととればよい. これから $\beta = \pi/2$ となる. したがって (2.2.4) から

$$I(z) = i\sqrt{\pi}z^{-1/4}\exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right)$$

と評価される. $-\sqrt{z}$ を偏角 $\pi/2$ で通過するのは図 2.1 によると C_1 である. そこで図 2.3 のような積分路を選ぶ.

(2.2.2) より C_1 のような積分路で求まるのは u_1 である. よって u_1 の漸近形 ($z \rightarrow \infty$) は次のように評価される.

$$u_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right), \quad z \rightarrow \infty \quad (2.2.6)$$

$z < 0$, $t_0 = i\sqrt{|z|}$ の場合

$zf(t_0) = -i\frac{2}{3}|z|^{3/2}$ および, $zf''(t_0) = -2i\sqrt{|z|}$ である. β を求めるため, 前と同じように $t = i\sqrt{|z|} + re^{i\beta}$ を代入し, 微小な r に対して r^3 以上の項を無視すれば,

$$zf(t) = -i\frac{2}{3}|z|^{3/2} - i\sqrt{|z|}r^2e^{2i\beta}$$

である. 実部が最小になるように β をとるには, $-ie^{2i\beta} = -1$, すなわち, $e^{2i\beta} = -i$ となるようにとればよい. これから $\beta = -\pi/4$ となる. したがって (2.2.4) から

$$I(z) = \sqrt{\pi}|z|^{-1/4}\exp\left[-i\left(\frac{2}{3}|z|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

と評価される. $i\sqrt{|z|}$ を偏角 $-\pi/4$ で通過するのは C_2 である (図 2.4 参照). よって上の値は \int_{C_2} を与える.

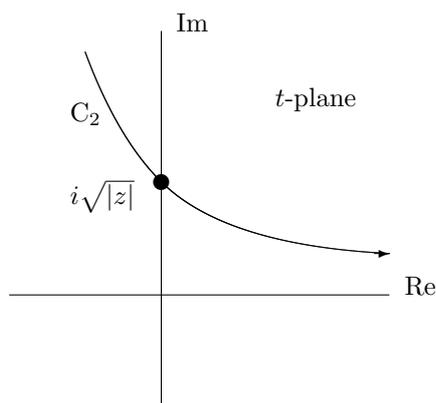


図 2.4: $t_0 = i\sqrt{|z|}$, $z < 0$ の場合の積分路

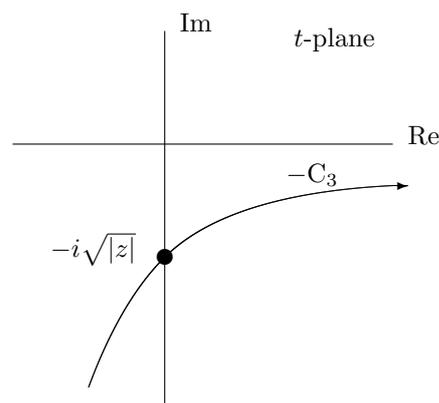


図 2.5: $t_0 = -i\sqrt{|z|}$, $z < 0$ の場合の積分路

これは次の $z < 0$, $t_0 = -i\sqrt{|z|}$ の場合の結果と共に考えることにする.

$z < 0$, $t_0 = -i\sqrt{|z|}$ の場合

$zf(t_0) = i\frac{2}{3}|z|^{3/2}$ および, $zf''(t_0) = 2i\sqrt{|z|}$ である. $t = -i\sqrt{|z|} + re^{i\beta}$ を代入して, 微小な r に対して r^3 以上の項を無視すれば,

$$zf(t) = i\frac{2}{3}|z|^{3/2} + i\sqrt{|z|}r^2e^{2i\beta}$$

実部が最小になるように β をとるには, $ie^{2i\beta} = -1$, すなわち, $e^{2i\beta} = i$ ととればよい. これから $\beta = \pi/4$ となる. したがって, (2.2.4) から

$$I(z) = \sqrt{\pi}|z|^{-1/4} \exp\left[i\left(\frac{2}{3}|z|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

と評価される. $-i\sqrt{|z|}$ を偏角 $\pi/4$ で通過するのは $-C_3$ である (図 2.5 参照).

上の値は $-\int_{C_3}$ を与える. (2.2.2) $\sim z < 0$, $t_0 = i\sqrt{|z|}$ の場合と $z < 0$, $t_0 = -i\sqrt{|z|}$ の場合の結果を用いると,

$$u_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{C_2} + \int_{C_3} \right) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} |z|^{-1/4} \sin\left(\frac{2}{3}|z|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.2.7)$$

これが $z \rightarrow -\infty$ での u_1 の漸近形となる. u_2 の $z \rightarrow -\infty$ での漸近形については (2.2.2) より

$$u_2 = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{C_2} - \int_{C_3} \right) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} |z|^{-1/4} \cos\left(\frac{2}{3}|z|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.2.8)$$

となる.

2.2.3 まとめと新しい表現

これで準備が終わった. これから解の接続をするのだが, 少しここでまとめておこう.

$$u_1 \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right), \quad \text{for } z \rightarrow +\infty \quad (2.2.6)$$

$$u_1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} |z|^{-1/4} \sin\left(\frac{2}{3}|z|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), \quad \text{for } z \rightarrow -\infty \quad (2.2.7)$$

$$u_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right), \quad \text{for } z \rightarrow +\infty \quad (2.2.5)$$

$$u_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} |z|^{-1/4} \cos\left(\frac{2}{3}|z|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), \quad \text{for } z \rightarrow -\infty \quad (2.2.8)$$

である. 解としてはこれで完成である.

ところがこれを用いてトンネリング確率を求めようとするとかかなり難儀をしなければならない. これをわかりやすい形に直しておく.

これまでの議論を適用するには, x, z を以下で導入する $g(x)$ や $M(x), L(x)$ といった関数で表すのが便利である. まず

$$g(x) = -\frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] = \alpha x, \quad \alpha = \frac{2m}{\hbar^2} V'(0)$$

と表す. $V(x)$ が増加関数か, 減少関数かで α の符号が変わるが面倒なことは何もない. 当面のところ正としておこう. 図 2.6 に示されたような状況である.

$x > 0$ ($V(x) > E$, $g(x) > 0$) の場合, $M(x)$ を次のように定義する.

$$M(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V(x) - E)} dx \approx \int_0^x \sqrt{\alpha x} dx = \frac{2}{3} z^{3/2}, \quad g(x)^{-1/4} = (\alpha x)^{-1/4} = \alpha^{-1/6} z^{-1/4} \quad (2.2.9)$$

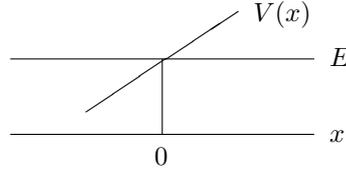


図 2.6: E と $V(x)$ の関係, $\alpha > 0$, $V'(0) > 0$ の場合

となる. つまり, ここでは $z^{2/3}$ や $z^{-1/4}$ を $M(x)$ や $g(x)$ で表している.

逆に $x < 0$ ($V(x) < E, g(x) < 0$) の場合, $L(x)$ を次のように定義する.

$$L(x) = \int_x^0 \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V(x) - E)} dx \approx \int_x^0 \sqrt{-\alpha x} dx = \frac{2}{3} |z|^{3/2}, \quad |g(x)|^{-1/4} = (\alpha|x|)^{-1/4} = \alpha^{-1/6} |z|^{-1/4} \quad (2.2.10)$$

それでは接続を始めよう. まず u_1 について $x(z) < 0$ の領域から出発する. (2.2.7) において $|z|^{-1/4}$, $\frac{2}{3}|z|^{3/2}$ に (2.2.10) を用いると,

$$u_1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} \alpha^{1/6} |g(x)|^{-1/4} \sin\left(L(x) + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{for } z \rightarrow -\infty$$

という形式が得られる. 次に u_1 の $x(z) > 0$ の漸近形を求めよう. (2.2.6) の $z^{-1/4}$, $\frac{2}{3}z^{3/2}$ に (2.2.9) を用いるのである. そうすると,

$$u_1 \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \alpha^{1/6} g(x)^{-1/4} \exp(-M(x)) \quad \text{for } z \rightarrow \infty$$

これで u_1 についての接続が得られた. 再録すると,

$$|g(x)|^{-1/4} \sin\left(L(x) + \frac{\pi}{4}\right) \quad (z \rightarrow -\infty) \rightarrow \frac{1}{2} g(x)^{-1/4} \exp(-M(x)) \quad (z \rightarrow \infty) \quad (2.2.11)$$

同じことを u_2 について行なう. もう詳細は不要だろう. 結果だけを記す.

$$|g(x)|^{-1/4} \cos\left(L(x) + \frac{\pi}{4}\right) \quad (z \rightarrow -\infty) \rightarrow g(x)^{-1/4} \exp(M(x)) \quad (z \rightarrow \infty) \quad (2.2.12)$$

これで終了であるが, もう一つ, (2.2.11) に i を掛けて, (2.2.12) と加減を行なうと次式が得られる. 左辺が $z \rightarrow -\infty$ に, 右辺が $z \rightarrow \infty$ に対応している.

$$|g|^{-1/4} \exp\left[i\left(L + \frac{\pi}{4}\right)\right] \rightarrow g^{-1/4} \left(e^M + \frac{i}{2}e^{-M}\right) \quad (2.2.13)$$

$$|g|^{-1/4} \exp\left[-i\left(L + \frac{\pi}{4}\right)\right] \rightarrow g^{-1/4} \left(e^M - \frac{i}{2}e^{-M}\right) \quad (2.2.14)$$

これはもちろん進行波解を表すためである.

2.3 トンネリングの確率を求める

WKB 近似を用いる応用例として, トンネル効果で粒子がポテンシャルの障壁を通り抜ける確率を求めよう. まず図 2.7 に状況を描く. 記号の説明の必要はないだろう. $x = a, b$ が回帰点である. $x > b$ の領域から考える

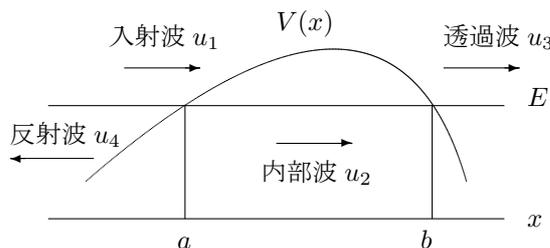


図 2.7: ポテンシャル障壁を通過する波

のが楽である. というのはここでは透過波 u_3 しかないからである. これは (2.2.13) の左側に対応している ($z \rightarrow -\infty, x$ としては $+\infty$ に行くのだが, ここでは $\alpha < 0$ なのでこうなる).

これから $\frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]$ という関数が繰り返して現れるので, 式の表現を簡単にするために引き続き記号

$$g(x) = \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]$$

を用いることにしよう.

$$u_3(x) = (g(x))^{-1/4} \exp \left[i \int_b^x \left((g(x))^{1/2} + \frac{\pi}{4} \right) dx \right] \quad (2.3.1)$$

が得られる. ここで積分範囲は回帰点 b から x までとなる. これがポテンシャル障壁内の解, u_2 に接続される. (2.2.13) の右側より,

$$u_2(x) = (-g(x))^{-1/4} \left[\exp \left(\int_x^b (-g(x))^{1/2} dx \right) + \frac{i}{2} \exp \left(- \int_x^b (-g(x))^{1/2} dx \right) \right] \quad (2.3.2)$$

積分範囲は x から b となる. 次にこれを入射波 u_1 に接続する. このとき問題となるのは, 回帰点が $x = a$ に移るので積分範囲を変更しなければならない. 次の関係を使う.

$$\int_a^x + \int_x^b = \int_a^b g^{1/2} dx \equiv A$$

より,

$$\int_x^b = A - \int_a^x$$

これを用いて (2.3.2) を書き換える.

$$u_2(x) = (-g(x))^{-1/4} \left[\exp \left(A - \int_a^x (-g(x))^{1/2} dx \right) + \frac{i}{2} \exp \left(-A + \int_a^x (-g(x))^{1/2} dx \right) \right] \quad (2.3.3)$$

これを $x < b$ の解, u_1 に接続する. (2.2.11), (2.2.12) より,

$$e^M \rightarrow \cos \left(L + \frac{\pi}{4} \right), \quad e^{-M} \rightarrow 2 \sin \left(L + \frac{\pi}{4} \right)$$

である.

これを (2.3.3) に適用する. ただし $g, |g|$ という因子は共通なので表式を簡単にするため, これを省略した. また $M(x), L(x)$ 等も単に M, L とした. そうすると,

$$\begin{aligned} & e^A e^{-M} + \frac{i}{2} e^{-A} e^M \\ & \rightarrow 2e^A \sin\left(L + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{i}{2} e^{-A} e \cos\left(L + \frac{\pi}{4}\right) \\ & = 2e^A \frac{1}{2i} \left(e^{i(L+\frac{\pi}{4})} - e^{-i(L+\frac{\pi}{4})} \right) + \frac{i}{2} e^{-A} \frac{1}{2} \left(e^{i(L+\frac{\pi}{4})} + e^{-i(L+\frac{\pi}{4})} \right) \\ & = -i \left(e^A - \frac{1}{4} e^{-A} \right) e^{i(L+\frac{\pi}{4})} + i \left(e^A + \frac{1}{4} e^{-A} \right) e^{-i(L+\frac{\pi}{4})} \end{aligned}$$

このうち, 第2項は左へ進行しているから反射波 u_4 である. 第1項が入射波 u_1 を表している. したがって u_2 につながる解, u_1 は次のようになる.

$$u_1(x) = -i g^{-1/4} \left(e^A - \frac{1}{4} e^{-A} \right) \exp \left[i \int_x^a g^{1/2} dx + \frac{\pi}{4} \right], \quad g = \left[\frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)) \right] \quad (2.3.4)$$

これで道具立ては揃った. まず単位時間当たりの入射あるいは透過粒子数は $|u|^2 v$ で与えられる. ここで v は粒子の速度である.

$$g(x) = \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)) = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{m}{2} v^2 \propto v^2$$

であるから u_1, u_3 の共通因子,

$$g^{-1/4} = \left[\frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)) \right]^{-1/4} \propto \frac{1}{\sqrt{v}}$$

である. 透過確率 T は v_1, v_3 を $x < a, x > b$ での粒子の速度として

$$T = \frac{|u_3|^2 v_3}{|u_1|^2 v_1}$$

となる. これに, (2.3.1), (2.3.4) を用いると,

$$T = \frac{\frac{1}{v_3} v_3}{\left(e^A - \frac{1}{4} e^{-A} \right)^2 \frac{1}{v_1} v_1} = \left(e^A - \frac{1}{4} e^{-A} \right)^{-2}$$

通常 $e^A \gg 1$ なので第2項を無視して,

$$T = e^{-2A} = \exp \left(-2 \int_a^b \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x))} dx \right)$$

という表式が得られる. これが世上通用している Gamow の公式である.

2.4 おわりに

以上が [1] にある WKB 近似とそのトンネル効果への応用である. 演習書の説明を解説する必要があるのか. 実はこの解説がかなり難しいのである. 初学者でこれをすらすらと読みこなせる人は多分容易に上の公式を理解することができるだろう. 理論をよく理解したと思えるにはやはり数学的にはっきり理解できないとなかなか納得できないものだ. この解説が WKB 近似とトンネル効果についての理解の一助になれば幸いである.

(編集者からのお断りとお詫び)

原稿を森本安夫先生にご投稿頂いてから, もうすぐ一年になろうとしている. 掲載の遅れに対して編集者として, まずお詫びを申し上げます. また投稿頂いた原稿に対して, 編集者の手による改稿をお願いしてお許しを頂いた森本さんのご寛容さに厚く御礼を申し上げます.

さらに原稿の補足として付録までつけた，重ね重ねの失礼をお詫び申し上げます．ただ，これによって WKB 近似がさらにわかりやすくなったとすれば，幸いである．付録と参考文献は編集者（矢野）によるものであり，著者の森本さんに関連して頂いたが，文責は矢野にある．

付録 1 変数 x から z への変換

変数を x から z へ変換するときに，方程式を簡単にするために $z = \alpha^{1/3}x$ としたが，この説明をしよう．いま $z = \beta x$ とおけば，

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz} \frac{dz}{dx} = \beta \frac{du}{dz}$$

同様にして

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \beta^2 \frac{d^2u}{dz^2}$$

したがって，(2.1.1) は

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \left(\frac{\alpha}{\beta^3} z \right) u \quad (2.4.1)$$

ここで

$$\frac{\alpha}{\beta^3} = 1$$

とれば

$$\beta = \alpha^{1/3}$$

となる．このとき (2.4.1) は (2.1.3) となる．

付録 2 (2.2.1) の導出

(2.1.3) の解として (2.2.1) を導こう [2]．ただし， $t \rightarrow t_1, t_2$ で $\exp(zt - \frac{t^3}{3}) \rightarrow 0$ ならば， $\frac{d^2u}{dz^2} - zu = 0$ が成立するような積分路 C をとる．

まず

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \exp(zt) T(t) dt \quad (2.4.2)$$

とおく．

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{2\pi i} \int_C t \exp(zt) T(t) dt$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_C t^2 \exp(zt) T(t) dt$$

これを (2.1.3) に代入すれば，

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2u}{dz^2} - zu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C (t^2 - z) \exp(zt) T(t) dt \\ &= -\frac{1}{2\pi i} [\exp(zt) T(t)]_C + \frac{1}{2\pi i} \int_C \exp(zt) \left(\frac{dT}{dt} + t^2 T \right) dt \end{aligned}$$

したがって

$$[\exp(zt) T(t)]_C = 0$$

$$\frac{dT}{dt} + t^2 T = 0$$

が得られる。下の式を積分すれば、特解として

$$T = \exp\left(-\frac{t^3}{3}\right) \quad (2.4.3)$$

したがって

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \exp\left(zt - \frac{t^3}{3}\right) \quad (2.2.1)$$

となる。

付録 3 積分 $I(z)$ の導出

この付録では積分 $I(z)$ ，すなわち，(2.2.4) の導出をしよう [3]。まず出発点は積分の定義 (2.2.3) である。

$$I(z) = \int_D \exp[zf(t)]dt \quad (2.2.3)$$

この積分の中の関数 $f(t)$ をつぎのように Taylor 展開する。

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}f''(t_0)(t - t_0)^2 + \dots$$

$f(t)$ が $t = t_0$ で極大値をとるための条件は $f'(t_0) = 0$ のとき $f''(t_0) < 0$ である¹²。

いま $f''(t_0) = -|f''(t_0)|$ とおけば，

$$f(t) = f(t_0) - \frac{1}{2}|f''(t_0)|(t - t_0)^2 + \dots$$

である。これを (2.2.3) に代入すれば，

$$I(z) \approx e^{zf(t_0)} \int_D \exp\left[-\frac{z}{2}|f''(t_0)|(t - t_0)^2\right] dt$$

となる。

いま次の式で実数パラメーター s を導入する。

$$f(t) - f(t_0) = -\frac{1}{2}|f''(t_0)|(t - t_0)^2 = -\frac{s^2}{2z} \quad (2.4.4)$$

さらに

$$t - t_0 = re^{i\beta}$$

とおけば， s は実数であるから

$$s = r|zf''(t_0)|^{1/2}$$

である。このとき s が増加するように，+ の符号をとった。

したがって， $\text{Im}f(t) = \text{const}$ となる積分路 C をとれば，

$$\begin{aligned} I(z) &= \int_C \exp[zf(t)]dt \\ &= e^{zf(t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} \frac{dt}{ds} ds \end{aligned}$$

¹²実は $t = t_0$ で単純な極大ではなく，極大をとる方向に垂直な方向には極小になっている。曲面的には馬の鞍のようになっている。鞍部法という名はそこから来ている。実はこの議論は正確ではない。詳しくは文献 [4] を参照せよ。 $\text{Im}f(t) = \text{const}$ の積分路 C をとることが必要である。

となる. ここで

$$\begin{aligned}\frac{dt}{ds} &= \frac{1}{\frac{ds}{dr} \frac{dr}{dt}} \\ &= \frac{e^{i\beta}}{|zf''(t_0)|^{1/2}}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}I(z) &= e^{zf(t_0)} \frac{e^{i\beta}}{|zf''(t_0)|^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \\ &= \frac{\sqrt{2\pi} e^{zf(t_0)} e^{i\beta}}{|zf''(t_0)|^{1/2}}\end{aligned}\tag{2.4}$$

ここで $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \sqrt{2\pi}$ を用いた.

参考文献

- [1] 後藤憲一 他編, 「詳解理論・応用量子力学演習」 (共立出版, 1985) 57-67
- [2] 大鹿 譲, 金野 正, 「量子力学 1」 (共立出版, 1974) 150-161
- [3] 後藤憲一, 山本邦夫, 神吉 健 共編, 詳解物理・応用数学演習 (共立出版, 1979) 164-165
- [4] 松田哲, 複素関数 (岩波書店, 1996) 173-178

編集後記

花吹雪が川面を賑わしたのもついこの間だと思っていたら、はや新緑の眩しい初夏の候となってまいりました。

この「数学・物理通信」も、はや4年目に入りました。投稿された皆様方のお蔭で今回も発刊に漕ぎつけることができました。今までの通信の話題も、見てわかるように、数学と物理に限定されているにも拘らず、内容が結構多岐にわたっていて、興味深い。また、通常の学校では学ぶことができないような内容も決して少なくはない。

今後とも、内容が充実されていくようにできるだけ努力をしたいと思います。「継続は力なり」との精神を忘れないように。

(新関章三)