

# 数学・物理通信

3卷7号      2013年12月

編集 新関章三・矢野 忠

2013年12月3日

# 目次

|                                    |           |
|------------------------------------|-----------|
| <b>誤解をまねく古典力学の問題</b>               | <b>3</b>  |
| 1.1 はじめに                           | 3         |
| 1.2 摩擦が入った問題                       | 3         |
| 1.3 滑車の問題                          | 5         |
| 1.3.1 その1                          | 5         |
| 1.3.2 その2                          | 6         |
| <b>衝撃問題の高次元への拡張 (2)</b>            | <b>8</b>  |
| 2.1 はじめに                           | 8         |
| 2.2 一般 $n$ 次元の場合の衝撃問題              | 8         |
| 2.2.1 方程式の導入とその解法                  | 8         |
| 2.2.2 固有関数の直交性とその規格化               | 10        |
| 2.2.3 最終的な解の構成                     | 11        |
| 2.3 $\nu$ の値の特別な場合                 | 12        |
| 2.3.1 $\nu = -1/2$ の場合             | 12        |
| 2.3.2 $\nu = 1/2$ の場合              | 12        |
| 2.3.3 残留変位について                     | 13        |
| 2.4 固有関数の完全性について                   | 13        |
| 2.4.1 $\nu = -1/2$ の場合             | 14        |
| 2.4.2 $\nu = 1/2$ の場合              | 14        |
| 2.5 変位解のさらなる改良について                 | 15        |
| <b>Random Frequency Modulation</b> | <b>18</b> |
| 3.1 はじめに                           | 18        |
| 3.2 Random Frequency Modulation とは | 18        |
| 3.3 言わでもながのこと                      | 19        |
| 3.4 Wiener-Khinchin の定理            | 20        |
| 3.5 Gauss 過程のいろいろ                  | 21        |
| 3.5.1 準備                           | 21        |
| 3.5.2 ちょっとゴタゴタした話                  | 22        |
| 3.6 Random Frequency Modulation    | 23        |
| 3.7 おわりに                           | 24        |
| <b>編集後記</b>                        | <b>25</b> |

# Contents

1. Kenji SETO: Misleading Problems on Classical Mechanics
2. Kenji SETO: Extensions to Higher Dimensions of Impulsive Loading Problem (2)
3. Yasuo MORIMOTO: Random Frequency Modulation
4. Shozo NIIZEJKI: Editorial Comments

# 誤解をまねく古典力学の問題

## Misleading Problems on Classical Mechanics

世戸 憲治<sup>1</sup>  
Kenji SETO<sup>2</sup>

### 1.1 はじめに

いまさら古典力学かと思うかもしれませんが、よくわかったつもりでもカバーする範囲が広いので、なかには物理学者でもうっかり間違いそうな問題はたくさんあります。ここではそのような例を3つ取り上げてみました。

### 1.2 摩擦力が入った問題

名前は伏せておくが、今は亡きある著名な物理学者が書いた力学の演習書で、有名出版社から発行された本の中につぎのような問題がある。

『水平直線上の一点 A を出発し、この直線に沿って運動する物体が、B( $AB = \ell$ ) まで進み、引きつづき半径  $a$  の鉛直円弧に沿って中心角が  $\alpha$  となる点 C まで昇って止まった。物体との間の動摩擦係数を  $\mu$  としたら、はじめ A 点で何ほどの速度を与えてあったか。

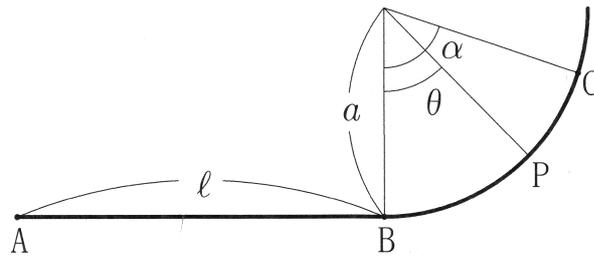


図 1

**解** 物体の質量を  $m$ 、求める初速度を  $v_0$  とするとエネルギー原理により、A 点における運動エネルギー  $mv_0^2/2$  は、物体が摩擦に対して A から B までした仕事  $\mu mgl$ 、同じく摩擦に対して B から C までした仕事 ( $W$ )、および B から C まで重力に対してした仕事  $mga(1 - \cos \alpha)$  の和に等しい。すなわち、

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \mu mgl + W + mga(1 - \cos \alpha) \quad (1.2.1)$$

<sup>1</sup> 北海学園大学名誉教授

<sup>2</sup> seto@pony.ocn.ne.jp

よって仕事  $W$  が求められれば上式から  $v_0$  が出せる. そこで  $W$  を求めるに, 円弧上の一点 P から弧の長さ  $ds$  だけ昇る間に摩擦  $\mu mg \cos \theta$  に対してした仕事  $dW$  は

$$dW = \mu mg \cos \theta ds = \mu mga \cos \theta d\theta \quad (1.2.2)$$

$$\text{ゆえに, } W = \mu mga \int_0^\alpha \cos \theta d\theta = \mu mga \sin \alpha \quad (1.2.3)$$

これを (1.2.1) 式に入れて解

$$v_0 = \sqrt{2g[\mu(\ell + a \sin \alpha) + a(1 - \cos \alpha)]} \quad (1.2.4)$$

を得る.] というのが載っていました. 一見するとこの解答は正しいものと思われます. しかし, ここまで読まれてこの解答が間違いであることに気付かれた方はかなり聡明な方です. この問題には重要な落とし穴があり, こんな簡単に解ける代物ではないのです.

それは遠心力の存在です. 円弧上を動くときには必ず遠心力が存在するのでその分だけ垂直抗力が増え, したがって, 摩擦も増加してしまいます. いま, 中心角が  $\theta$  のときの速度を  $v$  とすると  $mv^2/a$  の遠心力が作用するので, 垂直抗力はこれと重力分を合わせて  $mg \cos \theta + mv^2/a$ , したがって, 角度で  $d\theta$  進む間に摩擦に対してする仕事は  $\mu(mga \cos \theta + mv^2)d\theta$  となり, また, 重力に対してする仕事は  $mga \sin \theta d\theta$  となる. したがって, この間のエネルギー保存の式は

$$\frac{1}{2}mdv^2 = -\mu(mga \cos \theta + mv^2)d\theta - mga \sin \theta d\theta, \quad (1.2.5)$$

あるいは, これを書き直して

$$\frac{dv^2}{d\theta} = -2\mu v^2 - 2ag(\sin \theta + \mu \cos \theta) \quad (1.2.6)$$

となる. この方程式を

$$\theta = \alpha \text{ のとき } v = 0 \quad (1.2.7)$$

という条件の基に解くことになる. これは  $v^2$  に関し非斉次線形の 1 階微分方程式なので定数変化法で解くことができる. まず, 斉次部分の方程式  $dv^2/d\theta = -2\mu v^2$  を解くと  $v^2 = Ce^{-2\mu\theta}$  となるので,  $C$  を  $\theta$  の関数としてこれを元の式に代入すると

$$\frac{dC}{d\theta} = -2ag(\sin \theta + \mu \cos \theta)e^{2\mu\theta} \quad (1.2.8)$$

となり, 条件式 (1.2.7) を考慮して積分すると

$$C = 2ag \int_\theta^\alpha (\sin \phi + \mu \cos \phi)e^{2\mu\phi} d\phi \quad (1.2.9)$$

となるので, 中心角  $\theta$  における  $v^2$  は

$$v^2 = 2ag \left[ \int_\theta^\alpha (\sin \phi + \mu \cos \phi)e^{2\mu\phi} d\phi \right] e^{-2\mu\theta} \quad (1.2.10)$$

となる. さらに積分公式

$$\int \sin \phi e^{2\mu\phi} d\phi = \frac{2\mu \sin \phi - \cos \phi}{1 + 4\mu^2} e^{2\mu\phi}, \quad \int \cos \phi e^{2\mu\phi} d\phi = \frac{2\mu \cos \phi + \sin \phi}{1 + 4\mu^2} e^{2\mu\phi} \quad (1.2.11)$$

を用いると,  $v^2$  は

$$v^2 = \frac{2ag}{1 + 4\mu^2} \left[ \left( 3\mu \sin \alpha - (1 - 2\mu^2) \cos \alpha \right) e^{2\mu(\alpha - \theta)} - \left( 3\mu \sin \theta - (1 - 2\mu^2) \cos \theta \right) \right] \quad (1.2.12)$$

となる. この式の右辺は,  $0 < \alpha \leq \pi/2$  のとき,  $\theta < \alpha$  である限り, (1.2.10) 式の被積分関数が正なので, 正となる. 特に,  $\theta = 0$  のときの  $v$  を  $v_1$  と書くことにすると

$$v_1^2 = \frac{2ag}{1 + 4\mu^2} \left[ 1 - 2\mu^2 + \left( 3\mu \sin \alpha - (1 - 2\mu^2) \cos \alpha \right) e^{2\mu\alpha} \right] \quad (1.2.13)$$

となり、あとは A 点から B 点までのエネルギー保存の式から

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \mu mgl + \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (1.2.14)$$

となるので、上で求めた  $v_1^2$  を代入して

$$v_0 = \sqrt{2\mu gl + \frac{2ag}{1+4\mu^2} \left[ 1 - 2\mu^2 + \left( 3\mu \sin \alpha - (1 - 2\mu^2) \cos \alpha \right) e^{2\mu\alpha} \right]} \quad (1.2.15)$$

と求められる。(1.2.4) 式の解とはいかに違うことか。

先に挙げた本の著者は力学の演習書の他に、電磁気学の演習書も書かれており、非常に豊富な例題をもとに懇切丁寧に書かれたものなので、これらの本で物理学を勉強した人はたくさんいるはずです。この意味でこれらの本は古典的名著といっても過言ではないほどのものですが、ここで扱った例題はどんな名著といえどもそのまま信用してはいけないということを教えられます。

ついでながら、ここで、

**逆問題**；C 点から初速度なしに出発した物体が B 点を超え、A 点まで来て静止した。このときの AB 間の距離  $\ell$  を求めよ。この解法は読者にお任せし、答えのみを記すと、

$$\ell = \frac{a}{\mu(1+4\mu^2)} \left[ 1 - 2\mu^2 - \left[ 3\mu \sin \alpha + (1 - 2\mu^2) \cos \alpha \right] e^{-2\mu\alpha} \right] \quad (1.2.16)$$

と重力加速度  $g$  に依存しない解が求まる。ただし、 $\mu$  の値によっては右边が負となる場合があり、このときは C 点から出発した物体が B 点まで達しなかったときである。

## 1.3 滑車の問題

あるとき飛行機に乗っていて座席の前に置いてある雑誌の中で見たクイズに、滑車に掛けられた紐を猿がよじ登るとい問題がありました。ただし、この問題は勘違いを起こしやすい問題なので、これを考える前に準備運動としてつぎの問題を考えてみます。

### 1.3.1 その 1

次ページ図 2 のように定滑車に掛けた紐の一端に質量  $M$  の錘を付け、この紐の他端には 2 番目の滑車を付け、さらに、この 2 番目の滑車に掛けた紐の一端には質量  $m_1$  の錘、他端には質量  $m_2$  の錘を付ける。ただし、ここでは  $M = 5\text{kg}$ ,  $m_1 = 3\text{kg}$ ,  $m_2 = 2\text{kg}$  とする。初めすべての錘が動かないように抑えておき、同時に抑える手を離れたとき、質量  $M$  の錘は (1) そのまま動かない。(2) 上に動き出す。(3) 下に動き出す。このうちどれが正しいか。ただし、滑車の問題の常として滑車および紐の質量は無視できるものとし、また滑車は摩擦無しに回転できるものとする。

物理をまったく知らない人ならば、初めの定滑車に付けた 5kg の錘と 2 番目の滑車に付けた 3kg と 2kg の錘の和が同じなので 5kg の錘は動かないと答えてしまいそうです。しかし、物理を少しでもかじった人ならば 2 番目の滑車に付けた 3kg と 2kg の錘は必ず動き出すので、その分だけ 2 番目の滑車に掛る張力は軽くなり、5kg の錘は下に動き出すと答えるはずです。それが正解ですが、物理的に正しく解いてみましょう。以下では  $M = m_1 + m_2$ ,  $m_1 > m_2$  としておきます。

まず、2 番目の滑車に掛けた紐の張力を  $T$  とすると初めの滑車に掛けた紐の張力は  $2T$  となる。また、 $M$  の錘は下向きに動く予想されるので、下向きを正として、この加速度を  $a$  とする。さらに、2 番目の滑車から見た  $m_1$  の錘の加速度を  $a'$  とすると、 $m_2$  の錘の加速度は  $-a'$  となる。ただしこれは静止系で見た加速度で

はないので、2番目の滑車の加速度が  $-a$  であることを考慮すると、静止系で見た  $m_1, m_2$  の加速度は、それぞれ、 $a' - a, -a' - a$  となる。重力加速度を  $g$  とし、 $M, m_1, m_2$  の錘の運動方程式を立てると、

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)a &= (m_1 + m_2)g - 2T \\ m_1(a' - a) &= m_1g - T \\ m_2(-a' - a) &= m_2g - T\end{aligned}\tag{1.3.1}$$

となる。未知数は  $a, a', T$  の3個である。この連立方程式を解いて加速度  $a, a'$  を求めると

$$a = \frac{(m_1 - m_2)^2 g}{m_1^2 + 6m_1m_2 + m_2^2}, \quad a' = \frac{2(m_1^2 - m_2^2)g}{m_1^2 + 6m_1m_2 + m_2^2}\tag{1.3.2}$$

と求められる。特に、 $m_1 = 3\text{kg}, m_2 = 2\text{kg}$  のときは、

$$a = \frac{1}{49}g, \quad a' = \frac{10}{49}g\tag{1.3.3}$$

となる。したがって、 $M(=m_1+m_2), m_1, m_2$  の錘は、それぞれ、静止系で見て、 $(1/49)g, (9/49)g, -(11/49)g$  の加速度で下向きに動くことになる。

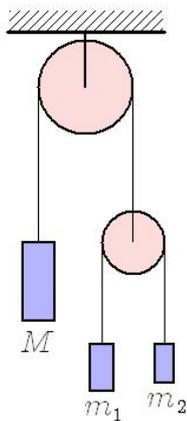


図 2

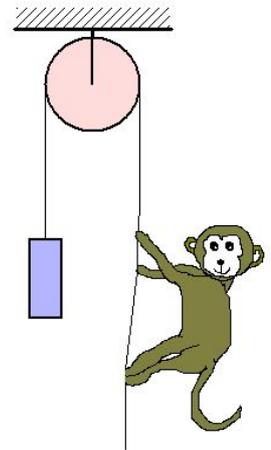


図 3

### 1.3.2 その2

先に挙げた飛行機の中で見た問題とは；図3のように、1個の定滑車がありこの滑車に掛けた紐の一端には錘が、また、他端には錘と同じ重さの猿がぶら下がっている。初めは錘も猿も静止していたが、あるときから猿が紐を登り始めた。このとき錘の方は、(1) そのまま動かない。(2) 上に動き出す。(3) 下に動き出す。このうちのどれが正解か、という問題です。

このクイズの作者自身もどれが正解なのかかわからず、ある高名な数学者に伺いをたてたところ(1)の「そのまま動かない」が正解だと答えたために、この本の答えも(1)になっていました。はたして、本当にそうでしょうか。こういうときは数学者に聞かないで、物理学者に聞いてほしいものです。物理的に考えると、静止状態から動き出すためには必ず加速度が発生し、加速度が発生するためにはそれなりの力が必要になります。その力が紐を通して錘に伝わるので、「そのまま動かない」というのはウソであることがすぐにわかるはずです。

以下、錘と猿の質量を  $m$ 、重力加速度を  $g$  とする。猿は時刻  $t=0$  に動き出し、時刻  $t$  での紐に対する速度、つまり猿が紐を手繰る速度を  $V(t)$  とする。これは猿まかせに決まるものなので、以下では与えられた量として扱う。猿はだまってぶら下がっているだけで重力  $mg$  の力を紐に与えているわけだが、動き出すことで紐の張力は時刻とともに変化することになる。そこで、時刻  $t$  での紐の張力を  $T(t)$  とする。一方、錘の方は紐の張力が変化することでこの錘も動き出すことになるが、時刻  $t$  での上向き速度を  $v(t)$  とする。

ここで、上向きを正として、運動方程式をたててみる。錘の方は

$$m \frac{dv}{dt} = T(t) - mg \quad (1.3.4)$$

となり、猿の方は、静止系から見た速度が  $V(t) - v(t)$  となるので、

$$m \frac{d(V - v)}{dt} = T(t) - mg \quad (1.3.5)$$

となる。これら2式から、 $V(t)$  を与えられたものとして、速度  $v(t)$  と張力  $T(t)$  を求めることになる。初めに、張力  $T(t)$  を消去すると

$$\frac{d(V - 2v)}{dt} = 0 \quad (1.3.6)$$

つまり、 $V(t) - 2v(t)$  は時間に依らない定数ということになる。この定数は初期条件で決まるので、解は初期条件に大きく左右されることになる。この問題の場合は、初めの  $t = 0$  では  $V(0) = 0$ ,  $v(0) = 0$  なのでこの定数はゼロ、すなわち、

$$v(t) = \frac{1}{2}V(t) \quad (1.3.7)$$

ということになり、猿が紐に対して動く速度の半分の速度で錘は上方向に動くことになる。また、猿の方の静止系で見た速度は  $V(t) - v(t) = (1/2)V(t)$  となってこれも錘と同じ速度で上に動いていくことになる。

これで問題は解決したわけだが、ここで新しい問題；猿が紐を手繰る速度  $V(t)$  は初めはゼロとし、だんだんに速度を上げ、ある時間で一定速度に達したとする。そのとき猿と錘の運動エネルギーは一定値に落ち着くが、両方とも上に昇っていくので位置エネルギーの方はどんどん増加していくことになる。これはちょっと不思議な気がするが、これは猿が一定速度になった後も仕事をしているからである。

この現象をエネルギーの観点から見てみよう。猿が時刻ゼロから時刻  $t$  までに紐を手繰ることによってする仕事  $W(t)$  は、仕事率  $T(t)V(t)$  を時間積分した

$$W(t) = \int_0^t T(t')V(t')dt' \quad (1.3.8)$$

となる。この式に (1.3.4) 式から求めた  $T(t)$  を代入し、(1.3.7) 式の関係を用いると、

$$W(t) = mv^2(t) + 2mg \int_0^t v(t')dt' \quad (1.3.9)$$

となる。この式右辺の1項目が錘および猿が獲得した運動エネルギーの和であり、また、 $\int_0^t v(t')dt'$  は上に移動した距離なので、2項目が同じく錘および猿が得た位置エネルギーの和となっている。この結果から、速度  $V(t)$  が一定になると運動エネルギーも一定になるが、位置エネルギーの方は一定の割合で増加していくことになる。

ついでながら、(1)の錘がそのまま動かないという解が可能なのは、どのような場合かを考えてみる。 $V(t) - 2v(t)$  は時間によらない定数なので、錘の速度を  $v(t) = 0$  とすると  $V(t) = \text{Const.}$  つまり、初めから猿が一定速度  $V$  で登っていたとすると錘は動かないですむことになる。またこれとは別に初期条件しだいでは、猿が一定速度で紐を登っているにもかかわらず静止系で見た位置は変わらずに、錘の方だけが一定速度で上がっていくという解もあり得る。この問題は何とも微妙ですね。

# 衝撃問題の高次元への拡張 (2)

## Extensions to Higher Dimensions of Impulsive Loading Problem (2)

世戸 憲治<sup>3</sup>

Kenji SETO<sup>4</sup>

### 2.1 はじめに

前回の論文；「衝撃問題の高次元への拡張 (1)」数学・物理通信 3 巻 6 号, 2013 年 9 月；で扱った膜の振動モデルは、膜自体は 2 次元物体であるが、膜が振動する方向は膜に垂直な第 3 軸の方向である。この意味で、前の論文で扱った 3 次元モデルも 4 次元空間を考えその中に存在する 3 次元物体の第 4 軸方向の振動と考えた方が理解しやすい。

この論文では、この考えを拡張して、 $n + 1$  次元空間を考え、その中に存在する  $n$  次元の波動方程式に従う無限に広い物体があるものとし、この物体中に原点  $O$  をとり、この原点を中心として、内半径 1, 外半径  $1 + \varepsilon$ , 質量  $\mu$  の球殻状の錘を取り付けこの錘に  $n + 1$  次元方向の速度  $v_0$  を与えたときの  $n$  次元物体の振動を解析する。したがって、ここで扱う問題はもはや物理を離れた数学の問題と考えた方が良いが、この解析の副産物として、Bessel, Neumann 関数に関する新しい変換公式を作ることができる。

### 2.2 一般 $n$ 次元の場合の衝撃問題

#### 2.2.1 方程式の導入とその解法

この論文では初めから変数については無次元系を採用することにする。 $n$  次元物体中に発生する波動は通常の波動方程式に従うものとし、空間座標  $\mathbf{r}$ , 時刻  $t$  における変位  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$  の方程式は

$$\partial_t^2 \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \Delta \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \quad (2.2.1)$$

とする。ここに、 $\Delta$  は  $n$  次元の Laplacian である。ただし、ここで扱う問題の場合、変位  $\mathbf{U}$  の方向は第  $n + 1$  軸方向であり、かつ、この物体の振動は  $n$  次元の意味で球対称、すなわち、動径座標  $r$  にのみ依存するものとしてよいので、以下では変位を  $U(r, t)$  と書くことにする。したがって、極座標で表わされた波動方程式は

$$\partial_t^2 U = \left( \partial_r^2 + \frac{n-1}{r} \partial_r \right) U \quad (2.2.2)$$

---

<sup>3</sup> 北海学園大学名誉教授

<sup>4</sup> seto@pony.ocn.ne.jp

となる。この方程式を  $r \rightarrow \infty$  で変位はゼロという境界条件

$$U(\infty, t) = 0 \quad (2.2.3)$$

および、 $r = 1$  では錘の運動方程式という境界条件

$$\mu \partial_t^2 U(1, t) = \partial_r U(r, t)|_{r=1} \quad (2.2.4)$$

を課す。この式の右辺は錘が  $n$  次元物体から受ける反作用である。また、 $t = 0$  でこの物体および錘の初期位置はゼロという初期条件、

$$U(r, 0) = 0 \quad (2.2.5)$$

および初速度に関しては錘のみが初速度  $v_0$  を持つという条件

$$\partial_t U(r, t)|_{t=0} = v_0 \theta(1 + \varepsilon - r) \quad (2.2.6)$$

を課すことになる。ここに、 $\theta$  は単位階段関数である。これら (2.2.3) 式から (2.2.6) 式までの条件のもとに方程式 (2.2.2) を解くことになる。

まず、変位  $U(r, t)$  を空間成分と時間成分に変数分離し、条件式 (2.2.5) を満たすように、正定数  $k$  を用いて

$$U(r, t) = R(r) \sin(kt) \quad (2.2.7)$$

とおく。これで動径方向の方程式は

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{d}{dr} + k^2 \right) R(r) = 0 \quad (2.2.8)$$

となる。この方程式の解は Bessel, Neumann 関数を用いて、任意定数  $A, B$  を含み

$$R(r) = \frac{1}{r^{(n/2)-1}} [A J_{(n/2)-1}(kr) + B N_{(n/2)-1}(kr)] \quad (2.2.9)$$

と解かれる。あとは前回の論文の処方箋に従ってほぼ平行に行うことができる。ただし、ここまできると物理とは離れた数学的な議論と考えてよく、 $n$  を整数に制限しておく必要性もなくなるので、

$$\nu = \frac{n}{2} - 1 \quad (2.2.10)$$

とおき、以後は  $n$  の代わりにこの  $\nu$  を使うことにする。この書き換えで (2.2.9) 式は

$$R(r) = \frac{1}{r^\nu} [A J_\nu(kr) + B N_\nu(kr)] \quad (2.2.11)$$

となる。ただし、ここでは  $\nu \geq -1/2$  としておこう。

初めにこの解 (2.2.11) 式に境界条件 (2.2.4) 式を適用すると、係数  $A, B$  の比を決める条件式

$$[k J'_\nu(k) + (\mu k^2 - \nu) J_\nu(k)] A + [k N'_\nu(k) + (\mu k^2 - \nu) N_\nu(k)] B = 0 \quad (2.2.12)$$

が得られるが、Bessel, Neumann 関数の微分公式

$$J'_\nu(z) = (\nu/z) J_\nu(z) - J_{\nu+1}(z), \quad N'_\nu(z) = (\nu/z) N_\nu(z) - N_{\nu+1}(z) \quad (2.2.13)$$

を用いると (2.2.12) 式は

$$[J_{\nu+1}(k) - \mu k J_\nu(k)] A + [N_{\nu+1}(k) - \mu k N_\nu(k)] B = 0 \quad (2.2.14)$$

と書き換えられる。これを踏まえて固有関数を

$$E_\nu(r, k) \equiv \frac{1}{r^\nu} \left[ (N_{\nu+1}(k) - \mu k N_\nu(k)) J_\nu(kr) - (J_{\nu+1}(k) - \mu k J_\nu(k)) N_\nu(kr) \right] \quad (2.2.15)$$

と定義しておく。この固有関数が (2.2.3) 式の境界条件を満たしていることは言うまでもない。

### 2.2.2 固有関数の直交性とその規格化

つぎにこの固有関数を規格化するために、前回の論文のときと同じように、2個の固有関数  $E_\nu(r, k)$ ,  $E_\nu(r, k')$  が満たす (2.2.8) 式の形の方方程式を書いておき、これらの式、それぞれに  $E_\nu(r, k')$ ,  $E_\nu(r, k)$  を掛けて辺々を引き算し、全体に  $r^{2\nu+1}$  を掛けると、

$$\frac{d}{dr} \left[ r^{2\nu+1} \left( E_\nu(r, k') \frac{d}{dr} E_\nu(r, k) - E_\nu(r, k) \frac{d}{dr} E_\nu(r, k') \right) \right] + (k^2 - k'^2) E_\nu(r, k) E_\nu(r, k') r^{2\nu+1} = 0 \quad (2.2.16)$$

を得る．ここで、固有関数  $E_\nu(r, k)$  を  $r$  で微分してから符号を変えたものを

$$F_\nu(r, k) \equiv -\frac{d}{dr} E_\nu(r, k) = \frac{k}{r^\nu} \left[ (N_{\nu+1}(k) - \mu k N_\nu(k)) J_{\nu+1}(kr) - (J_{\nu+1}(k) - \mu k J_\nu(k)) N_{\nu+1}(kr) \right] \quad (2.2.17)$$

と定義しておく (2.2.16) 式は

$$-\frac{d}{dr} \left[ r^{2\nu+1} (E_\nu(r, k') F_\nu(r, k) - E_\nu(r, k) F_\nu(r, k')) \right] + (k^2 - k'^2) E_\nu(r, k) E_\nu(r, k') r^{2\nu+1} = 0 \quad (2.2.18)$$

となる．これを  $r$  で 1 から  $\infty$  まで積分すると

$$\int_1^\infty E_\nu(r, k) E_\nu(r, k') r^{2\nu+1} dr = \frac{1}{k^2 - k'^2} \left[ r^{2\nu+1} (E_\nu(r, k') F_\nu(r, k) - E_\nu(r, k) F_\nu(r, k')) \right] \Big|_{r=1}^\infty \quad (2.2.19)$$

を得る．この式の右辺を見積もるため、初めに、 $r = 1$  とし、Bessel, Neumann 関数に関する Lommel の公式

$$J_\nu(z) N_{\nu+1}(z) - J_{\nu+1}(z) N_\nu(z) = -\frac{2}{\pi z} \quad (2.2.20)$$

を用いると、(2.2.15) (2.2.17) の定義式から、

$$\begin{aligned} E_\nu(1, k) &= J_\nu(k) N_{\nu+1}(k) - J_{\nu+1}(k) N_\nu(k) = -\frac{2}{\pi k} \\ F_\nu(1, k) &= \mu k^2 [J_\nu(k) N_{\nu+1}(k) - J_{\nu+1}(k) N_\nu(k)] = -\frac{2\mu}{\pi} k \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

となるので、(2.2.19) 式右辺で  $r = 1$  としたときは、

$$\frac{1}{k^2 - k'^2} \left[ r^{2\nu+1} (E_\nu(r, k') F_\nu(r, k) - E_\nu(r, k) F_\nu(r, k')) \right] \Big|_{r=1} = \frac{4\mu}{\pi^2 k k'} \quad (2.2.22)$$

となる．つぎに、 $r \rightarrow \infty$  の見積もりをするため、Bessel, Neumann 関数の  $z \rightarrow \infty$  の漸近形

$$J_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right), \quad N_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right) \quad (2.2.23)$$

を用いると、十分大きな  $r$  を  $M$  と書くことにして、(2.2.15) (2.2.17) 式の  $E_\nu(r, k)$ ,  $F_\nu(r, k)$  は

$$\begin{aligned} E_\nu(M, k) &= \frac{M^{-\nu}}{\sqrt{\pi k M}} \left[ (G_{\nu(+)}(k) \cos(\pi\nu/2) + G_{\nu(-)}(k) \sin(\pi\nu/2)) \cos(kM) \right. \\ &\quad \left. + (G_{\nu(+)}(k) \sin(\pi\nu/2) - G_{\nu(-)}(k) \cos(\pi\nu/2)) \sin(kM) \right] \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

$$\begin{aligned} F_\nu(M, k) &= \frac{\sqrt{k} M^{-\nu}}{\sqrt{\pi M}} \left[ (G_{\nu(+)}(k) \cos(\pi\nu/2) + G_{\nu(-)}(k) \sin(\pi\nu/2)) \sin(kM) \right. \\ &\quad \left. - (G_{\nu(+)}(k) \sin(\pi\nu/2) - G_{\nu(-)}(k) \cos(\pi\nu/2)) \cos(kM) \right] \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

となる．ここに、

$$G_{\nu(\pm)}(k) \equiv [J_{\nu+1}(k) - \mu k J_\nu(k)] \pm [N_{\nu+1}(k) - \mu k N_\nu(k)] \quad (2.2.26)$$

と定義した. この (2.2.24) (2.2.25) 式を (2.2.19) 式右辺の  $r \rightarrow \infty$  の項に代入し, 三角関数の積和公式を用いてから, デルタ関数に関する超関数公式

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\sin(Mx)}{\pi x} = \delta(x), \quad \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\cos(Mx)}{\pi x} = 0 \quad (2.2.27)$$

を用いると, 結果として  $\delta(k - k')$ ,  $\delta(k + k')$  に比例する項になる. ここでは  $k, k' > 0$  と考えているので,  $\delta(k + k')$  の項は不必要であり, 最終結果として,

$$\frac{1}{k^2 - k'^2} \left[ r^{2\nu+1} (E_\nu(r, k') F_\nu(r, k) - E_\nu(r, k) F_\nu(r, k')) \right] \Big|_{r \rightarrow \infty} = C_\nu^2(k) \delta(k - k') \quad (2.2.28)$$

を得る. ここに, 規格化定数  $C_\nu^2(k)$  を

$$C_\nu^2(k) \equiv \frac{1}{2k} [G_{\nu(+)}^2(k) + G_{\nu(-)}^2(k)] \quad (2.2.29)$$

と定義した. したがって, (2.2.19) 式の結果はこの (2.2.28) 式から (2.2.22) 式の分を差し引いて,

$$\int_1^\infty E_\nu(r, k) E_\nu(r, k') r^{2\nu+1} dr = -\frac{4\mu}{\pi^2 k k'} + C_\nu^2(k) \delta(k - k') \quad (2.2.30)$$

となる. これは固有関数の直交性の式としては右辺の 1 項目が余計である. ここでは,  $n$  次元物体と錘とが一体となった系を考えているのでこの積分には重み関数が必要になる. 初めの部分で説明したように, この錘も  $r$  の範囲 ( $r \geq 1$ ) の中に含めるために, 錘は内半径 1, 外半径  $1 + \varepsilon$  の球殻状のものと考えた. ただし,  $\varepsilon$  は無限小量とする. この仮定のもとに重み関数を

$$\rho_\varepsilon(r) = 1 + \mu \frac{\theta(1 + \varepsilon - r)}{\varepsilon} \quad (2.2.31)$$

と定義し, 積分 (2.2.30) 式を重み付き積分に変更すると, ちょうど (2.2.30) 式の右辺 1 項目が相殺され,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_1^\infty \rho_\varepsilon(r) E_\nu(r, k) E_\nu(r, k') r^{2\nu+1} dr = C_\nu^2(k) \delta(k - k') \quad (2.2.32)$$

が導かれる. これが固有関数の直交性を示す式となる. なお, (2.2.29) 式で定義された規格化定数  $C_\nu^2(k)$  は, 元の Bessel, Neumann 関数で表わすと

$$C_\nu^2(k) = \frac{1}{k} [(J_{\nu+1}(k) - \mu k J_\nu(k))^2 + (N_{\nu+1}(k) - \mu k N_\nu(k))^2] \quad (2.2.33)$$

となる.

### 2.2.3 最終的な解の構成

これまでの固有関数は境界条件 (2.2.3) (2.2.4) 式を満たしている. そこで最終的な変位を求めるには初期条件を満たすように解を構成しなければならない. ここで, 変位  $U(r, t)$  を展開係数  $K(k)$  を用いて固有関数  $E_\nu(r, k)$  で展開し,

$$U(r, t) = \int_0^\infty K(k) E_\nu(r, k) \sin(kt) dk \quad (2.2.34)$$

とおく. この式はすでに初期条件の (2.2.5) 式を満足するので, あとは初期条件の (2.2.6) 式を満足させるとよい. この条件を適用すると,

$$\int_0^\infty k K(k) E_\nu(r, k) dk = v_0 \theta(1 + \varepsilon - r) \quad (2.2.35)$$

となる. 両辺に  $\rho_\varepsilon(r) E_\nu(r, k') r^{2\nu+1}$  を掛けて,  $r$  積分をすると, 固有関数の直交性 (2.2.32) 式が使え, 係数  $K(k)$  が

$$K(k) = -\frac{2\mu v_0}{\pi k^2 C_\nu^2(k)} \quad (2.2.36)$$

と決まる. これを (2.2.34) 式に戻すと最終的な変位の解が

$$U(r, t) = -\frac{2\mu v_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{E_\nu(r, k)}{k^2 C_\nu^2(k)} \sin(kt) dk \quad (2.2.37)$$

と求められる.

## 2.3 $\nu$ の値の特別な場合

一般  $n$  次元の衝撃問題の解が (2.2.37) 式で求めたわけだが, この式からはどのような振舞いをする解なのかまったく見えてこない. そこで,  $\nu$  が特別な値のときの解の様子を調べてみよう. 半整数次の Bessel, Neumann 関数は, つぎの例のように,

$$\begin{aligned} J_{1/2}(z) &= N_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z, & J_{-1/2}(z) &= -N_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z, \\ J_{3/2}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left( \frac{\sin z}{z} - \cos z \right), & N_{3/2}(z) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left( \sin z + \frac{\cos z}{z} \right) \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

と初等関数で表わされる. これを用いて  $\nu = \mp 1/2$  の場合のより具体的な解を求めてみよう.

### 2.3.1 $\nu = -1/2$ の場合

初めに,  $\nu = -1/2$  の場合についてより具体化された解を求める. この場合は,  $n = 1$  に相当し, 半無限の長さを持つ 1 次元弾性棒の衝撃問題になる. (2.3.1) 式を用いて (2.2.15), (2.2.33) 式で定義された  $E_{-1/2}(r, k)$ ,  $C_{-1/2}^2(k)$  を求めると,

$$E_{-1/2}(r, k) = \frac{2}{\pi k} [\mu k \sin(k(r-1)) - \cos(k(r-1))] \quad (2.3.2)$$

$$C_{-1/2}^2(k) = \frac{2}{\pi k^2} (1 + \mu^2 k^2) \quad (2.3.3)$$

となる. これらを (2.2.37) 式に代入すると

$$U(r, t) = -\frac{2\mu v_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\mu k \sin(k(r-1)) - \cos(k(r-1))}{k(1 + \mu^2 k^2)} \sin(kt) dk \quad (2.3.4)$$

となる. ここで被積分関数は  $k$  の偶関数なので, 積分範囲  $(0, \infty)$  を  $(-\infty, \infty)$  とし, 全体を 2 で割る. このあと三角関数の積和公式で  $\sin(k(t \mp r \pm 1))$ ,  $\cos(k(t \mp r \pm 1))$  の項とし, さらに Euler 公式で指数関数にしてから複素積分に持ち込み, 極  $k = \pm i/\mu$  の留数を求める. この方法は, 扱う関数は異なるが, 前回の論文の 3 次元衝撃問題で述べた方法とほぼ同じなのでここでは詳しくは述べない. また,  $k = 0$  の極に関しては積分の主値をとる. 結果は前回の論文に記したものと同じく,

$$U(r, t) = \mu v_0 [1 - e^{-(t-r+1)/\mu}] \theta(t-r+1) \quad (2.3.5)$$

となる. この式の大括弧中の 1 項目が  $k = 0$  の主値からでる項である.

### 2.3.2 $\nu = 1/2$ の場合

$\nu = 1/2$  の場合は,  $n = 3$  となり, これは前回の論文で議論した 3 次元モデルである. この場合の  $E_{1/2}(r, k)$ ,  $C_{1/2}^2(k)$  は

$$E_{1/2}(r, k) = \frac{2}{\pi k^2 r} [(\mu k^2 - 1) \sin(k(r-1)) - k \cos(k(r-1))] \quad (2.3.6)$$

$$C_{1/2}^2(k) = \frac{2}{\pi k^4} [k^2 + (\mu k^2 - 1)^2] \quad (2.3.7)$$

となる. これを (2.2.37) 式に代入すると

$$U(r, t) = -\frac{2\mu v_0}{\pi} \frac{1}{r} \int_0^\infty \frac{(\mu k^2 - 1) \sin(k(r-1)) - k \cos(k(r-1))}{(\mu k^2 - 1)^2 + k^2} \sin(kt) dk \quad (2.3.8)$$

となるが, これも前回の論文に記した結果と同じで, この積分結果は, 記号

$$\lambda_{(\pm)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\mu}}{2\mu} \quad (2.3.9)$$

を用いて

$$U(r, t) = \frac{\mu v_0}{\sqrt{1 - 4\mu}} \frac{1}{r} [e^{\lambda_{(+)}(t-r+1)} - e^{\lambda_{(-)}(t-r+1)}] \theta(t - r + 1) \quad (2.3.10)$$

となる.

$\nu$  の値が半整数のときは, 解がこのように初等関数で表わされるので, 原理的にはこの方法でより具体的な形にすることができるはずであるが, 現実には計算が非常に面倒になる. 次回の論文で  $\nu = 3/2$ ,  $n = 5$  の場合の変位解について述べるが, このあたりが事実上の限界となる.

### 2.3.3 残留変位について

空間 1 次元の場合の解 (2.3.5) 式からは時間  $t$  が十分大きくなったときの変位  $U$  は一定値  $\mu v_0$  になることがわかる. すなわちこの場合は一度衝撃が加えられると元には戻らない残留変位が存在する. しかし, 空間 3 次元の場合の解 (2.3.10) 式からは  $t$  が十分大きくなったときの変位はゼロとなり, 衝撃が与えられても十分時間がたつと元の位置に戻ることがわかる. このことをもう少し一般的に調べてみよう.

前節で得られた解 (2.2.37) 式で時間  $t$  が十分大きくなったとき変位  $U(r, t)$  は, 超関数公式 (2.2.27) 式を用いると  $\delta(k)$  がでるので  $k$  積分が実行され,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(r, t) = -\mu v_0 \lim_{k \rightarrow 0} \frac{E_\nu(r, k)}{k C_\nu^2(k)} \quad (2.3.11)$$

となる. ただし, 積分範囲に含まれるのは  $\delta(k)$  のうち, 正の側の半分だけなので, 全体を 2 で割ることにした. Bessel 関数  $J_\nu(z)$  の  $z \rightarrow 0$  における主要項は係数を除いて  $J_\nu(z) \approx z^\nu$  であり, Neumann 関数  $N_\nu(z)$  は  $N_\nu(z) \approx z^{-\nu}$  としてよく, これで見積もると  $\nu > -1/2$  のとき  $t \rightarrow \infty$  の極限值はゼロとなる. すなわち, 残留変位が存在するのは  $\nu = -1/2$  の 1 次元モデルの場合に限定されることがわかる.

## 2.4 固有関数の完全性について

一般次元のときの固有関数の完全性の式は, 直交性の (2.2.32) 式から予想される

$$\int_0^\infty \frac{E_\nu(r, k) E_\nu(r', k)}{C_\nu^2(k)} dk = \frac{\delta(r - r')}{r^{2\nu+1}} \quad \text{or} \quad \int_0^\infty \frac{r^{\nu+\frac{1}{2}} E_\nu(r, k) r'^{\nu+\frac{1}{2}} E_\nu(r', k)}{C_\nu^2(k)} dk = \delta(r - r') \quad (2.4.1)$$

になるものと思われる. 一般の  $\nu$  についてこの式を証明することは難しいが, 前節で扱ったように  $\nu = -1/2, 1/2$  の場合は確かにこの式が成立することが確かめられる.

### 2.4.1 $\nu = -1/2$ の場合

以下では、数式簡略化のため、 $r-1$ ,  $r'-1$  を、それぞれ、 $x$ ,  $x'$  と書くことにする。これらは正の量である。(2.3.2) (2.3.3) 式の  $E_{-1/2}(r, k)$ ,  $C_{-1/2}^2(k)$  を (2.4.1) 式に代入すると

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{[\mu k \sin(kx) - \cos(kx)][\mu k \sin(kx') - \cos(kx')]}{1 + \mu^2 k^2} dk = \delta(x - x') \quad (2.4.2)$$

となり、これが証明すべき式である。分子の括弧をはずし、三角関数の積和公式を用いて整理し直すと、

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ \cos(k(x-x')) + \frac{(1 - \mu^2 k^2) \cos(k(x+x')) - 2\mu k \sin(k(x+x'))}{1 + \mu^2 k^2} \right] dk = \delta(x - x') \quad (2.4.3)$$

となる。この式の1項目は簡単に積分でき、超関数公式 (2.2.27) を用いると、ちょうど右辺の  $\delta(x-x')$  が出てくるので、残りの積分

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1 - \mu^2 k^2) \cos(k(x+x')) - 2\mu k \sin(k(x+x'))}{1 + \mu^2 k^2} dk \quad (2.4.4)$$

がゼロとなることを示すとよい。被積分関数は  $k$  の偶関数なので、積分範囲を  $(-\infty, \infty)$  と広げて全体を2で割り、さらに三角関数の Euler 公式を用いて指数関数に直してから、分母分子を因数分解して整理しなおすと、

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty \left[ \frac{1 + i\mu k}{1 - i\mu k} e^{ik(x+x')} + \frac{1 - i\mu k}{1 + i\mu k} e^{-ik(x+x')} \right] dk \quad (2.4.5)$$

となる。ここで、 $k$  積分を複素積分に拡張し、

$$\frac{1}{4\pi} \left[ \oint_{C_+} \frac{1 + i\mu k}{1 - i\mu k} e^{ik(x+x')} dk + \oint_{C_-} \frac{1 - i\mu k}{1 + i\mu k} e^{-ik(x+x')} dk \right] \quad (2.4.6)$$

とする。ここに、積分路  $C_+$  は実軸上を  $-\infty$  から  $\infty$  まで積分したあと、半径無限大の上半円を周る閉じた積分路、 $C_-$  は同じく実軸上を積分してから半径無限大の下半円を周る積分路である。ところが、この式1項目の極の位置、 $k = -i/\mu$  は下半面にあり、上半面にはないので、積分値はゼロとなる。同じく、2項目については、極の位置  $k = i/\mu$  は上半面にあり、下半面にはないので積分値はゼロとなる。以上で、(2.4.4) 式の値はゼロとなるので、(2.4.2) 式が証明されたことになる。

### 2.4.2 $\nu = 1/2$ の場合

(2.3.6) (2.3.7) 式の  $E_{1/2}(r, k)$ ,  $C_{1/2}^2(k)$  を (2.4.1) 式に代入すると、前と同じく  $r-1$ ,  $r'-1$  を  $x$ ,  $x'$  と置くことにして、

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{[(\mu k^2 - 1) \sin(kx) - k \cos(kx)][(\mu k^2 - 1) \sin(kx') - k \cos(kx')]}{(\mu k^2 - 1)^2 + k^2} dk = \delta(x - x') \quad (2.4.7)$$

となる。あとは、 $\nu = -1/2$  の場合と同じ方法にしたがう。分子の括弧をはずし、三角関数の積和公式を使うと、この式の左辺は、

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ \cos(k(x-x')) - \frac{[(\mu k^2 - 1)^2 - k^2] \cos(k(x+x')) + 2k(\mu k^2 - 1) \sin(k(x+x'))}{(\mu k^2 - 1)^2 + k^2} \right] dk \quad (2.4.8)$$

となり、この式1項目の積分が (2.4.7) 式右辺の  $\delta(x-x')$  となるので、残りの積分

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{[(\mu k^2 - 1)^2 - k^2] \cos(k(x+x')) + 2k(\mu k^2 - 1) \sin(k(x+x'))}{(\mu k^2 - 1)^2 + k^2} dk \quad (2.4.9)$$

がゼロになるとよい. 前と同じ方法でこれを複素積分にすると

$$-\frac{1}{4\pi} \left[ \oint_{C_+} \frac{\mu k^2 - 1 - ik}{\mu k^2 - 1 + ik} e^{ik(x+x')} dk + \oint_{C_-} \frac{\mu k^2 - 1 + ik}{\mu k^2 - 1 - ik} e^{-ik(x+x')} dk \right] \quad (2.4.10)$$

となる. この1項目の積分における極の位置は, (2.3.9) 式の  $\lambda_{(\pm)}$  を用いて,  $k = \lambda_{(\pm)}i$  となり, これはいずれも下半面にあり, したがって積分値はゼロとなる. また, 2項目の極の位置は  $k = -\lambda_{(\pm)}i$  となり, これはいずれも上半面に存在するので, 積分値は同じくゼロとなる. したがって, (2.4.7) 式が成立する.

ここで述べたように,  $\nu = -1/2, 1/2$  の場合は比較的容易に固有関数の完全性が示される. この方法を踏襲すれば,  $\nu$  が他の半整数の場合にも拡張されるであろうが, 計算は次数が大きくなるにつれ急激に面倒になる. ましてや, 非半整数の任意の  $\nu$  についてこれを証明することは至難の業と言わざるを得ない. しかし, ここでは, 任意の  $\nu$  についてこの完全性の式が成り立つものと予測しよう.

ここで, この完全性の式を用いて任意関数の変換式を作ることには少し問題がある. まず, この (2.4.1) 式の両辺に  $\rho_\varepsilon(r)E_\nu(r, k')r^{2\nu+1}$  を掛け,  $r$  で積分し, 固有関数の直交性 (2.2.32) 式を用いると

$$E_\nu(r', k') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_\varepsilon(r')E_\nu(r', k') \quad (2.4.11)$$

となって, 右辺に重み関数  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_\varepsilon(r')$  が余計に残ってしまう. これは  $E_\nu(r, k)$  が  $r = 1$  でゼロにならないためと考えられる. もしこれがゼロとなるものであればまったく問題は起きない. そこで, この完全性の式を用いて変換する関数につきのような制限をもうけよう. すなわち,  $[1, \infty)$  で定義される任意の  $L^2$  関数  $f(r)$  であって, ただし,  $r = 1$  の近傍で連続, かつ  $f(1) = 0$  なる関数を考える. このときは,

$$f(r) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_\varepsilon(r)f(r) \quad (2.4.12)$$

が成り立つとしてよい. そこで, 完全性の式 (2.4.1) を用い, さらに  $k$  と  $r'$  の積分順序を入れ換えると,

$$\begin{aligned} f(r) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_1^\infty \delta(r - r') \rho_\varepsilon(r') f(r') dr' \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_1^\infty \left( \int_0^\infty \frac{r^{\nu+\frac{1}{2}} E_\nu(r, k) r'^{\nu+\frac{1}{2}} E_\nu(r', k)}{C_\nu^2(k)} dk \right) \rho_\varepsilon(r') f(r') dr' \\ &= \int_0^\infty \frac{r^{\nu+\frac{1}{2}} E_\nu(r, k)}{C_\nu(k)} \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_1^\infty \rho_\varepsilon(r') \frac{r'^{\nu+\frac{1}{2}} E_\nu(r', k)}{C_\nu(k)} f(r') dr' \right) dk \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

と書ける. ここで,

$$g(k) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_1^\infty \rho_\varepsilon(r) \frac{r^{\nu+\frac{1}{2}} E_\nu(r, k)}{C_\nu(k)} f(r) dr \quad (2.4.14)$$

と定義すると, この式は

$$f(r) = \int_0^\infty \frac{r^{\nu+\frac{1}{2}} E_\nu(r, k)}{C_\nu(k)} g(k) dk \quad (2.4.15)$$

と書き直される. この (2.4.14) 式が関数  $f(r)$  を変換して関数  $g(k)$  を作る式, 逆に (2.4.15) 式が変換された関数  $g(k)$  から元の関数  $f(r)$  を作る式となる. また, この (2.4.14) (2.4.15) 式は  $g(k)$  を与えられた関数,  $f(r)$  をそれから変換された関数とみなすこともできる. そのときは, (2.4.15) 式の  $f(r)$  を (2.4.14) 式に代入し, 積分順序を換えてから固有関数の直交性 (2.2.32) 式を用いると元の関数  $g(k)$  に戻ることが証明される.

## 2.5 変位解のさらなる改良について

次元パラメータ  $\nu$  の値が  $-1/2, 1/2$  のような特別なときは, 変位解 (2.2.37) 式の  $k$  積分を複素積分にすることで実行可能であることを示してきた. 一般の  $\nu$  に対してもこの方法は可能であるかを探ってみよう. 解

(2.2.37) 式は, (2.2.15), (2.2.33) 式の  $E_\nu(r, k)$ ,  $C_\nu^2(k)$  を代入して書き下すと,

$$U(r, t) = -\frac{2\mu v_0}{\pi} \frac{1}{r^\nu} \int_0^\infty \frac{[(N_{\nu+1}(k) - \mu k N_\nu(k))J_\nu(kr) - (J_{\nu+1}(k) - \mu k J_\nu(k))N_\nu(kr)] \sin(kt)}{[(J_{\nu+1}(k) - \mu k J_\nu(k))^2 + (N_{\nu+1}(k) - \mu k N_\nu(k))^2]k} dk \quad (2.5.1)$$

となる. この式の分母を複素数を用いて因数分解し, Hankel 関数<sup>5</sup>

$$H_\nu^{(\pm)}(z) = J_\nu(z) \pm iN_\nu(z) \quad (2.5.2)$$

を使ってこれを書き直すと

$$U(r, t) = \frac{\mu v_0}{\pi i} \frac{1}{r^\nu} \int_0^\infty \left[ \frac{H_\nu^{(+)}(kr)}{H_{\nu+1}^{(+)}(k) - \mu k H_\nu^{(+)}(k)} - \frac{H_\nu^{(-)}(kr)}{H_{\nu+1}^{(-)}(k) - \mu k H_\nu^{(-)}(k)} \right] \frac{\sin(kt)}{k} dk \quad (2.5.3)$$

と少し次数が下がった式になる. ここで, Hankel 関数に関する偶奇性

$$H_\nu^{(\pm)}(-z) = -e^{\mp \nu \pi i} H_\nu^{(\mp)}(z) \quad (2.5.4)$$

を用いると, この式の被積分関数は  $k$  の偶関数になる. つまり, 大括弧中の 1 項目で  $k$  の符号を変えたものが 2 項目になり, 2 項目で  $k$  の符号を変えたものが 1 項目になる. したがって, 積分範囲を  $(-\infty, \infty)$  にして 2 で割ると,

$$U(r, t) = \frac{\mu v_0}{2\pi i} \frac{1}{r^\nu} \int_{-\infty}^\infty \left[ \frac{H_\nu^{(+)}(kr)}{H_{\nu+1}^{(+)}(k) - \mu k H_\nu^{(+)}(k)} - \frac{H_\nu^{(-)}(kr)}{H_{\nu+1}^{(-)}(k) - \mu k H_\nu^{(-)}(k)} \right] \frac{\sin(kt)}{k} dk \quad (2.5.5)$$

とできる. また, この大括弧中の 2 項目は 1 項目の複素共役の符号をかえたものになっているので,

$$U(r, t) = \frac{\mu v_0}{\pi} \frac{1}{r^\nu} \Im \left( \int_{-\infty}^\infty \frac{H_\nu^{(+)}(kr)}{H_{\nu+1}^{(+)}(k) - \mu k H_\nu^{(+)}(k)} \frac{\sin(kt)}{k} dk \right) \quad (2.5.6)$$

と書いてもよいだろう. ここに  $\Im$  は虚数部をとることを意味する. さらに, sine 関数のところを Euler の公式で指数関数に直すと,

$$U(r, t) = -\frac{\mu v_0}{2\pi} \frac{1}{r^\nu} \Re \left( \int_{-\infty}^\infty \frac{H_\nu^{(+)}(kr)(e^{ikt} - e^{-ikt})}{[H_{\nu+1}^{(+)}(k) - \mu k H_\nu^{(+)}(k)]k} dk \right) \quad (2.5.7)$$

となる. ここで,  $\Re$  は実部をとることを意味する.

ここで,  $\nu = -1/2, 1/2$  の場合を確かめてみよう. 半整数次の Hankel 関数

$$H_{-1/2}^{(+)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{iz}, \quad H_{1/2}^{(+)}(z) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{iz}, \quad H_{3/2}^{(+)}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(1 + \frac{i}{z}\right) e^{iz} \quad (2.5.8)$$

を使って, まず,  $\nu = -1/2$  の場合は

$$U(r, t) = \frac{\mu v_0}{2\pi} \Re \left( \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ik(t+r-1)} - e^{-ik(t-r+1)}}{k(\mu k + i)} dk \right) \quad (2.5.9)$$

となり, この積分を複素積分に拡張し,  $k = 0$  の極に関しては主値をとり,  $k = -i/\mu$  の極における留数を拾うと,  $t - r + 1 > 0$  の場合だけが生き残り, 結果は

$$U(r, t) = \mu v_0 [1 - e^{-(t-r+1)/\mu}] \theta(t - r + 1) \quad (2.5.10)$$

<sup>5</sup>この関数は通常は  $H_\nu^{(1)}(z)$ ,  $H_\nu^{(2)}(z)$  と書かれるが, ここでは記法の便利さからこれらを  $H_\nu^{(+)}(z)$ ,  $H_\nu^{(-)}(z)$  と書くことにする.

となって, (2.3.5) 式と一致する. また,  $\nu = 1/2$  の場合は,

$$U(r, t) = \frac{\mu v_0}{2\pi} \frac{1}{r} \Re \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(t+r-1)} - e^{-ik(t-r+1)}}{\mu k^2 + ik - 1} dk \right) \quad (2.5.11)$$

となり, これを複素積分にして実行すると, (2.3.9) 式の  $\lambda_{(\pm)}$  を用いて,

$$U(r, t) = \frac{\mu v_0}{\sqrt{1-4\mu}} \frac{1}{r} [e^{\lambda_{(+)}(t-r+1)} - e^{\lambda_{(-)}(t-r+1)}] \theta(t-r+1) \quad (2.5.12)$$

を得る. これは (2.3.10) 式の解と一致する.

ここで一般の  $\nu$  の場合に戻って, Hankel 関数の  $z \rightarrow \infty$  での漸近形

$$H_{\nu}^{(+)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi)} \quad (2.5.13)$$

を利用して, (2.5.7) 式の被積分関数の  $k \rightarrow \infty$  での値を見積もると

$$\frac{H_{\nu}^{(+)}(kr)(e^{ikt} - e^{-ikt})}{[H_{\nu+1}^{(+)}(k) - \mu k H_{\nu}^{(+)}(k)]k} \approx -\frac{1}{\sqrt{r}} \frac{e^{ik(t+r-1)} - e^{-ik(t-r+1)}}{k(\mu k + i)} \quad (2.5.14)$$

となる. このことを参考にして, これから先は希望的観測を述べる. (2.5.7) 式を

$$U(r, t) = -\frac{\mu v_0}{2\pi} \frac{1}{r^{\nu}} \Re \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_{\nu}^{(+)}(kr)e^{ikt}}{[H_{\nu+1}^{(+)}(k) - \mu k H_{\nu}^{(+)}(k)]k} dk - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_{\nu}^{(+)}(kr)e^{-ikt}}{[H_{\nu+1}^{(+)}(k) - \mu k H_{\nu}^{(+)}(k)]k} dk \right) \quad (2.5.15)$$

と分解したとき, この式1項目の被積分関数は  $k$  が十分大きいところで因子  $e^{ik(t+r-1)}$  を含むので,  $t > 0, r > 1$  では  $k$  が複素上半面で大きくなると指数関数的にゼロとなり, 半径無限大の上半円を積分路として付け加え閉じたものとするができる. ここで, この被積分関数が上半面に極を持たないことが正しいものとするこの積分値はゼロになる. さらに残った積分を

$$U(r, t) = \frac{\mu v_0}{2\pi} \frac{1}{r^{\nu}} \Re \left( \theta(-t+r-1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_{\nu}^{(+)}(kr)e^{-ikt}}{[H_{\nu+1}^{(+)}(k) - \mu k H_{\nu}^{(+)}(k)]k} dk + \theta(t-r+1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_{\nu}^{(+)}(kr)e^{-ikt}}{[H_{\nu+1}^{(+)}(k) - \mu k H_{\nu}^{(+)}(k)]k} dk \right) \quad (2.5.16)$$

と分解したとき, この式1項目の被積分関数は  $k$  が十分大きいところで因子  $e^{-ik(t-r+1)}$  を含むので,  $t-r+1 < 0$  では  $k$  が複素上半面で大きくなるとゼロとなり, (2.5.15) 式1項目のときと同じく積分値はゼロとなる. これで, 波動が伝播していない領域  $t-r+1 < 0$  では当然のことながら変位  $U(r, t)$  がゼロとなることが言える. このことは因果律の要請と言ってもよいだろう.

最後に残った積分は  $k$  が十分大きいところで因子  $e^{-ik(t-r+1)}$  を含むので  $t-r+1 > 0$  の領域では,  $k$  が複素下半面で十分大きいとき指数関数的にゼロとなる. そこで半径無限大の下半円を積分路として付け加えることで,

$$U(r, t) = \frac{\mu v_0}{2\pi} \frac{1}{r^{\nu}} \Re \left( \oint_{C_-} \frac{H_{\nu}^{(+)}(kr)e^{-ikt}}{[H_{\nu+1}^{(+)}(k) - \mu k H_{\nu}^{(+)}(k)]k} dk \right) \theta(t-r+1) \quad (2.5.17)$$

となる. ここに積分路  $C_-$  は実軸上を  $-\infty$  から  $\infty$  まで積分したあと半径無限大の下半円に沿った閉積分路であり, この積分は下半面にある極の留数を拾うことで実行される. ただし, 一般の  $\nu$  に対する Hankel 関数は対数関数も含むので極だけでなく分岐点や切断線等も含まれるはずで, ここで扱う複素積分は, 一般にはかなり複雑なものとなるはずである. あるいは, この (2.5.17) 式が成立するのは  $\nu$  が半整数の場合に限定されるのかもしれない. しかし, 現状ではこれ以上の知識を持ち合わせていないので, この議論はしないことにする.

次回の論文ではこの式を用いて  $\nu = 3/2, n = 5$  の場合の具体的解を求める.

# Random Frequency Modulation

## —劣等生のための Motional Narrowing の解説—

森本安夫<sup>6</sup>

Yasuo MORIMOTO<sup>7</sup>

### 3.1 はじめに

MotionalあるいはExchange Narrowing（運動による先鋭化）は共鳴現象をやる人にとっては常識的な事実である。多分余りにも常識的過ぎて丁寧な説明はなされていないのが普通である。そのおかげかこれをきちんと説明した文書があまり世に出回っていない。もちろん、原論文を探し出してきて読めばよいのだが、これがなかなか難解である。何か適当な教科書がないものかと探し回っていたら、絶好の教科書が見つかった。それは

戸田盛和，久保亮五編：統計物理学（岩波講座 現代物理学の基礎6）（岩波書店，1972）

である。

この書の5,6章がそれである。著者は久保亮五先生である。すべてが書いてあるのでそれを読めばよい。しかし、こう言うのは恐れ多いのだが話があちこち飛んで初心者には分かり難い。久保先生はすべてをそらんじられておられたであろうから、先生自身には何の問題もなかったのであろうが、素人としては最初はそのところを解説するのに往生した。そこでこの件について自分の知識を整理し直す意味でまとめてみることにした。あえて“劣等生の”と銘打ったのは自分にも分るようにしたいとの意である。

### 3.2 Random Frequency Modulation とは

振動子の運動方程式， $\frac{dx(t)}{dt} = i\omega(t)x(t)$  を考えよう。  $\omega(t) = \omega_0 + \omega_1(t)$  で  $\omega_0$  は中心周波数。  $\omega_1(t)$  はランダムに揺らいでいる周波数である。数学的には確率過程と称される。これに外部から電磁波を加えると  $\omega_0$  の共鳴吸収が起こる。問題は線幅であるが、それは当然  $\omega_1(t)$  によって決定される。

この運動方程式の形式的な解は  $x(t) = x_0 \exp(i\omega_0 t) \exp\left(i \int^t \omega_1(t') dt'\right)$  であるが、欲しいのはその相関関数  $\langle x(t_1)x(t_2) \rangle$  である。

$$\langle x(t_1)^* x(t_2) \rangle \approx \langle x_0^* x_0 \exp[i\omega_0(t_2 - t_1)] \exp\left(i \int_{t_1}^{t_2} \omega_1(t') dt'\right) \rangle$$

<sup>6</sup> 明治鍼灸大学名誉教授

<sup>7</sup> yacchan999@gmail.com

一般的な確率過程を考えると複雑に過ぎるので定常な Gauss 過程の場合を考える。初期位置に関する相関には興味は無いので  $\langle x_0^* x_0 \rangle$  は定数とする。また定常なのでこれは  $t_2 - t_1$  の関数となる。また中心周波数にも興味はないので  $\omega_0 = 0$  としておく。記号を簡単にするため  $\omega_1(t)$  を  $\omega(t)$  と改める。これだけ簡略化すると結局求めたいのは次の量の値である。

$$\langle x(0)^* x(t) \rangle \approx \langle \exp\left(i \int_0^t \omega(t') dt'\right) \rangle \quad (3.2.1)$$

$\omega(t)$  に関する統計量は次の2個である。すなわちその平均値と相関関数である。

$$\langle \omega(t) \rangle = 0, \langle \omega(t_1) \omega(t_2) \rangle = \Delta^2 \phi(t_1 - t_2) \quad (3.2.2)$$

$\Delta$  は周波数変調の強度である。 $\phi(t)$  は  $\exp(-t/t_c)$  の形が仮定されることが多い。 $t_c$  は相関時間となる。

これが分れば後述の Wiener-Khinchin の定理

$$I(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int \langle x(0)x(t) \rangle \exp(-i\Omega t) dt$$

により強度スペクトルが得られる。問題は(2.1)をどう計算するかである。

### 3.3 言わでもながのこと

この節の内容は確率過程のどんな教科書にも書いてある良く知られているものであるが、話の都合上簡単に触れておく。

確率変数  $X$ , その確率分布密度,  $f(x)$  に対して特性関数,  $\Phi(s)$  を

$$\Phi(s) = \langle \exp(isx) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(isx) f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(is)^n}{n!} \langle x^n \rangle \quad (3.3.1)$$

と定義する。これに対してキュムラント関数,  $\Psi(s)$  を定義する。

$$\Psi(s) = \log \Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(is)^n}{n!} \langle x^n \rangle_c \quad (3.3.2)$$

ここで,  $\langle x^n \rangle, \langle x^n \rangle_c$  は  $n$  次のモーメント, およびキュムラントである。展開式を比べると次の関係があるのは説明の必要はあるまい。

$$\langle x \rangle_c = \langle x \rangle, \langle x^2 \rangle_c = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (3.3.3)$$

もちろん高次の関係はいくらでも導ける。必要なのは正規分布の場合で、その時は2次までのキュムラントしかない。それを示しておこう。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{なら} \quad \Phi(s) = \exp\left(i\mu s - \frac{\sigma^2}{2} s^2\right)$$

そうすると

$$\Psi(s) = \log \Phi(s) = i\mu s - \frac{\sigma^2}{2} s^2 \quad (3.3.4)$$

となりキュムラントは2次までの項だけとなる。これが Gauss 過程の有り難い点だ。この事情は多次元の場合でも変わらない。

### 3.4 Wiener-Khinchin の定理

定常確率過程,  $z(t)$  を

$$z(t) = \sum a_n \exp(i\omega_n t), \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T}n, \quad 0 < t < T$$

とフーリエ展開する.  $a_n$  については次の値をとる.

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T z(t) \exp(-i\omega_n t) dt$$

より

$$\langle a_n \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \langle z(t) \rangle \exp(-i\omega_n t) dt = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \text{ のとき} \\ \langle z(t) \rangle = m \text{ (平均値)} & n = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

この確率過程を周波数帯域が  $\omega \sim \omega + \Delta\omega$  のフィルターを通してスペクトル強度,  $I(\omega)\Delta\omega$  を測定する. それは次の通り.

$$f(\omega)\Delta\omega = \sum \langle |a_n|^2 \rangle \approx \frac{T}{2\pi} \langle |a_n|^2 \rangle \Delta\omega \quad (3.4.1)$$

ただし和は  $\Delta\omega$  中について行なう. モードの数は  $\frac{\Delta\omega}{2\pi/T} = \frac{T}{2\pi}\Delta\omega$  個となる. 従ってスペクトル強度を求めるには

$$\langle |a_n|^2 \rangle = \frac{1}{T^2} \int_0^T dt_1 \int_0^T dt_2 \langle z(t_1)z(t_2) \rangle \exp(-i\omega_n(t_1 - t_2)) \quad (3.4.2)$$

を計算すればよい. これは良く知られた積分であるが最終結論にも使うので確認しておこう.  $\langle z(t_1)z(t_2) \rangle$  は相関関数に対応する量である. 定常過程であるから  $t_1 - t_2$  の関数になる. 計算の記法を簡単にするためこれを  $\Phi(t_1 - t_2)$  としておこう. 積分は 0 から  $T$  の部分について行なわれるが, これを二つの領域に分けて行なう. 先ず  $t_1 - t_2 = t > 0$  の場合. 積分領域は図の下半分となる. 積分変数を  $(t_1, t_2)$  から  $(t, t_2)$  に変換する.

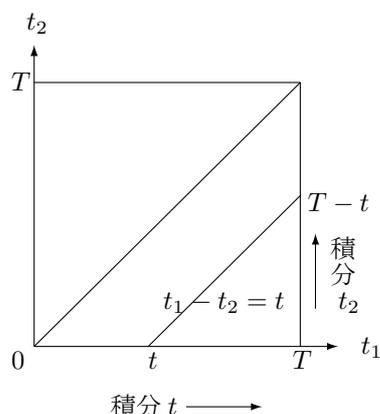


図 3.1: 積分領域の図,  $t_1 - t_2 = t > 0$  の場合

ヤコビアンは 1 なので積分は

$$\begin{aligned} \int_0^T dt_1 \int_0^T dt_2 \Phi(t_1 - t_2) \exp(-i\omega_n(t_1 - t_2)) &= \int_0^T dt \int_0^{T-t} dt_2 \Phi(t) \exp(-i\omega_n t) \\ &= \int_0^T (T-t) \Phi(t) \exp(-i\omega_n t) dt \end{aligned}$$

これで下半分は終わった。残りの上半分は  $t_2 - t_1 = t > 0$  として同じようにやればよい。結果は、

$$\begin{aligned} \int_0^T dt_1 \int_0^T dt_2 \Phi(t_1 - t_2) \exp(-i\omega_n(t_1 - t_2)) &= \int_0^T dt \int_0^{T-1} dt_2 \Phi(-t) \exp(i\omega_n t) \\ &= \int_0^T (T-t) \Phi(t) \exp(i\omega_n t) dt \end{aligned}$$

以上の結果を (4.2) に代入すると、

$$I(\omega) = \frac{T}{2\pi} \frac{1}{T^2} \left[ T \int_0^T [\Phi(t) \exp(-i\omega_n t) + \Phi(-t) \exp(i\omega_n t)] dt - \int_0^T [t\Phi(t) \exp(-i\omega_n t) + t\Phi(-t) \exp(i\omega_n t)] dt \right]$$

ここで  $T \rightarrow \infty$  の極限をとる。第2項は積分が収束する限り 0 となる。符号を適当に処理してやると次の最終結果を得る。

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (3.4.3)$$

なおここで  $\omega_n$  が  $\omega$  となっているのは  $\omega_n$  近傍の  $\omega$  ということである。これが Wiener-Khinchin の定理と呼ばれるものである。この積分を後に使うので少し詳しく書いておいた。

記号上の注意: 相関関数がアチコチ出てくるのでややこしいが (4.3) は次のよう意味にとって欲しい。

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle z(0)z(t) \rangle \exp(-i\omega t) dt \quad (3.4.4)$$

## 3.5 Gauss 過程のいろいろ

### 3.5.1 準備

$z(t)$  を Gauss 過程とする。そこから取り出した  $n$  個のデータ  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$  を考える。これらは Gauss 分布,  $W(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n)$  に従う。ただし  $z_j = z(t_j)$  の意味である。

$$W(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n) = C \exp \left[ \frac{1}{2} \sum_{j,k} a_{jk} (z_j - m_j)(z_k - m_k) \right] \quad (3.5.1)$$

ただし  $m_j = \langle z_j \rangle$  で各平均値である。サフィックスをつけてあるが実際にはそれにはよらない。また  $A = (a_{ij})$  とするとその逆行列は

$$(A^{-1})_{ij} = \langle (z_j - m_j)(z_k - m_k) \rangle = \phi(t_j, t_k) \quad (3.5.2)$$

となり  $z$  の相関係数になっている。この説明はなかなか面倒である。これについては次のサブセクションで述べる。

これより多次元の特性格関数を求める。ただし面倒を避けるためベクトル記号は省略する。文面から読み取っていただきたい。

$$\Phi(s) = \langle \exp(i \sum_j s_j z_j) \rangle = \int dz_1 \cdots \int dz_n W(z_1, \dots, z_n) \exp(i \sum_j s_j z_j) \quad (3.5.3)$$

(5.1) を用いると簡単に積分でき、下式のようになる。

$$\Phi(s) = \exp \left( i \sum_j s_j m_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k} (A^{-1})_{j,k} s_j s_k \right) = \exp \left( i s^T m - \frac{1}{2} s^T (A^{-1}) s \right) \quad (3.5.4)$$

と教科書には書いてあるのだが，これは一筋縄ではいかない．これについても次のサブセクションで述べる．(5.2) が言えれば (5.4) は次のように書ける．

$$\Phi(\mathbf{s}) = \exp \left( i \sum_j s_j m_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k} \phi(t_j, t_k) s_j s_k \right) \quad (3.5.5)$$

ここで  $s_j = s(t_j) \Delta t_j$  として和を積分におき替えてやると上式は

$$\Phi(\mathbf{s}(t)) = \langle \exp(i\mathbf{s}^T(t)z(t)) \rangle = \exp \left( i \int^t s(t') m(t') dt' - \frac{1}{2} \int^t dt_1 \int^t dt_2 \phi(t_1, t_2) s(t_1) s(t_2) \right) \quad (3.5.6)$$

ただし  $T$  はベクトルの転置を意味する．これがこの節で求めたい結果である．

### 3.5.2 ちょっとゴタゴタした話

5.1 節で説明を省いた所に返って見よう．(5.1) を用いて (5.4) の  $\exp$  の肩の指数を計算してみよう．次のようにベクトル表示を行なう． $T$  はもちろん転置のあることを示す (実はここいらが教科書では無視しており，非常に理解しづらい)．

$$-\frac{1}{2}(\mathbf{z} - \mathbf{m})^T A (\mathbf{z} - \mathbf{m}) + i\mathbf{s}^T \mathbf{z}$$

ここからがシビアである．先ず  $\mathbf{z} - \mathbf{m} = \mathbf{y} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$  とおく． $\mathbf{m}$  は平均値のベクトル． $\mathbf{y}$  を  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  で表すので任意性が残る．そこで

$$A\mathbf{v} = \mathbf{s}, \mathbf{v} = A^{-1}\mathbf{s}$$

となるように  $\mathbf{v}$  を決める (任意であるから)．そうすると少しグチャグチャと計算しなければならないが上の式は次のように変形される．

$$P \equiv -\frac{1}{2}\mathbf{y}^T A \mathbf{y} + i\mathbf{s}^T (\mathbf{y} + \mathbf{m}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{u} + i\mathbf{v})^T A (\mathbf{u} + i\mathbf{v}) + i\mathbf{s}^T \mathbf{m} + i\mathbf{s}^T \mathbf{u} + i\mathbf{s}^T \mathbf{v}$$

これを展開し， $A\mathbf{v} = \mathbf{s}, \mathbf{v} = A^{-1}\mathbf{s}, \mathbf{v}^T \mathbf{s}^T A^{-1}$  ( $A = A^T$  は  $A$  の定義より当然) 等の関係を適用するだけである．多少だが注意がいる．やってみよう．

$$P = i\mathbf{s}^T \mathbf{m} - \frac{1}{2}\mathbf{u}^T A \mathbf{u} - \frac{i}{2}\mathbf{u}^T A \mathbf{v} - \frac{i}{2}\mathbf{v}^T A \mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}^T A \mathbf{v} + i\mathbf{s}^T \mathbf{u} - \mathbf{s}^T \mathbf{v}$$

始めの2項はそのまま．第3項は  $-\frac{i}{2}\mathbf{u}^T A \mathbf{v} = -\frac{i}{2}\mathbf{u}^T \mathbf{s}$  となる．第4項は  $A\mathbf{v} = \mathbf{s}$  の転置  $T$  をとると  $\mathbf{v}^T A^T = \mathbf{s}^T$ ． $A$  は対称行列なので  $A^T = A$  であるから， $\mathbf{v}^T A = \mathbf{s}^T$ ．したがって  $-\frac{i}{2}\mathbf{v}^T A \mathbf{u} = -\frac{i}{2}\mathbf{s}^T \mathbf{u}$  である．ここで  $\mathbf{s}^T \mathbf{u}$  はスカラーなので転置  $T$  をとっても不変．よってこの項は第3項と同じ  $-\frac{i}{2}\mathbf{u}^T \mathbf{s}$  となる．第5項では  $\mathbf{v}^T = \mathbf{s}^T A^{-1}$  を用いて  $\frac{1}{2}\mathbf{v}^T A \mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{s}^T A^{-1} \mathbf{s}$  となる．第6項は  $i\mathbf{s}^T \mathbf{u} = i(\mathbf{s}^T \mathbf{u})^T = i\mathbf{u}^T \mathbf{s}$  最初の変形はこの量がスカラーであることによる．この項は第3，4項と打ち消す．第7項  $\mathbf{s}^{-1} \mathbf{v} = -\mathbf{s}^T A^{-1} \mathbf{s}$  となり第5項と併せると  $-\frac{1}{2}\mathbf{s}^T A^{-1} \mathbf{s}$  となる．これを (5-3) に用いると，次のようになる．

$$\Phi(\mathbf{s}) = \exp \left( i \sum_j s_j m_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k} (A^{-1})_{j,k} s_j s_k \right) \int du_1 \cdots \int du_n C \exp \left( -\frac{1}{2} \mathbf{u}^T A \mathbf{u} \right)$$

積分は  $u$  についてなされている． $v$  は定数なので積分には関係しない．この積分は (5.1)， $W_n$  を  $z$  について積分するのと同じことなので1になる．得られた結果が (5.4) である．

次にキュムラント関数を見よう．幸いなことに Gauss 過程では2次までしかないことが分っているので，

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{s}) &= \sum_{r_i=1}^m \frac{(is_1)^{r_1} \cdots (is_n)^{r_n}}{r_1! \cdots r_n!} \langle z_1^{r_1} \cdots z_n^{r_n} \rangle_c \\ &= \frac{is_1}{1!} \langle z_1 \rangle_c + \cdots + \frac{(is_1)^2}{2!} \langle z_1^2 \rangle_c + \cdots + \frac{(is_1)(is_2)}{1!1!} \langle z_1 z_2 \rangle_c + \cdots \end{aligned}$$

までの3項を考えればよい。  $\langle z_1 \rangle_c = m_1$  より第1項の和は  $i \sum s_j m_j = \mathbf{s}^T \mathbf{m}$  となる。第2項は  $z_1$  の自己相関関数,  $\phi(t_1, t_2)$  となる。問題は第3項であるが, これは  $z_1$  と  $z_2$  の相関関数となるが  $\sum \phi(t_j, t_k)$  の形に書こうとすると  $\phi(t_1, t_2)$  と  $\phi(t_2, t_1)$  が出現する。もちろん  $t_1$  と  $t_2$  に関して対称なのでこれは等しい。そこで  $\langle z_1 z_2 \rangle_c = \phi(t_1, t_2) = \frac{1}{2} [\phi(t_1, t_2) + \phi(t_2, t_1)]$  とする必要がある。そうすると上の第2, 3項は併せて  $-\frac{1}{2} \sum_{j,k} \phi(t_j, t_k) s_j s_k$  となる。これから特性関数を求めると,

$$\Phi(s) = \exp \Psi(s) = \exp \left( i \mathbf{s}^T \mathbf{m} - \frac{1}{2} \sum_{j,k} \phi(t_j, t_k) s_j s_k \right)$$

これを (5.4) とくらべてみると  $(A^{-1})_{j,k} = \phi(t_j, t_k)$  であることが分る。以上が 4.1 節で説明を省略した点である。

### 3.6 Random Frequency Modulation

求めたいのは (2.1)

$$\langle x(0)^* x(t) \rangle \approx \langle \exp \left( i \int_0^t \omega(t') dt' \right) \rangle \quad (2.1)$$

である。(5.6)において  $s(t) = 1$  とおき, さらに平均値  $m(t) = 0$ , ( $\omega_0 = 0$  に対応) としてやれば  $z(t)$  が  $\omega(t)$  になるだけで結果は得られている。すなわち,

$$\Phi(1) = \langle \exp \left( i \int_0^t \omega(t') dt' \right) \rangle = \exp \left( -\frac{1}{2} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \langle \omega(t_1) \omega(t_2) \rangle \right)$$

この積分は Wiener-Khinchin の定理を証明するのにやったのですぐ求まる。さらに  $\omega(t)$  の相関関数の統計量は (2.2) を用いて,

$$\begin{aligned} \exp \left( -\frac{1}{2} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \langle \omega(t_1) \omega(t_2) \rangle \right) &= \exp \left( -\frac{\Delta^2}{2} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \phi(t_1 - t_2) \right) \\ &= \exp \left( -\Delta^2 \int_0^t (t - t') \phi(t') dt' \right) \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

これが相関関数,  $\langle x(0)^* x(t) \rangle$  である。ここから先は  $\phi(t)$  の形が決まらなると先に進めない。そこで常識的に次のような形を仮定してやろう。 $\phi(t) = \exp(-\frac{t}{t_c})$ , ここで,  $t_c$  は相関時間である。 $\exp$  中の積分は簡単に次のようになる。

$$-\Delta^2 \int_0^t (t - t') \exp \left( -\frac{t'}{t_c} \right) dt' = -\Delta^2 t_c^2 \left[ \frac{t}{t_c} - 1 + \exp \left( -\frac{t}{t_c} \right) \right] \quad (3.6.2)$$

(6.2) と上の結果を用いて (4.3) より  $I(\omega)$  を計算すればよいのだが, これも結構大変なのでイメージを掴むため2個のケースを考える。 $\omega$  の揺らぎの大きさには興味がなくその速さだけに興味があるので,  $\Delta = \text{一定}$  とする。

(1)  $t_c \gg t$  の場合

$t$  は観測時間程度と考えればよい。例えば  $t_c \approx 1$  万年で  $t \approx 1$  秒であるとき (6.3) は近似的に  $-\frac{1}{2} \Delta^2 t^2$  となるから  $I(\Omega)$  は次のようになる。

$$I(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( -\frac{1}{2} \Delta^2 t^2 - i\Omega t \right) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{\Omega^2}{2\Delta^2} \right)$$

すなわち, この場合スペクトルは Gaussian となり, その幅は  $\Delta$  (変調の強さ) で決まり,  $t_c$  には依存しないので motional narrowing は起こらない。 $\omega_0$  を復活させれば

$$I(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta} \exp \left( -\frac{(\Omega - \omega_0)^2}{2\Delta^2} \right)$$

となる.

$$(2) t_c \ll t$$

(1) と逆の場合である. 例えば  $t_c \approx 1\mu\text{秒}$  で  $t_c \approx 1\text{時間}$  であるとき (6.3) は  $\Delta^2 t_c^2 - \Delta_c^2 t$  と近似される. ただしこの場合,  $t$  の 1 次で効くので  $|t|$  としなければならない. したがって

$$\begin{aligned} I(\Omega) &= \frac{\exp(\Delta^2 t_c^2)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\Delta^2 t_c |t| - i\Omega t) dt \\ &= \frac{\exp(\Delta^2 t_c^2)}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^0 \exp(\Delta^2 t_c t - i\Omega t) dt + \int_0^{\infty} \exp(-\Delta^2 t_c t - i\Omega t) dt \right] \\ &= \frac{\Delta^2 t_c \exp(\Delta^2 t_c^2)}{\pi} \frac{1}{\Omega^2 + \Delta^4 t_c^2} \end{aligned}$$

となりスペクトルは Lorentzian となる. その幅は  $\Delta^2 t_c$  となり  $t_c$  に依存する. 即ち  $t_c$  が短くなれば線幅は狭くなる. これが motional narrowing と呼ばれる現象である. なお上のスペクトルで中心周波数  $\omega_0$  を復活させると

$$\frac{1}{\Omega^2 + \Delta^4 t_c^2} \rightarrow \frac{1}{(\Omega - \omega_0)^2 + \Delta^4 t_c^2} \quad (3.6.3)$$

となることは言うまでもない.

### 3.7 おわりに

ESR や NMR をやったことがない人には何を言いたいのかがよく分からないかもしれない. 注目している粒子には外部からの電磁場だけでなく周囲の粒子の dipole field や exchange interaction による field が加わるが, それらは熱運動によって揺らいでいる. これが  $\omega(t)$ , すなわち吸収の線幅を与える. 普通に考えると低温で揺らぎが少ないほど線幅は狭くなりそうなものだが逆なのである. 高温で粒子の運動が激しくなるとそれが平均化されて線幅は狭くなってしまふのだ. 粒子の運動は  $t_c$  の減少を起こす. これが運動による先鋭化と呼ばれる現象である. 定性的にはそう言ってしまうはおしまいなのだが, それを理論的に示せとなると本論のような議論が必要である.

ネットはやりの昨今である. 同じような解説がしていないか調べてみた. あるにはあった. しかし確率過程の詳細部分にまで踏み込んだ解説は見当たらなかった. “劣等生のため” という条件を満たすのは意外に難しいのだ.

(Mar. 31, 2013)

## 編集後記

今年の夏も例年にないほどの暑さであった。3巻5号の編集後記でも記したように、この8月には高知県四万十市で最高気温  $41.0^{\circ}\text{C}$  を記録している。日本の最高気温を振り返ってみると、観測史上の最高気温は大正年間に記録した山形県山形市の  $40.8^{\circ}\text{C}$  で、その後、約90年経って昨年岐阜県多治見市と群馬県館林市で  $40.9^{\circ}$  を記録している。確実に地球温暖化が進んでいる。

少し余談が過ぎた。この通信も発刊以来約4年となる。お蔭様で今順調に発刊は進んでいる。意外な読者の方々からのお便りは編集者にとってとてもうれしい。一例として、インターネットでこのサーキュラーを知り、その中の一論文を読んで自分の卒業論文に資するようになりたいと書いてあった。これは編集者にとって望外の喜びである。色々な方々からの投稿を受けることがこの通信を意義あるものにしてくれる。

先号の中西先生の「等比数列のコサイン有限乗積」は興味深かった。こういうテーマについては数学者がすでに書いておくべきものであったと感じている。

今後ともこのサーキュラーを意義あるものとしたい。

(新関章三)